

Mathematische Methoden

TU Berlin, SS 2008

Prof. Dr. T. Brandes

7. Juli 2008

INHALTSVERZEICHNIS

1. Wiederholung Analysis	1
1.1 Funktionen einer Variablen	1
1.1.1 Umkehrfunktion	1
1.2 Differentiation	1
1.2.1 Ableitungen	1
1.2.2 Ableitung der inversen Funktion	2
1.2.3 Höhere Ableitungen	2
1.3 Taylorentwicklung	2
1.3.1 Beispiel: Relativistische Energien	3
1.4 Asymptotisches Verhalten von Funktionen	3
1.4.1 Grenzwerte	4
1.5 Komplexe Zahlen	4
1.5.1 Eigenschaften	4
1.5.2 Polardarstellung (Argand-Diagramm)	4
1.5.3 Euler-Formel	5
1.5.4 Beispiel: Kreisbewegung in 2 Dimensionen	5
1.5.5 Wurzeln	5
2. Gewöhnliche Differentialgleichungen	6
2.1 Einführung	6
2.1.1 Motivierung	6
2.1.2 Klassifizierung	6
2.2 DGLn erster Ordnung	7
2.2.1 Richtungsfeld und Anfangswertproblem	7
2.2.2 Einfache Beispiele	8
2.2.3 Methoden: Trennung der Variablen	8
2.2.4 Lineare DGL	9
2.3 Lineare Systeme von DGL	10
2.3.1 Umwandlung einfacher DGLs höherer Ordnung in ein System von DGL erster Ordnung	10
2.4 Lineare homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten	11
2.4.1 Normalform	11
2.4.2 Wiederholung Lineare Algebra (I): Vektoren und Matrizen	12
2.4.3 Exponentiallösung für lineares DGL-System	13

2.4.4	Wiederholung Lineare Algebra (II): Eigenwerte und Eigenvektoren	14
2.4.5	Diagonalisierung der Exponentiallösung für lineares DGL-System	15
2.4.6	Eigenlösungen und Anfangswertproblem	15
2.4.7	Eigenlösungen für nicht-diagonalisierbares A	16
2.4.8	ANWENDUNG MECHANIK: gedämpfter harmonischer Oszillator	16
2.4.9	Wiederholung Lineare Algebra (III): Skalar- und Vektorprodukt .	17
2.5	ANWENDUNG MECHANIK: Eigenschwingungen und Eigenmoden (Normalmoden)	18
2.5.1	Fall $d = 1$, $N = 2$ (zwei gekoppelte Oszillatoren)	18
2.5.2	Mehrere ($N > 2$) gekoppelte Oszillatoren	21
2.6	Lineare inhomogene Systeme	21
3.	Einfache partielle Differentialgleichungen und Fourier-Analyse	23
3.1	Die Gleichung der schwingenden Saite (Wellengleichung in einer Dimension)	23
3.1.1	Wellengleichung als Kontinuumsmodel: gekoppelte Massenpunkten	24
3.1.2	Separationsansatz	24
3.1.3	Erfüllung der Anfangsbedingungen	25
3.2	Fourier-Analyse	26
3.2.1	Definitionen	26
3.2.2	Halbintervallige Fourier-Reihen (Sinus und Cosinus)	28
3.2.3	Vektorraum der Periodischen Funktionen	28
3.2.4	Konvergenz der Fourierreihe	29
3.3	Die Diffusionsgleichung in einer Dimension	29
3.3.1	Herleitung der Diffusionsgleichung in einer Dimension	30
3.3.2	Lösung der Diffusionsgleichung	30
3.4	Unendliches Intervall: von Fourier-Reihen zur Fourier-Transformation . .	31
3.4.1	Motivation	31
3.4.2	Orts- und Impulsraum (k -Raum), Zeit-Domäne und Frequenzraum	32
3.4.3	Fouriertransformation: Beispiel Gauß-Funktion	33
3.4.4	Die Delta-Distribution	34
3.4.5	Einige Eigenschaften der Fourier-Transformation	34
3.4.6	Lösung von pDGL mit Fouriertransformation	35
3.4.7	ANWENDUNG QUANTENMECHANIK: Lösung der Schrödinger-gleichung	36
4.	Kurven und Krummlinige Koordinaten	37
4.1	Kurven und Kinematik eines Massenpunktes	37
4.1.1	Bahn eines Massenpunktes. Geschwindigkeit, Beschleunigung . . .	37
4.1.2	Die Bogenlänge s	38
4.1.3	Begleitendes Dreibein	39
4.2	Krummlinige Koordinaten	41
4.2.1	Kovariante und kontravariante Basis	41
4.2.2	ANWENDUNG FESTKÖRPERPHYSIK: reziprokes Gitter	42
4.2.3	Polarkoordinaten	43

4.2.4	Beliebige Basis, Metrik-Tensor	44
4.2.5	Beschleunigung und Christoffel-Symbole	45
5.	Vektoranalysis	47
5.1	Vektorfelder	47
5.2	Gradient	47
5.2.1	Definition	47
5.2.2	Der Gradient in krummlinigen Koordinaten	48
5.3	ANWENDUNG MECHANIK: Kraft, Gradient und Potential	50
5.3.1	Konservative Kraftfelder	50
5.3.2	Kurvenintegrale, Arbeit, Leistung	50
5.3.3	Konservative Kräfte und vom Weg unabhängige Arbeit	51
5.4	Rotation und Integralsatz von Stokes	51
5.4.1	Rotation	51
5.4.2	Integralsatz von Stokes	53
5.4.3	ANWENDUNG ELEKTRODYNAMIK: Induktionsgesetz	53
5.4.4	ANWENDUNG MAGNETOSTATIK	54
5.5	Divergenz und Integralsatz von Gauß	54
5.5.1	Divergenz	54
5.5.2	Integralsatz von Gauß	55
5.5.3	ANWENDUNG ELEKTROSTATIK: Gauß'sches Gesetz	55
5.5.4	Zusammenfassung: Maxwell'sche Gleichungen	56

1. WIEDERHOLUNG ANALYSIS

Literatur: O. Forster, 'Analysis 1' (Vieweg). Bronstein, 'Taschenbuch der Mathematik'.

1.1 Funktionen einer Variablen

Üblicherweise als $y = f(x)$, Darstellung als Kurve in einem rechtwinkligen Koordinatensystem. Beispiel: $y = x^2$ Parabel, $y = \sin x$, Sinus. Stetige Funktionen, unstetige Funktionen (Beispiele).

1.1.1 Umkehrfunktion

Beispiel $y = e^x$ Exponentialfunktion, umkehren als $x = \ln y$ Logarithmus. Auf Definitionsbereich achten!

1.2 Differentiation

1.2.1 Ableitungen

Falls der Grenzwert existiert,

$$f'(x) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (1.1)$$

Geometrische Bedeutung: Tangente!

Differentiationsregeln: Ableitung von Summe, Produkt, zusammengesetzter Funktion. Beispiel

$$f(x) = e^{\sin x^2} \quad (1.2)$$

(mehr in den AUFGABEN). Weitere Beispiele (AUFGABEN)

$$f(x) = x^{1/2}, \quad f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (1.3)$$

bei $x = 0$. Fall eines Knicks bei x_0 : links- und rechtsseitige Ableitungen $f'(x_0 + 0)$, $f'(x_0 - 0)$. AUFGABE: berechnen für

$$f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}. \quad (1.4)$$

1.2.2 Ableitung der inversen Funktion

(Merkregel, kein Beweis)

$$y = f(x) \rightsquigarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) \rightsquigarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)}. \quad (1.5)$$

Beispiel (mehr in den AUFGABEN):

$$y = \sin(x) \rightsquigarrow x = \arcsin(y) \rightsquigarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}. \quad (1.6)$$

1.2.3 Höhere Ableitungen

Zweite Ableitung

$$y''(x) \equiv \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} y(x) \equiv \frac{d^2 y}{dx^2} \equiv y^{(2)}(x). \quad (1.7)$$

Entsprechend höhere Ableitungen

$$f^{(n)}(x) \equiv \frac{d^{(n)}}{dx^n} f(x). \quad (1.8)$$

1.3 Taylorentwicklung

Falls konvergent,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (1.9)$$

Hierbei ist

$$n! \equiv n(n-1)(n-2)\dots 1 \quad (1.10)$$

(Fakultät). Wichtige Beispiele:

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (1.11)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad (1.12)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (1.13)$$

Geometrische Bedeutung: Approximation durch Polynom.

Gegenbeispiel, wo es nicht funktioniert: $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ (wesentliche Singularität bei $x = 0$).

Abbrechen der Taylorreihe: In der Physik extrem wichtig für Näherungsrechnungen. Beispiele

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (1.14)$$

$$= 1 + x + O(x^2) \quad (1.15)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + O(x^3) \quad (1.16)$$

etc.: Die Funktion wird nur bis zu Termen einer gewissen *Ordnung* (Potenz) entwickelt, alle höheren Terme werden vernachlässigt. Im obigen Beispiel gut für $x \ll 1$ ('sehr viel kleiner als 1'). Wie gut die Näherung funktioniert, hängt vom jeweiligen Problem ab.

AUFGABE: Taylorentwicklung der potentiellen Energie für kleine Auslenkungen beim Fadenpendel.

1.3.1 Beispiel: Relativistische Energien

Einstein \rightsquigarrow Newton durch Taylorentwicklung von

$$E(v) \equiv \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^4\right). \quad (1.17)$$

AUFGABE: Überprüfen und bis zu $O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^4\right)$ (nächster Term) entwickeln. (Physikalische und mathematische) Diskussion der Konvergenz der Reihe.

1.4 Asymptotisches Verhalten von Funktionen

Wichtig, um sich einen Überblick zu verschaffen. Beispiel (Skizze)

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \rightsquigarrow f(x) \sim \frac{1}{x^2}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (1.18)$$

Genauer durch Entwickeln nach Potenzen von $1/x^2$ für $x \gg 1$,

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+x^{-2}} = \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \pm \dots\right) \quad (1.19)$$

$$= \frac{1}{x^2} + O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^4\right) \quad (1.20)$$

unter Benutzung der *geometrischen Reihe*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad |x| < 1. \quad (1.21)$$

1.4.1 Grenzwerte

Beispiel

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \dots}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \dots \right) = 1. \quad (1.22)$$

1.5 Komplexe Zahlen

Literatur: W. Fischer, I. Lieb 'Funktionentheorie' (Vieweg) - hier nur die ersten Kapitel.

1.5.1 Eigenschaften

Komplexe Zahl

$$z \equiv x + iy \quad (1.23)$$

mit x (Realteil) und y (Imaginärteil) reell und imaginärer Einheit i . Die imaginäre Einheit i ist eine Lösung der quadratischen Gleichung

$$z^2 + 1 = 0. \quad (1.24)$$

Die andere Lösung ist $-i$: Konjugiert komplexe Zahl

$$z \equiv x + iy \rightsquigarrow z^* \equiv \bar{z} \equiv x - iy. \quad (1.25)$$

Darstellung einer komplexen Zahl als Punkt in zweidimensionaler Ebene ('komplexe Ebene'). AUFGABEN: Addition, Produkte, Quotienten komplexer Zahlen. Real- und Imaginärteil mit z und z^* .

1.5.2 Polardarstellung (Argand-Diagramm)

Ebene Polarkoordinaten

$$z = x + iy, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (1.26)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| = \sqrt{zz^*} \quad (1.27)$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{y}{x} \right). \quad (1.28)$$

Damit de-Moivre's Theorem (AUFGABE)

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta. \quad (1.29)$$

AUFGABE: daraus trigonometrische Identitäten herleiten.

1.5.3 Euler-Formel

Aus den Taylorreihen (Exp., Sinus, Cosinus) folgt

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1.30)$$

und somit

$$z = x + iy = re^{i\theta}. \quad (1.31)$$

1.5.4 Beispiel: Kreisbewegung in 2 Dimensionen

Beschreibung durch eine Kurve $x(t) = r \cos(\omega t)$, $y(t) = r \sin(\omega t)$ oder alternativ in der komplexen Ebene

$$z(t) = re^{i\omega t} \quad (1.32)$$

Die Projektionen auf die Achsen beschreiben harmonische Schwingungen.

1.5.5 Wurzeln

Im Komplexen als Lösungen z von

$$z^n = z_0. \quad (1.33)$$

Beispiel $z_0 = 1$ (Einheitswurzeln): Schreiben als

$$e^{in\theta} = 1 \rightsquigarrow z = e^{2k\pi i/n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (1.34)$$

(AUFGABE, Darstellung als Argand-Diagramm)

Weitere AUFGABEN: hyperbolische Funktionen \sinh , \cosh , ihr Zusammenhang mit \sin , \cos , ihre Potenzreihen.

2. GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Literatur: W. Walter, 'Gewöhnliche Differentialgleichungen' (Springer). Bronstein, 'Taschenbuch der Mathematik'.

2.1 Einführung

2.1.1 Motivierung

Dynamische Grundgleichungen haben die Form von Differentialgleichungen. Beispiel: Newtonsche Bewegungsgleichung eines Massenpunktes (Masse m , Ort $\mathbf{r}(t)$),

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) \equiv m \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \quad (2.1)$$

mit der ortsabhängigen Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Spezialfall eindimensionaler harmonischer Oszillator der Masse m und Federkonstante (Young-Modul) k ,

$$m \ddot{x}(t) = -kx(t), \quad k > 0 \quad (2.2)$$

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad \omega^2 \equiv \frac{k}{m}. \quad (2.3)$$

Das ist eine lineare, gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung.

2.1.2 Klassifizierung

- **Gewöhnliche** DGL für Funktionen einer Variablen, z.B. Ort $\mathbf{r}(t)$ als Funktion der Zeit (t ist die Variable).
- **Partielle** DGL für Funktionen mehrerer Veränderlicher, z.B. quantenmechanische Wellenfunktion $\Psi(\mathbf{r}, t)$.
- **Ordnung** der DGL: höchste auftretende Ableitung.
- Implizit oder explizit gegeben.
- Linear oder nichtlinear in der gesuchten Funktion.
- Einzelne DGL oder **Systeme** von DGL.

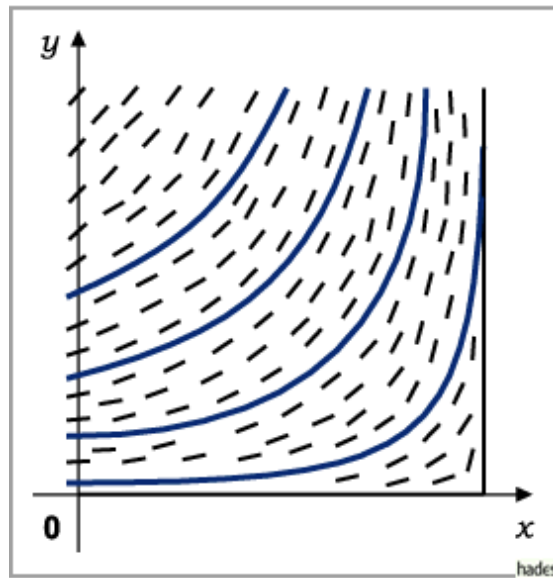


Abbildung 2.1: Richtungsfeld. ©Verlag Harri Deutsch (Bronstein, Taschenbuch der Mathematik 6. Auflage 2006.)

Beispiele

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)), \quad \mathbf{r} = (x, y, z), \quad \text{System von drei DGL 2. Ordnung} \quad (2.4)$$

$$\ddot{x}(t) + \alpha \cos x(t) = 0, \quad \text{nichtlineare DGL 2. Ordnung} \quad (2.5)$$

2.2 DGLn erster Ordnung

Explizite Form

$$y'(x) = f(x, y). \quad (2.6)$$

Hierbei ist $f(x, y)$ fest vorgegeben. Die Aufgabe besteht darin, eine Funktion $y(x)$ zu finden, die $y'(x) = f(x, y(x))$ erfüllt. Beispiel: $y'(x) = x^2 + 2 \sin(xy)$.

2.2.1 Richtungsfeld und Anfangswertproblem

- *Richtungsfeld:* Steigung einer Lösung $y(x)$ im Punkt (x_0, y_0) in der x - y Ebene ist $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. Gesamtheit aller Tangenten in der x - y Ebene definieren ein *Richtungsfeld* von $y'(x) = f(x, y)$. Geometrische Interpretation von $y'(x) = f(x, y)$: Lösungskurve $y(x)$ hat sich an Richtungsfeld 'anzuschmiegen'.
- *Anfangswertproblem:* Lösungskurve $y(x)$ ausgehend von einem Anfangspunkt $y_0 = y(x_0)$ bestimmen.

2.2.2 Einfache Beispiele

Im Fall

$$y'(x) = f(x) \quad (2.7)$$

erfolgt die Lösung durch einfache Integration, z. B.

$$y'(x) = x^3 + \cos(x) \rightsquigarrow y(x) = \frac{1}{4}x^4 + \sin(x) + c \quad (2.8)$$

mit einer noch unbestimmten Konstanten c . Man erhält also zunächst eine ganze Schar von Lösungen, die durch die Konstante c , d.h. die Integrationskonstante, parametrisiert wird. Wenn man jetzt eine Anfangsbedingung vorgibt, läßt sich aus dieser c bestimmen:

$$y(x_0) = y_0 \rightsquigarrow c = y_0 - \frac{1}{4}x_0^4 - \sin(x_0). \quad (2.9)$$

2.2.3 Methoden: Trennung der Variablen

Für die Form

$$y'(x) = f(x)g(y) \quad (2.10)$$

schreiben wir formal

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \rightsquigarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad (2.11)$$

und integrieren beide Seiten. Wir können gleich vom Anfangspunkt (x_0, y_0) integrieren, um die richtige Anfangsbedingung zu erwischen,

$$\int_{y_0}^y \frac{d\zeta}{g(\zeta)} = \int_{x_0}^x f(\xi)d\xi. \quad (2.12)$$

Eindeutigkeit nicht immer gegeben, vgl. Walter, 'Gewöhnliche Differentialgleichungen' (Springer Berlin Heidelberg, 1986).

Einfaches Beispiel

$$y' = e^y \sin x \rightsquigarrow \int e^{-y} dy = \int \sin x dx \rightsquigarrow -e^{-y} = -\cos x - c \rightsquigarrow \quad (2.13)$$

$$y(x) = -\log(\cos x + c), \quad (2.14)$$

vgl. Fig.(2.2): Man erhält Lösungskurven, die sich stark in ihrem Verhalten unterscheiden. Fängt man z.B. bei $x_0 = 0$ an, so sitzt man je nach Anfangswert y_0 auf einer Kurve, die beschränkt ist, die an bestimmten Stellen divergiert oder sogar in bestimmten Bereichen (wegen des Logarithmus) nicht definiert ist. Nichtlineare Differentialgleichungen zeigen also eine starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen!

AUFGABE: Löse $y'(x) = \alpha y/x$ für reelles α und skizziere die Lösungsscharen $y(x)$ für $\alpha = 1$ und $\alpha = -1$.

AUFGABE: Löse $y'(x) = -2x/y$ und skizziere die Lösungsscharen $y(x)$.

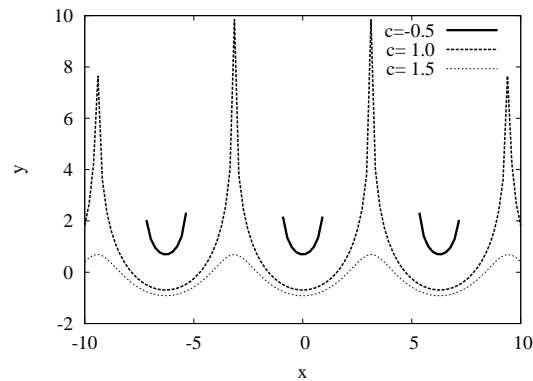


Abbildung 2.2: Lösungen von $y' = e^y \sin x$, vgl. Gl. (2.13).

2.2.4 Lineare DGL

Diese wichtige DGL hat die Form

$$L[x(t)] \equiv \dot{x}(t) + g(t)x(t) = f(t) \quad (2.15)$$

mit dem **linearen Funktional** ('Funktion von Funktionen') L . Hierbei sind $g(t)$ und $f(t)$ fest vorgegeben und $x(t)$ ist gesucht. Die Gleichung mit $f(t) \equiv 0$ auf der rechten Seite heißt **homogene** Differentialgleichung, die Gleichung mit $f(t) \neq 0$ auf der rechten Seite heißt **inhomogene** Differentialgleichung.

Beispiel: Ein Teilchen der Masse m bewegt sich auf der z -Achse unter dem Einfluß einer Reibungskraft $-\gamma\dot{z}(t)$ und einer äußeren Kraft $f(t)$ (beide in z -Richtung). Die entsprechende Newtonsche Gleichung für die z -Komponente lautet

$$m\ddot{z}(t) = -\gamma\dot{z}(t) + f(t) \quad (2.16)$$

Wir benutzen die Geschwindigkeit $v(t) = \dot{z}(t)$ und erhalten

$$\dot{v}(t) + \frac{\gamma}{m}v(t) = \frac{1}{m}f(t) \quad (2.17)$$

als lineare Differentialgleichung erster Ordnung.

AUFGABE: Zerfallsprozesse: radioaktive Kerne, Abnahme einer Population von Tieren durch Aussterben, ...

Die Inhomogenität im mechanischen Beispiel oben ist also die äussere Kraft. Allgemein löst man Gl. (2.15) in zwei Schritten: zunächst ohne Inhomogenität, dann mit:

- Lösung für den **homogenen** Fall $f \equiv 0$.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + g(t)x(t) &= 0 \rightsquigarrow \frac{dx}{x} = -g(t)dt \rightsquigarrow \ln x + c = -\int g(t)dt \\ \rightsquigarrow x_h(t; t_0) &\equiv e^{-\int_{t_0}^t dt' g(t')} \end{aligned} \quad (2.18)$$

(ÜBERPRÜFEN!). Löst die DGL mit $f \equiv 0$ und Anfangsbedingung $x(t_0) = 1$. Physikalische Interpretation: beschreibt exponentiellen Änderung $x(t)$ einer anfänglichen Population 1 mit zeitabhängiger Rate $g(t)$. Lösung für anfängliche Population c durch Multiplikation mit c , d.h.

$$x(t) = ce^{-\int_{t_0}^t dt' g(t')}, \quad x(t_0) = c \quad (2.19)$$

löst das homogene Problem.

- Lösung für den **inhomogenen** Fall: Eine spezielle Lösung ist

$$x_s(t; t_0) = \int_{t_0}^t dt' f(t') x_h(t; t'), \quad (2.20)$$

denn

$$\dot{x}_s(t; t_0) = f(t)x_h(t; t_0) + \int_{t_0}^t dt' f(t') \dot{x}_h(t; t') \quad (2.21)$$

$$= f(t) - \int_{t_0}^t dt' f(t') g(t) x_h(t; t') = f(t) - g(t)x_s(t; t_0). \quad (2.22)$$

Physikalische Interpretation von $x_s(t; t_0) = \int_{t_0}^t dt' f(t') x_h(t; t')$: alle Beiträge der exponentiellen Änderungen durch äusseren Einfluss $f(t')$ zur Anfangszeit t' werden aufintegriert. Die homogene Lösung $x_h(t; t')$ **propagiert** diesen Einfluss über den Zeitraum $[t_0, t]$ hinweg und heisst entsprechend **Propagator** oder **Grundlösung** der DGL. Der Propagator ist ein wichtiges Konzept in der Physik, insbesondere in der Quantenmechanik.

Gesamtlösung= Lösung für den inhomogenen Fall plus Lösung für den homogenen Fall,

$$x(t) = cx_h(t; t_0) + \int_{t_0}^t dt' f(t') x_h(t; t'). \quad (2.23)$$

AUFGABE: konkretes Beispiel, siehe Übungen.

2.3 Lineare Systeme von DGL

2.3.1 Umwandlung einfacher DGLs höherer Ordnung in ein System von DGL erster Ordnung

Physikalische Motivation: Newtonsche Gleichungen im Phasenraum und nicht im Ortsraum lösen. Beispiel:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad \text{linearer harm. Oszillator in 1d} \quad (2.24)$$

Einführung von zwei Funktionen

$$x_1(t) = x(t) \quad (2.25)$$

$$x_2(t) = \dot{x}(t). \quad (2.26)$$

Damit Umschreiben als

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (2.27)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\omega^2 x_1(t). \quad (2.28)$$

oder bei Umbenennung

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{1}{m}p(t) \\ \dot{p}(t) &= -m\omega^2 x(t). \end{aligned} \quad (2.29)$$

mit dem Ort x und dem **Impuls** p . Wichtiges Vorgehen für die analytische Mechanik (Hamiltonsche Gleichungen, x - p Phasenraum) und in der Quantenmechanik, wo x und p zu nichtvertauschbaren linearen Operatoren werden.

Umgekehrt kann man ein System von DGL durch Differentiation und Einsetzen wieder in eine einzelne DGL höherer Ordnung verwandeln.

Sehr wichtig für viele Anwendungen: Schwingungen in der Akustik, Elektronik, Mechanik, Quantenmechanik etc. Das einfachste Beispiel ist bereits der 1d harmonische Oszillator im Impulsraum, Gl. (2.29)

2.4 Lineare homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten

2.4.1 Normalform

Wir schreiben ein lineares System mit konstanten Koeffizienten in der Normalform

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ &\dots = \dots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{aligned}$$

Wir fassen die Funktionen $y_i(t)$ als Komponenten eines Vektors $\mathbf{y}(t)$ auf und fassen die konstanten Koeffizienten a_{ij} zu einer quadratischen Matrix zusammen,

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t), \quad (2.30)$$

was als homogenes System bezeichnet wird. Der Fall

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t) \quad (2.31)$$

wird als inhomogenes System bezeichnet.

2.4.2 Wiederholung Lineare Algebra (I): Vektoren und Matrizen

Literatur: Bitte im Skript von Mike Scherfner die entsprechenden Kapitel wiederholen.

2.4.2.1 Vektoren

Vektoren \mathbf{x} , \mathbf{y} etc. im n -dimensionalen Vektorraum (reell oder komplex) haben die Form

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \quad (2.32)$$

mit reellen oder komplexen Komponenten x_i und den Einheitsvektoren (kartesische Basis) \mathbf{e}_i .

2.4.2.2 Basis, Lineare Unabhängigkeit

Bitte selbst wiederholen.

2.4.2.3 Lineare Abbildungen, Matrizen

Lineare Abbildungen werden durch quadratische $n \times n$ - Matrizen dargestellt,

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} = A\mathbf{x} \quad (2.33)$$

2.4.2.4 Matrix-Addition, Multiplikation

Matrixoperationen: Addition. Multiplikation von Matrizen ist i.A. nicht kommutativ, d.h.

$$[A, B] \equiv AB - BA \neq 0. \quad (2.34)$$

Das ist wichtig für die Quantenmechanik (Matrizenmechanik).

AUFGABE: Pauli-Spinmatrizen.

AUFGABE: Rotationsmatrix in 2d: Multiplikation, geometrische Interpretation. Spiegelungen.

2.4.2.5 Inverse einer Matrix; Determinante

Die Inverse einer quadratischen Matrix A stellt die entsprechende lineare Umkehrabbildung dar. Allerdings kann es sein, dass diese Umkehrabbildung nicht existiert. Beispiel ($n = 2$): Projektion auf die x_1 -Achse (Skizze),

$$\mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Die Umkehrabbildung existiert nicht: ein Punkt auf der x_1 -Achse ‘weiss nicht, wo er ursprünglich herkam’.

Die Umkehrabbildung, d.h. die Inverse einer Matrix A existiert genau dann, wenn ihre *Determinante* von Null verschieden ist.

AUFGABE: Rechenregeln, Beispiele für Determinanten. Inverse einer 2 mal 2 Matrix.

2.4.3 Exponentiallösung für lineares DGL-System

Falls unser System

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) \quad (2.36)$$

nur aus $n = 1$ einer Komponente besteht, haben wir die einfache DGL

$$y'(t) = ay(t), \quad (2.37)$$

die wir durch Trennung der Variablen lösen:

$$\frac{dy}{y} = a dt \rightsquigarrow \ln y = at + c \rightsquigarrow y(t) = y(0)e^{at}, \quad (2.38)$$

wir bekommen also eine Exponentialfunktion.

Für den $n \times n$ -Fall versuchen wir etwas entsprechendes: statt der Exponentialfunktion von at die Exponentialfunktion von At , wobei t die Variable in $\mathbf{y}(t)$ ist und A die $n \times n$ -Matrix. Wir definieren für eine Matrix M die Exponentialfunktion einer Matrix über die Potenzreihe,

$$e^M \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k, \quad (2.39)$$

wobei M^k einfach das k -fache Matrizenprodukt ist. e^M ist also wieder eine $n \times n$ -Matrix, und es gilt (AUFGABE)

$$\frac{d}{dx} e^{Mt} = M e^{Mt}. \quad (2.40)$$

Damit finden wir die Lösung

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) \rightsquigarrow \mathbf{y}(t) = e^{At}\mathbf{y}(t=0), \quad (2.41)$$

wie man durch direktes Differenzieren nachprüft. Die konkrete Berechnung der Exponentialfunktion geht am besten, wenn man die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix kennt.

2.4.4 Wiederholung Lineare Algebra (II): Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwerte λ und Eigenvektoren \mathbf{x} einer $n \times n$ -Matrix sind definiert über

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \quad (2.42)$$

Diese Gleichung ist ein lineares homogenes Gleichungssystem, das genau dann eine nicht-triviale Lösung hat, wenn

$$\det(A - \lambda E) = 0, \quad (2.43)$$

wobei E die $n \times n$ -Einheitsmatrix ist. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des *charakteristischen Polynoms* der Matrix A .

Zu jedem Eigenwert λ bestimmt man jetzt die zugehörigen Eigenvektoren \mathbf{x} durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda E)\mathbf{x} = 0. \quad (2.44)$$

Hat man hierbei soviel linear unabhängige Lösungsvektoren \mathbf{x} wie die Vielfachheit der entsprechenden Nullstelle des charakteristischen Polynoms der Matrix A , so nennt man A *diagonalisierbar*.

BEISPIEL (VORLESUNG): 2×2 -Matrix.

GEGENBEISPIEL (nicht diagonalisierbar): die 2×2 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

2.4.4.1 Diagonalform

Ausgangspunkt: $n \times n$ -Matrix A mit n linear unabhängigen Eigenvektoren $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Wir bilden die Matrix der (Spalten)Eigenvektoren von A ,

$$\begin{aligned} C &\equiv (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \rightsquigarrow \\ AC &= (A\mathbf{x}_1, \dots, A\mathbf{x}_n) = (\lambda_1\mathbf{x}_1, \dots, \lambda_n\mathbf{x}_n) \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$= (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)D, \quad D \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$A = CDC^{-1} \leftrightarrow D = C^{-1}AC. \quad (2.47)$$

Damit ist die Transformation der Matrix A auf Diagonalform gefunden. KONKRETES BEISPIEL (VORLESUNG): 2×2 -Matrix. AUFGABE: Hauptachsentransformation einer quadratischen Form.

Warum ist das überhaupt nützlich:

2.4.5 Diagonalisierung der Exponentiallösung für lineares DGL-System

Wir können die Lösung $\mathbf{y}(t) = e^{At}\mathbf{y}(t=0)$ des linearen DGL-Systems $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ jetzt durch Diagonalisieren berechnen: wiederum Annahmen, dass die Matrix A n linear unabhängigen Eigenvektoren hat. Dann folgt

$$\exp(At) = \exp(CDC^{-1}t) = C \exp(Dt)C^{-1} = C \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} C^{-1}, \quad (2.48)$$

wobei der zweite Schritt durch Benutzung der Potenzreihe erfolgt. Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= A\mathbf{y}(t) \rightsquigarrow \\ \mathbf{y}(t) &= C \exp(Dt)C^{-1} = C \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} C^{-1}\mathbf{y}(t=0). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Damit ist die Lösung direkt geschlossen ausgedrückt mittels der Eigenwerte λ von A , der Matrix C der Eigenvektoren von A und der Anfangsbedingung $\mathbf{y}(t=0)$ zur Zeit $t=0$.

2.4.6 Eigenlösungen und Anfangswertproblem

Wir können Lösungen zu

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) \quad (2.50)$$

auch direkt durch einen Exponential-Ansatz finden, d.h. wir setzen $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}e^{\lambda t}$ in die DGL ein und erhalten

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad (2.51)$$

d.h. genau wieder die Eigenwertgleichung für die Eigenwerte λ_i und Eigenvektoren \mathbf{x}_i der Matrix A . Wenn A n linear unabhängige Eigenvektoren hat, haben wir somit auch n linear unabhängige Lösungen $\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{x}_i e^{\lambda_i t}$. Wie verträgt sich das mit unserer eindeutigen, geschlossenen Lösung Gl. (2.49)? Zunächst gilt: Linearkombinationen von $\mathbf{y}_i(t)$ zu verschiedenen λ sind wiederum eine Lösung von $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$. Wir wählen die Koeffizienten der Linearkombination

$$\mathbf{y}(t) = c_1\mathbf{y}_1(t) + c_2\mathbf{y}_2(t) + \dots + c_n\mathbf{y}_n(t) \quad (2.52)$$

so, dass die Anfangsbedingung (AB) erfüllt ist:

$$\mathbf{y}(t=0) = c_1\mathbf{y}_1(0) + c_2\mathbf{y}_2(0) + \dots + c_n\mathbf{y}_n(0) = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \dots + c_n\mathbf{x}_n \quad (2.53)$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem für den Koeffizientenvektor \mathbf{c} ,

$$\mathbf{y}(t=0) = C\mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \equiv \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad C \equiv (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n). \quad (2.54)$$

Die Lösung ist eindeutig, weil C invertierbar ist.

2.4.7 Eigenlösungen für nicht-diagonalisierbares A

Der Fall

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) \quad (2.55)$$

mit nichtdiagonalisierbarem A ist etwas komplizierter. Man muss A auf *Jordansche Normalform* bringen bzw. den Exponentialansatz etwas verallgemeinern (vgl. WALTER, 'Gewöhnliche Differentialgleichungen').

2.4.8 ANWENDUNG MECHANIK: gedämpfter harmonischer Oszillator

Dieser erfüllt die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = f(t), \quad \gamma > 0. \quad (2.56)$$

Umschreiben in ein System erster Ordnung führt auf (setze die Masse $m = 1$)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= p(t) \\ \dot{p}(t) &= -\omega^2x(t) - 2\gamma p(t) + f(t) \end{aligned} \quad (2.57)$$

Wir schreiben das in unserer Standard-Form als

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t) \quad (2.58)$$

mit

$$\mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\gamma \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

Hier betrachten wir zunächst den homogenen Fall ohne äußere Kraft, d.h. $f(t) = 0$.

Die Eigenwerte λ von A sind durch

$$-\lambda(-2\gamma - \lambda) + \omega^2 = 0 \rightsquigarrow \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0 \quad (2.60)$$

$$\rightsquigarrow \lambda_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \quad (2.61)$$

gegeben. Für $\gamma = 0$ (ungedämpfter Fall) gibt es die zwei Lösungen, d.h. Eigenwerte $\lambda_{1/2}$ und Eigenvektoren $\mathbf{x}_{1/2}$,

$$\lambda_{1/2} = \pm i\omega, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix}. \quad (2.62)$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Systems ist deshalb von der Form

$$\mathbf{y}(t) = c_+ \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} e^{i\omega t} + c_- \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix} e^{-i\omega t} \quad (2.63)$$

mit Koeffizienten, die aus der Anfangsbedingung bestimmt werden müssen.

AUFGABE: Betrachte den gedämpften harmonischen Oszillator ohne äußere Kraft, $\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$.

1. Berechne analog zu oben die Eigenfrequenzen und die allgemeine Lösung des homogenen Systems für $\gamma \neq 0$. Hierbei soll angenommen werden, dass die zwei Eigenfrequenzen verschieden voneinander sind.

2. Bestimme $x(t)$ explizit (ausgedrückt durch reelle Funktionen) für die Anfangsbedingung $x(t=0) = x_0$, $\dot{x}(t=0) = v_0$. Skizziere die Lösung.

2.4.9 Wiederholung Lineare Algebra (III): Skalar- und Vektorprodukt

Wir schliessen unsere Wiederholung der Lineare Algebra hier der Vollständigkeit halber vorläufig mit einem Einschub über Skalar- und Vektorprodukte ab.

2.4.9.1 Skalarprodukt (inneres Produkt) zweier Vektoren

In kartesischen Koordinaten gilt

$$\mathbf{x}\mathbf{y} \equiv (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \sum_{i=1}^n x_i^* y_i. \quad (2.64)$$

Die Länge (Norm) eines Vektors ist

$$\|\mathbf{x}\| \equiv \sqrt{\mathbf{x}\mathbf{x}}. \quad (2.65)$$

Zwei Vektoren \mathbf{x} , \mathbf{y} heissen **orthogonal**, falls $\mathbf{x}\mathbf{y} = 0$.

2.4.9.2 Kreuzprodukt zweier reeller Vektoren im R^3

Das Kreuzprodukt von $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$ und $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^3 y_i \mathbf{e}_i$ mit reellen Koeffizienten ist selbst wieder ein dreidimensionaler Vektor senkrecht zu \mathbf{x} , \mathbf{y} und über die Determinante definiert als

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \quad (2.66)$$

wobei die Determinante einfach formal ausgerechnet wird und die \mathbf{e}_i die kartesischen Basisvektoren sind. Man kann das auch formal mit Hilfe des ε -Tensors (**Levi-Civita**-

Symbol) schreiben:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon^{ijk} x_i y_j \mathbf{e}_k \equiv \varepsilon^{ijk} x_i y_j \mathbf{e}_k \quad (2.67)$$

$$1 = \varepsilon^{123} = \varepsilon^{231} = \varepsilon^{312}, \quad \text{zyklische Vertauschung von 123} \quad (2.68)$$

$$-1 = \varepsilon^{213} = \varepsilon^{132} = \varepsilon^{321}, \quad \text{zyklische Vertauschung von 213} \quad (2.69)$$

$$\varepsilon^{ijk} = 0, \quad \text{sonst.} \quad (2.70)$$

vgl. WIKIPEDIA-Artikel o.ä. Hierbei wurde die **Einsteinsche Summationskonvention** eingeführt: über gemeinsam auftretende Indizes wird summiert, das Summen-Symbol wird dabei weggelassen.

Es gelten Rechenregeln für das Kreuzprodukt (AUFGABE)

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x} \quad (2.71)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \quad \text{bac-cab-Regel.} \quad (2.72)$$

2.5 ANWENDUNG MECHANIK: Eigenschwingungen und Eigenmoden (Normalmoden)

Wir betrachten die Newtonschen Gleichungen für N Massenpunkte mit Masse m_i , die durch lineare Federn miteinander verbunden sind. Der Vektor \mathbf{r}_i (d -dimensionaler Vektor, z.B. $d = 2$ für Bewegung in einer Ebene) bezeichne die Auslenkung der Masse m_i aus ihrer Ruhelage. Die Kraft auf die Masse m_i ist proportional zur Auslenkung aller Massen aus ihrer Ruhelage,

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} \mathbf{r}_j. \quad (2.73)$$

Hierbei ist jedes A_{ij} eine $d \times d$ -Matrix. Das ist ein lineares System mit konstanten Koeffizienten, allerdings von zweiter Ordnung. Man kann es in ein System erster Ordnung umwandeln, einfacher ist aber eine direkte Lösung über einen Exponentialansatz:

2.5.1 Fall $d = 1, N = 2$ (zwei gekoppelte Oszillatoren)

Zwei über Federn gekoppelte Massen m_1 und m_2 auf einer Geraden, Auslenkung aus der Ruhelage x_1 und x_2 . Die Newtonschen Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= A_{11} x_1 + A_{12} x_2 \\ m_2 \ddot{x}_2 &= A_{21} x_1 + A_{22} x_2, \end{aligned} \quad (2.74)$$

die A_{ij} sind hier skalar.

2.5.1.1 Lösung durch Exponentialansatz

Wir setzen

$$x_1(t) = c_1 e^{-i\omega t}, \quad x_2(t) = c_2 e^{-i\omega t} \quad (2.75)$$

in die DGL ein und erhalten

$$\begin{aligned} -m_1 \omega^2 c_1 &= A_{11} c_1 + A_{12} c_2 \\ -m_2 \omega^2 c_2 &= A_{21} c_1 + A_{22} c_2, \end{aligned} \quad (2.76)$$

was wir als

$$(A + M\omega^2)\mathbf{c} = 0, \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

mit dem Koeffizientenvektor \mathbf{c} schreiben. Nichttriviale Lösungen gibt es für

$$\det(A + M\omega^2) = 0. \quad (2.78)$$

Aus dieser Gleichung werden die möglichen Werte für die Winkelfrequenzen ω bestimmt. Es gibt wegen des Quadrats jeweils zwei Wurzeln - diejenigen mit positivem Realteil werden als **Eigenfrequenzen** des Systems bezeichnet. Die zugehörigen Lösungen für den Koeffizientenvektor \mathbf{c} heissen **Eigenmoden (Normalmoden)** des Systems.

2.5.1.2 Ungekoppelte Massenpunkte

In diesem Fall hat man

$$A = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

mit zwei Federkonstanten $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Aus Gl. (2.78) folgt natürlich

$$\begin{vmatrix} -k_1 + m_1 \omega^2 & 0 \\ 0 & -k_2 + m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \rightsquigarrow 0 = (-k_1 + m_1 \omega^2)(-k_2 + m_2 \omega^2), \quad (2.80)$$

also Winkelfrequenzen $\pm\omega_1 = \pm\sqrt{k_1/m_1}$ und $\pm\omega_2 = \pm\sqrt{k_2/m_2}$, d.h. die zwei Eigenfrequenzen, die wie erwartet den Frequenzen der beiden Oszillatoren (die ja unabhängig voneinander sind) entsprechen. Die Koeffizientenvektoren sind

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{zu } \omega_1 \quad (2.81)$$

$$\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{zu } \omega_2. \quad (2.82)$$

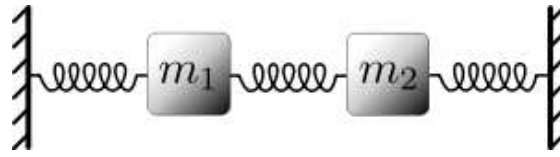


Abbildung 2.3: Normalmoden ©WIKIPEDIA http://en.wikipedia.org/wiki/Normal_mode

2.5.1.3 Gekoppelte Massenpunkte

Jetzt betrachten wir ein spezielles Beispiel zweier gleicher Massen m , die sich auf einer Geraden bewegen (räumliche Dimension $d = 1$) und durch Federn mit gleicher Federkonstante k aneinander und jeweils an eine Wand links und rechts gekoppelt sind (Bild).

Koordinaten x_1 und x_2 von den jeweiligen Ruhelagen der Massen. Kraft auf die erste Masse (Bild)

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1), \quad (2.83)$$

entsprechend Kraft auf die zweite Masse (Bild)

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 + k(x_1 - x_2). \quad (2.84)$$

Das einzig Wichtige ist hier, dass man sich die Vorzeichen genau überlegt (NACHPRÜFEN!). Wir haben also

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -2kx_1 + kx_2 \\ m\ddot{x}_2 &= kx_1 - 2kx_2. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Der Exponentialansatz führt also auf

$$(A + M\omega^2)\mathbf{c} = 0, \quad A = k \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad M = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.86)$$

Die zwei Eigenfrequenzen folgen aus

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A + M\omega^2) \rightsquigarrow (-2k + m\omega^2)^2 - k^2 = 0 \rightsquigarrow -2k + m\omega^2 = \pm k \\ \rightsquigarrow \omega_1^2 &= \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = 3\frac{k}{m}. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Die zwei Normalmoden \mathbf{c} finden wir mit den Eigenvektoren von $A + M\omega^2$ als (NACHRECHNEN!)

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{zu } \omega_1^2, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{zu } \omega_2^2. \quad (2.88)$$

Die allgemeine Lösung hat also die Form

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} [\alpha_+ e^{i\omega_1 t} + \alpha_- e^{-i\omega_1 t}] + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} [\beta_+ e^{i\omega_2 t} + \beta_- e^{-i\omega_2 t}] \quad (2.89)$$

mit vier Koeffizienten $\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}$, die aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden. Für $\beta_{\pm} = 0$ schwingen die Massen *miteinander* in der Normalmode \mathbf{c}_1 mit der Frequenz ω_1 . Für $\alpha_{\pm} = 0$ schwingen die Massen *gegeneinander* in der Normalmode \mathbf{c}_2 mit der um $\sqrt{3}$ höheren Frequenz ω_2 .

Vgl. auch den Artikel ‘normal modes’ in WIKIPEDIA (April 2008).

http://en.wikipedia.org/wiki/Normal_mode

AUFGABE: Betrachte zwei Massen m_1, m_2 , die sich auf einer Geraden bewegen (räumliche Dimension $d = 1$) und durch eine Feder mit Federkonstante k aneinander gekoppelt sind. Die linke Masse sei weiterhin durch eine Feder mit gleicher Federkonstante k an eine Wand links gekoppelt, die rechte Masse sei frei. Bestimme die Eigenfrequenzen und Eigenmoden dieses Systems.

2.5.2 Mehrere ($N > 2$) gekoppelte Oszillatoren

Das funktioniert genauso wie im obigen Fall $N = 2$, nur mit dem Unterschied, dass jetzt die Matrizen A und M größer werden.

AUFGABE: Bestimme die Eigenfrequenzen eines linearen dreiatomigen Molekül-Modells mit zwei Massen m außen, einer Masse m_c innen, und den zwei Federn mit Federkonstanten k . Bestimme die zugehörigen Normalmoden (*-Aufgabe).

2.6 Lineare inhomogene Systeme

Inhomogene lineare Systeme (Dimension n)

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t) \quad (2.90)$$

mit der $n \times n$ -Matrix A können wir jetzt auch leicht lösen. Der homogene Fall $\mathbf{b}(t) \equiv 0$ hatte die Lösung

$$\mathbf{y}(t) = e^{At}\mathbf{y}(t=0) \quad (2.91)$$

mit der Exponentialfunktion der Matrix A , vgl. oben. Wir definieren analog zur DGL 1. Ordnung, Gl. (2.18), eine Lösung des homogenen Falls

$$\mathbf{y}_h(t, t') = e^{A(t-t')}\mathbf{y}_1, \quad e^{A(t-t')} : \text{ Propagator,} \quad (2.92)$$

die die homogene DGL mit der AB $\mathbf{y}_1 = (1, 1, \dots, 1)^T$ zur Zeit $t = t'$ erfüllt. Wenn wir das über die Inhomogenität (‘äußere Kraft’) $\mathbf{b}(t')$ integrieren (Anfangszeit $t = t_0$), erhalten wir wie bei der DGL 1. Ordnung eine spezielle Lösung für den inhomogenen Fall,

$$\mathbf{y}_s(t, t_0) = \int_{t_0}^t dt' e^{A(t-t')}\mathbf{b}(t'), \quad (2.93)$$

denn

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}_s(t, t_0) = e^{A(t-t)}\mathbf{b}(t'=t) + \int_{t_0}^t dt' A e^{A(t-t')}\mathbf{b}(t') = \mathbf{b}(t) + A\mathbf{y}_s(t, t_0). \quad (2.94)$$

Die Gesamtlösung ist wieder eine Linearkombination aus spezieller Lösung $\mathbf{y}_s(t, t_0)$ und der Lösung für den homogenen Fall, d.h.

$$\mathbf{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{y}(t=t_0) + \int_{t_0}^t dt' e^{A(t-t')}\mathbf{b}(t'). \quad (2.95)$$

INTERPRETATION: $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T$ als mehrkomponentige ‘Auslenkung’, die sich als Summe zweier Anteile ergibt: 1. die homogenen Auslenkung $e^{A(t-t_0)}\mathbf{y}(t=t_0)$ ohne äußere Kraft $\mathbf{b}(t')$, bei der einfach die AB $\mathbf{y}(t=t_0)$ frei **propagiert** wird, und 2. die inhomogene Auslenkung $\int_{t_0}^t dt' e^{A(t-t')}\mathbf{b}(t')$, bei der der Einfluß der äußeren Kraft $\mathbf{b}(t')$ zu jedem Zeitpunkt t' zusätzliche Auslenkungen ergeben, die jeweils von t' bis t propagiert werden.

AUFGABE: Lösen Sie mit dieser Methode das Anfangswertproblem für den ungedämpften harmonischen Oszillator mit äußerer Kraft, $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t)$, $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$. Bestimmen Sie hierfür zunächst die Matrix e^{At} und bestimmen Sie dann einen allgemeinen Ausdruck für $x(t)$ für beliebiges $f(t)$.

3. EINFACHE PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN UND FOURIER-ANALYSE

3.1 Die Gleichung der schwingenden Saite (Wellengleichung in einer Dimension)

Dieses ist eine partielle Differentialgleichung (pDGL) für die Auslenkung $u(x, t)$ der Saite als Funktion des Ortes x und der Zeit t ,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t) \quad (3.1)$$

mit der Schallgeschwindigkeit c . Die Saite habe die Länge L und sei fest eingespannt - die pDGL muss deshalb die **Randbedingung**

$$u(x = 0, t) = u(x = L, t) = 0 \quad (3.2)$$

zu allen Zeiten t erfüllen. Zur Zeit $t = 0$ ist die Saite anfänglich ausgelenkt gemäss einem vorgegebenen Profil $u_0(x)$ (z.B. dreieckig, da mit dem Finger in der Mitte hochgezogen), ausserdem hat die Saitenauslenkung an jeder Stelle x eine Anfangsgeschwindigkeit $v_0(x)$,

$$u(x, t = 0) = u_0(x), \quad 1. \text{ Anfangsbedingung} \quad (3.3)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial t}u(x, t) \right|_{t=0} = v_0(x), \quad 2. \text{ Anfangsbedingung.} \quad (3.4)$$

Die **Anfangswertaufgabe** besteht dann in der Lösung der pDGL zu Zeiten $t > 0$, d.h. ausgehend von dem Auslenkungs und Geschwindigkeitsprofil zur Zeit $t = 0$ soll das Profil (die Auslenkung) $u(x, t)$ zu allen Zeiten bestimmt werden. Das Anfangsprofil wird also zu grösseren Zeiten hin ‘propagiert’.

Bemerkungen

- Wie bei der Dynamik von Massenpunkten (Newton) müssen für eine eindeutige Lösung Anfangsauslenkung u und Anfangsgeschwindigkeit \dot{u} überall (für alle x) bekannt sein: ‘Laplacescher Dämon’.
- Es können auch allgemeinere Randbedingung als Gl. (3.2) vorkommen.

3.1.1 Wellengleichung als Kontinuumslimit: gekoppelte Massenpunkten

Wir betrachten die Bewegung von Massen m im gleichen Abstand a auf der x -Achse, die durch masselose Federn mit Federkonstante k gekoppelt sind. Die Bewegungsgleichung für die Auslenkung u_i der i -ten Masse lautet (AUFGABE)

$$m\ddot{u}_i = k(u_{i+1} - u_i) - k(u_i - u_{i-1}). \quad (3.5)$$

Wenn wir die Auslenkung u jetzt als (stetige und differenzierbare) Funktion von x mit kontinuierlichem x anstelle des diskreten i auffassen, haben wir

$$\begin{aligned} u_i &\rightarrow u(x), & u_{i+1} &\rightarrow u(x+a), & u_{i-1} &\rightarrow u(x-a) \\ u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} &\rightarrow u(x+a) - 2u(x) + u(x-a) = a^2 u''(x) + O(a^3), \end{aligned} \quad (3.6)$$

d.h.

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{u(x+a) - 2u(x) + u(x-a)}{a^2} = u''(x). \quad (3.7)$$

Aus den gekoppelten Bewegungsgleichungen der unendlich vielen Oszillatoren wird eine einzige partielle Differentialgleichung,

$$\begin{aligned} \ddot{u}_i &= \frac{ka^2}{m} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{a^2} \\ \rightsquigarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) &= c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), \quad c^2 = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{ka^2}{m}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

wobei sich k und m so verhalten müssen, dass der Limes $c^2 = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{ka^2}{m}$ existiert.

LITERATUR: H. Goldstein, 'Klassische Mechanik'. Ein wichtiges Mechanik-Lehrbuch (Klassiker), wird auch nächstes Semester nützlich sein.

3.1.2 Separationsansatz

Wir lösen die pDGL mit einem Separationsansatz

$$\begin{aligned} u(x, t) &= y(x)z(t) \rightsquigarrow y(x)z''(t) = z(t)c^2 y''(x) \rightsquigarrow \\ \frac{1}{c^2 z(t)} z''(t) &= \frac{1}{y(x)} y''(x) \equiv -k^2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

denn beide Seiten hängen von jeweils unabhängigen Variablen x und t ab, müssen also konstant sein. Die Konstante nennen wir $-k^2$. Beide Gleichungen sind gewöhnliche lineare DGL zweiter Ordnung mit allgemeiner Lösung

$$y(x) = \alpha \cos kx + \beta \sin kx \quad (3.10)$$

$$z(t) = \gamma_1 \cos kct + \gamma_2 \sin kct. \quad (3.11)$$

mit Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2$. Die Konstante k heisst Wellenvektor (hier einkomponentig, da wir in einer Dimension sind).

3.1.2.1 Erfüllung der Randbedingung (RB)

Aus $u(x=0, t) = u(x=L, t) = 0$ folgt $y(0) = y(L) = 0$. Damit

$$y(0) = 0 \rightsquigarrow \alpha = 0 \quad (3.12)$$

$$y(L) = 0 \rightsquigarrow \sin kL = 0 \rightsquigarrow k = k_n \equiv \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad \text{‘Quantisierung’} \quad (3.13)$$

Die zweite RB führt also auf ausschliesslich diskrete Werte k_n für den Wellenvektor k : es handelt sich schliesslich um stehende Wellen. Eine Lösung der pDGL hat jetzt die Form

$$u_n(x, t) = \beta \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) [\gamma_1 \cos k_n ct + \gamma_2 \sin k_n ct] \quad (3.14)$$

3.1.2.2 Superposition von Lösungen

Die Lösung $u_n(x, t)$ hängt von der ganzen Zahl n ab. Wir fassen die Konstanten zusammen ($\beta\gamma_1 \rightarrow a_n, \beta\gamma_2 \rightarrow b_n$) und schreiben

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) [a_n \cos kct + b_n \sin kct]. \quad (3.15)$$

Wegen der Linearität der pDGL ist eine Linearkombination von Lösungen wieder eine Lösung. Allgemein können wir eine solche Superposition also als

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) [a_n \cos kct + b_n \sin kct] \quad (3.16)$$

schreiben. Die Koeffizienten a_n und b_n werden jetzt aus den Anfangsbedingungen bestimmt.

3.1.3 Erfüllung der Anfangsbedingungen

Aus $u(x, t=0) = u_0(x)$ und $\frac{\partial}{\partial t}u(x, t)|_{t=0} = v_0(x)$ folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = u_0(x) \quad (3.17)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} kcb_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = v_0(x). \quad (3.18)$$

Hierbei sind die Funktionen $u_0(x)$ und $v_0(x)$ vorgegeben und die Koeffizienten a_n und b_n noch zu bestimmen.

BEISPIEL:

$$\begin{aligned} v_0(x) &\equiv 0 \rightsquigarrow b_n = 0 \\ u_0(x) &= \gamma \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \rightsquigarrow a_1 = 0, a_2 = \gamma, a_3 = 0, a_4 = 0, \dots \end{aligned} \quad (3.19)$$

Für ein allgemeine Anfangsbedingung benutzt man Fourier-Reihen. Die Darstellung

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (3.20)$$

einer Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[0, L]$ heisst **Fourier-Sinus-Reihe**. Ist $f(x)$ gegeben, so lassen sich die a_n folgendermassen bestimmen: wir multiplizieren und integrieren die Gleichung,

$$\int_0^L dx f(x) \sin\left(\frac{n'\pi}{L}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^L dx \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n'\pi}{L}x\right) \quad (3.21)$$

und benutzen

$$\int_0^L dx \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n'\pi}{L}x\right) = \frac{L}{2} \delta_{n,n'} \quad (3.22)$$

(AUFGABE), wobei

$$\delta_{n,n'} = \begin{cases} 1, & n = n' \\ 0, & n \neq n' \end{cases}, \quad \text{Kronecker-Symbol.} \quad (3.23)$$

Damit hat man einen expliziten Ausdruck für a_n ,

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (3.24)$$

(entsprechend für b_n) und damit die vollständige Lösung der pDGL, die korrekt die RB und AB erfüllt.

AUFGABE: Löse die Wellengleichung $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$ auf dem Intervall $[0, L]$ mit Randbedingung (RB) $u(x=0, t) = u(x=L, t) = 0$ und Anfangsbedingung (AB) $\frac{\partial}{\partial t} u(x, t)|_{t=0} = 0$ und $u(x, t=0) = u_0(x)$, wobei $u_0(x)$ eine ‘Dreiecks’-Gestalt mit Maximum $u_0(L/2) = u_m$ habe.

Zusatzaufgabe: Plot der Lösung $u(x, t)$ für verschiedene, feste Zeiten t . Animation in MATHEMATICA.

3.2 Fourier-Analyse

Jetzt diskutieren wir Fourier-Reihen etwas allgemeiner. LITERATUR: Forster, Analysis I. Als Visualisierung weiterhin web-animationen:

z.B. wikipedia ‘Fourier series’; <http://www.falstad.com/fourier/> (05/2008).

3.2.1 Definitionen

Definition Fourier-Reihen einer Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[-L, L]$ sind definiert als unendliche Reihe der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right). \quad (3.25)$$

mit reellen Koeffizienten a_n, b_n . Man bezeichnet diese Darstellung von $f(x)$ auch als Entwicklung nach stehenden Wellen. Die so definierte Funktion ist periodisch, $f(x) = f(x + 2L)$.

Allgemeiner definiert man die komplexe Fourier-Reihen einer periodischen Funktion $f(x) = f(x + 2L)$ auf dem Intervall $[-L, L]$ als

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi}{L} x}. \quad (3.26)$$

mit komplexen Koeffizienten c_n .

Man bezeichnet diese Darstellung von $f(x)$ dann als Entwicklung nach ebenen (laufenden) Wellen.

Die **Fourier-Koeffizienten** dieser Entwicklung bestimmt man durch Integration,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (3.27)$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx f(x) e^{-i \frac{n\pi}{L} x}. \quad (3.28)$$

Das folgt, indem man die Reihen jeweils mit $\cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$, $\sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$ bzw. $e^{-i \frac{n\pi}{L} x}$ multipliziert und integriert unter Benutzung von (NACHRECHNEN!)

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L dx \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L} x\right) = \delta_{nm} \quad (3.29)$$

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L dx \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) = \delta_{nm} \quad (3.30)$$

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L dx \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) = 0 \quad (3.31)$$

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx e^{i \frac{(n-m)\pi}{L} x} = \delta_{nm}. \quad (3.32)$$

AUFGABE:

1. Entwicklung der periodischen Sprungfunktion $f(-L < x < 0) = -1$, $f(0 < x < L) = 1$ in a) eine komplexe Fourierreihe, b) eine sin-cos-Fourier-Reihe

2. Entwicklung der periodischen Funktion $f(0 < x < 2\pi) = x^2$ mit Periode 2π in eine Fourierreihe. Berechnung von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hiermit.

3.2.2 Halbintervallige Fourier-Reihen (Sinus und Cosinus)

Die Funktion $f(x)$ ist hier auf dem Intervall $(0, L)$ definiert (im Gegensatz zu $(-L, L)$), und zwar mittels

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \text{halbintervallige Sinus-Reihe} \quad (3.33)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (3.34)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \text{halbintervallige Cosinus-Reihe} \quad (3.35)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (3.36)$$

Den Fall $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ hatten wir z.B. bei der Lösung der Wellengleichung oben benutzt (die Koeffizienten hießen dort a_n).

3.2.3 Vektorraum der Periodischen Funktionen

Periodische, komplexwertige Funktion f mit $f(x) = f(x + 2L)$ auf dem Intervall $[-L, L]$ bilden einen **Vektorraum** \mathcal{H} (Hilbertraum, wird später in der Quantenmechanik sehr wichtig). Eine Basis dieses Vektorraum sind die Funktionen

$$e_n : R \rightarrow C, \quad e_n(x) \equiv e^{i\frac{n\pi}{L}x}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.37)$$

Da es unendlich viele n gibt, ist diese Basis und damit der Vektorraum unendlichdimensional. Analogie zu gewöhnlichen Vektoren \mathbf{y} im C^d :

- Vektoren \mathbf{y} im C^d

$$\mathbf{y} = \sum_{n=1}^d c_n \mathbf{e}_n, \quad \text{Basisdarstellung} \quad (3.38)$$

$$c_n = (\mathbf{e}_n, \mathbf{y}) \equiv \sum_{i=1}^d (\mathbf{e}_n)_i^* y_i, \quad \text{Skalarprodukt} \quad (3.39)$$

$$(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m) = \sum_{i=1}^d \delta_{in} \delta_{im} = \delta_{nm}, \quad \text{Orthonormalbasis} . \quad (3.40)$$

- Vektoren (Funktionen) f in \mathcal{H} : Funktionen f (nicht ihre Funktionswerte) werden als abstrakte Objekte, d.h. Vektoren aufgefasst. Die Fourier-Koeffizienten c_n ent-

sprechen den Komponenten des Vektors in einer Orthonormalbasis.

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n, \quad \text{Basisdarstellung} \quad (3.41)$$

$$c_n = (e_n, f) \equiv \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx e_n^*(x) f(x), \quad \text{Skalarprodukt} \quad (3.42)$$

$$(e_n, e_m) = \delta_{nm}, \quad \text{Orthonormalbasis} . \quad (3.43)$$

3.2.4 Konvergenz der Fourierreihe

Endliche Fourierreihen

$$f_N : R \rightarrow C, \quad f_N(x) \equiv \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x}, \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx f(x) e^{-i\frac{n\pi}{L}x} \quad (3.44)$$

konvergieren im Allgemeinen nicht punktweise (für jedes x) gegen die Funktion $f(x)$, sondern nur im **quadratischen Mittel**:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\| = 0, \quad (3.45)$$

wobei der Abstand (Norm) zwischen f und f_N durch das Skalarprodukt gegeben ist,

$$\|f - f_N\|^2 \equiv (f - f_N, f - f_N) \equiv \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx |f(x) - f_N(x)|^2. \quad (3.46)$$

Beispiel: Gibbsches Phänomen (web-animation) an Sprungstellen.

AUFGABE: Man beweise die **Parsevalsche Gleichung (Vollständigkeitsrelation)** für die komplexen Fourier-Reihen periodischer, integrierbarer Funktionen f auf $[-L, L]$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx |f(x)|^2 \quad (3.47)$$

3.3 Die Diffusionsgleichung in einer Dimension

Dieses ist eine partielle Differentialgleichung (pDGL) für die Konzentration $n(x, t)$ einer Substanz als Funktion des Ortes x und der Zeit t ,

$$\frac{\partial}{\partial t} n(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x, t) \quad (3.48)$$

mit der Diffusionskonstanten D .

Die Diffusionsgleichung muss häufig **Randbedingungen** erfüllen, z.B.

$$n(x = 0, t) = n(x = L, t) = 0. \quad (3.49)$$

Es kann auch die Stromdichte an den Rändern vorgegeben sein, z.B.

$$j(x=0, t) = j_0, \quad j(x=L, t) = j_L. \quad (3.50)$$

Im Gegensatz zur Wellengleichung ist die Diffusionsgleichung von *erster* Ordnung in der zeitlichen Ableitung. Deshalb gibt es nur *eine* Anfangsbedingung (AB) der Form

$$n(x, t=0) = n_0(x), \quad \text{Anfangsbedingung.} \quad (3.51)$$

3.3.1 Herleitung der Diffusionsgleichung in einer Dimension

Diffusionsstrom mit Stromdichte $j(x, t)$ fließt in Richtung des stärksten Konzentrationsgefälles,

$$j(x, t) = -D \frac{\partial}{\partial x} n(x, t), \quad \text{1. Fick'sches Gesetz.} \quad (3.52)$$

Ausserdem hat man

$$\frac{\partial}{\partial t} n(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} j(x, t), \quad \text{Kontinuitätsgleichung (1 Dimension),} \quad (3.53)$$

die aus der Erhaltung der Masse folgt.

AUFGABE: Kontinuitätsgleichung (1 Dimension) durch Betrachten des Teilchenflusses durch einen Querschnitt der Fläche A senkrecht zum Fluß.

Differenzieren des 1. Fick'sches Gesetzes nach x gibt die Diffusionsgleichung.

3.3.2 Lösung der Diffusionsgleichung

Wie bei der Wellengleichung erfolgt zunächst eine Trennung der Variablen (Separationsansatz),

$$\begin{aligned} n(x, t) &= y(x)z(t) \rightsquigarrow y(x)z'(t) = z(t)Dy''(x) \rightsquigarrow \\ \frac{1}{Dz(t)}z'(t) &= \frac{1}{y(x)}y''(x) \equiv -k^2, \end{aligned} \quad (3.54)$$

denn beide Seiten hängen von jeweils unabhängigen Variablen x und t ab, müssen also konstant sein. Die Konstante nennen wir $-k^2$. Beide Gleichungen sind gewöhnliche lineare DGL mit allgemeiner Lösung

$$y(x) = \alpha \cos kx + \beta \sin kx \quad (3.55)$$

$$z(t) = e^{-Dk^2t} \quad (3.56)$$

Die Konstante k heisst Wellenvektor (hier einkomponentig, da wir in einer Dimension sind). Die Randbedingungen z.B. für Stromdichte Null (es strömt nichts hinein oder hinaus) lauten

$$j(x=0, t) = j(x=L, t) = 0 \rightsquigarrow \beta = 0, \quad k = k_n = n\pi/L. \quad (3.57)$$

Wir überlagern diese Lösungen als Fourier-Reihe, um die Anfangsbedingung zu erfüllen,

AUFGABE: Formuliere die allgemeine Lösung der Diffusionsgleichung $\frac{\partial}{\partial t} n(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x, t)$ mit RB $j(x=0, t) = j(x=L, t) = 0$ und AB $n(x, t=0) = n_0(x)$.

3.4 Unendliches Intervall: von Fourier-Reihen zur Fourier-Transformation

3.4.1 Motivation

In Fourier-Reihen für Lösungen der Diffusionsgleichung auf $[0, L]$,

$$n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-Dk_n^2 t} [a_n \cos k_n x + b_n \sin k_n x], \quad k_n = n\pi/L, \quad (3.58)$$

fragen wir, was für $L \rightarrow \infty$ passiert. Wir schreiben zunächst alles als komplexe Fourier-Reihe,

$$n(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-Dk_n^2 t} e^{ik_n x} \quad (3.59)$$

mit komplexen Koeffizienten c_n .

Allgemein kann man in der Fourier-Entwicklung einer periodischen Funktion $n(x) = n(x + 2L)$ auf dem Intervall $[-L, L]$,

$$n(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x}, \quad (3.60)$$

fragen, was für $L \rightarrow \infty$ passiert. Heuristisch gilt folgendes: wir betrachten das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(k) dk = \lim_{L, N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{2\pi}{2L} f(k_n), \quad k_n = n\pi/L, \quad \text{Riemann-Summe} \quad (3.61)$$

Hierbei ist $\frac{2\pi}{2L} \equiv \Delta k$ die Feinheit der Unterteilung der Riemann-Summe, die das Integral für $L, N \rightarrow \infty$ immer besser approximiert. Wir haben also den **Übergang von der diskreten Summe im k -Raum zum Integral**,

$$\lim_{L, N \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \sum_{n=-N}^N f(n\pi/L) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) dk, \quad (3.62)$$

eine wichtige und in verschiedenen Gebieten (Quantenphysik, Festkörpertheorie, Strahlungstheorie,...) oft benutzte Formel. Beachte: Die Länge $2L$ des Intervalls geht im Vorfaktor im Limes $L \rightarrow \infty$ in den Faktor 2π über. In den Fourierreihen haben wir nun entsprechend den Übergang für $L \rightarrow \infty$,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-L}^L dx' f(x') e^{-i\frac{n\pi}{L}x'} \right) e^{i\frac{n\pi}{L}x} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') e^{-ikx'} \right) e^{ikx} \\ &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Hierbei ist also der Koeffizient c_n mit diskretem Index n in den Koeffizienten $\tilde{f}(k)$ mit kontinuierlichem Index k übergegangen. Beachte, dass wir im Integral, welches $\tilde{f}(k)$ definiert, x' als Integrationsvariable benutzten, da x bereits als Buchstabe vergeben ist.

Definition

$$\tilde{f}(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx}, \quad \text{Fourier-Transformierte von } f(x) \quad (3.65)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx}, \quad \text{Fourier-Darstellung} \quad (3.66)$$

- Man bezeichnet die Fourier-Transformierte $\tilde{f}(k)$ von $f(x)$ manchmal auch als Fourier-Hintransformation und die Darstellung von $f(x)$ mittels $\tilde{f}(k)$ als Fourier-Rücktransformation.
- Beachte die Aufteilung des Faktors $1/2\pi$: in der Physik wird das meist so wie oben (unsymmetrisch) definiert. In der Mathematik definiert man das meist symmetrisch mit zwei Faktoren $1/\sqrt{2\pi}$.
- Ebenfalls beachte (und memoriere) man die Vorzeichen $\mp ikx$ bei Hin- und Rücktransformation.
- Selbstverständlich haben wir hier überhaupt nicht über Konvergenz- und Existenzfragen gesprochen (LITERATUR: Forster, Analysis III).

3.4.2 Orts- und Impulsraum (k -Raum), Zeit-Domäne und Frequenzraum

Ein in der Physik häufige Bezeichnung: Eine Funktion $f(x)$ sei im Ortsraum definiert, d.h. x sei eine Ortsvariable. Dann bezeichnet man

$$f(x) \quad , \quad \text{Darstellung von } f \text{ im Ortsraum} \quad (3.67)$$

$$\tilde{f}(k) \quad , \quad \text{Darstellung von } f \text{ im Impulsraum } (k\text{-Raum}) \quad (3.68)$$

Beide Darstellungen sind äquivalent, da sie ja Fouriertransformierte (FT) voneinander sind. Die Bezeichnung *Impulsraum* kommt aus der de-Broglie-Beziehung $p = \hbar k$ der Quantenmechanik mit $\hbar \equiv h/2\pi$ und dem Planck'schen Wirkungsquantum h . Wenn es nicht um Quantenmechanik geht, spricht man besser vom k -Raum oder dem **Raum der Wellenvektoren**.

Analog definiert man die FT einer Funktion $f(t)$ der Zeit,

$$\tilde{f}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega t}, \quad \text{Fourier-Transformierte von } f(t) \quad (3.69)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t}, \quad \text{Fourier-Darstellung} \quad (3.70)$$

Hierbei sind die Vorzeichen im Exponenten der FT im Vergleich zur FT vom Orts in den Impulsraum genau anders herum (Konvention). Man bezeichnet

$$f(t) \quad , \quad \text{Darstellung von } f \text{ in der Zeit-Domäne} \quad (3.71)$$

$$\tilde{f}(\omega) \quad , \quad \text{Darstellung von } f \text{ im Frequenzraum.} \quad (3.72)$$

Wiederum sind beide Darstellungen äquivalent. Manchmal spricht man auch von Originalbereich (z.B. $f(t)$) und Bildbereich (z.B. $\tilde{f}(\omega)$).

Häufig hat man auch *Fouriertransformationen in zwei Variablen*, z.B. Ort und Zeit:

$$\tilde{u}(k, \omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dt u(x, t) e^{i(\omega t - kx)}, \quad \text{Fourier-Transformierte von } u(x, t) \quad (3.73)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk d\omega \tilde{u}(k, \omega) e^{-i(\omega t - kx)}, \quad \text{Fourier-Darstellung.} \quad (3.74)$$

Jetzt sehen wir auch den Sinn der Vorzeichen-Konvention: in der Fourier-Darstellung haben wir zeitabhängige ebene Wellen $e^{-i(\omega t - kx)}$!

3.4.3 Fouriertransformation: Beispiel Gauß-Funktion

Die Gauß-Funktion ist definiert als eine Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x)$,

$$p(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma > 0, \quad (3.75)$$

z.B. für das Auffinden eines Teilchens am Ort x . Hierbei ist

$$p(x) dx \quad (3.76)$$

die Wahrscheinlichkeit, das Teilchens im Intervall $[x, x + dx]$ zu finden. Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) = 1, \quad \text{Normierung} \quad (3.77)$$

was mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2 + bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}, \quad a > 0 \quad (3.78)$$

gezeigt werden kann.

AUFGABE: Beweise diese Formel unter Ausnutzung von $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.

Wir berechnen für $x_0 = 0$ (Mittelwert Null) die Fouriertransformierte von $p(x)$ (AUFGABE)

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \rightsquigarrow \tilde{p}(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) e^{-ikx} = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 k^2}. \quad (3.79)$$

Die Fouriertransformierte einer Gauß-Funktion ist also bis auf den Vorfaktor wieder eine Gauß-Funktion.

- Breite Gauß-Funktion $p(x)$ im Ortsraum, d.h. große $\sigma \rightsquigarrow$ schmale Fouriertransformierte $\tilde{p}(k)$ im k -Raum.
- Schmale Gauß-Funktion $p(x)$ im Ortsraum, d.h. kleine $\sigma \rightsquigarrow$ breite Fouriertransformierte $\tilde{p}(k)$ im k -Raum.

Je schärfer die Verteilung $p(x)$ im Ortsraum, desto unschärfer (breiter) wird sie im k -Raum. Umgekehrt: je unschärfer die Verteilung $p(x)$ im Ortsraum, desto schärfer (schmäler) wird sie im k -Raum.

AUFGABE: Berechne die Fouriertransformierte der Kastenfunktion $f(-a \leq x \leq a) = 1$, $f(|x| > a) = 0$, $a > 0$, und diskutiere das Ergebnis.

3.4.4 Die Delta-Distribution

LITERATUR: Forster, Analysis III. Im Grenzfall verschwindender Breite σ der Gauß-Funktion definiert man zunächst heuristisch

$$\delta(x - x_0) \equiv \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}, \quad (\text{Dirac}) \text{ Delta-Distribution} \quad (3.80)$$

in dem Sinne, dass bei Integration über 'gutartige' Funktionen $f(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) f(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} f(x) = f(x_0) \quad (3.81)$$

gilt. Diese Operation ist ein Funktional (einer Funktion f wird ein Wert $f(x_0)$ zugeordnet), aus historischen Gründen spricht man in der Physik aber von der (Dirac'schen) *Delta-Funktion*. Die Darstellung Gl. (3.80) ist nicht die einzige: es gilt z.B. auch

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ik(x-x_0)}. \quad (3.82)$$

AUFGABE: Beweis von Gl. (3.82) mittels der Definition der Fouriertransformation einer Funktion $f(x)$.

3.4.5 Einige Eigenschaften der Fourier-Transformation

LITERATUR: BRONSTEIN. FORSTER. Analysis III.

Wir betrachten eine Funktion $f(t)$ und bezeichnen ihre FT mit Hilfe des Operators (Abbildung) $\mathcal{F} : f \rightarrow \tilde{f}$,

$$\mathcal{F}[f](\omega) \equiv \tilde{f}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega t}. \quad (3.83)$$

Es gilt (AUFGABE)

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{F}[f] + \beta \mathcal{F}[g], \quad \text{Linearität.} \quad (3.84)$$

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = -i\omega \mathcal{F}[f](\omega), \quad \text{Differentiation im Originalbereich.} \quad (3.85)$$

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)](\omega) = e^{i\omega t_0} \mathcal{F}[f(t)](\omega), \quad \text{Verschiebungssatz.} \quad (3.86)$$

Häufig hat man es z.B. in der Signalverarbeitung mit sogenannten **Faltungsintegralen** zu tun,

$$(f_1 * f_2)(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f_1(\tau) f_2(t - \tau), \quad \text{Faltungsintegral.} \quad (3.87)$$

So kann $f_1(t)$ z.B. das Originalsignal darstellen, das aber durch eine Apparatur noch zeitverzögert und verändert wird, was durch die Integration über f_2 zum Ausdruck kommt. Weitere physikalische Anwendungen solcher Faltungsintegrale sind Systeme, die mit einer Umgebung zeitverzögert wechselwirken, z.B. dissipative Systeme (mikroskopische Modelle für Reibung).

Für die FT von Faltungsintegralen gilt der wichtige **Faltungssatz** (Beweis als AUFGABE)

$$\mathcal{F}[f_1 * f_2] = \mathcal{F}[f_1]\mathcal{F}[f_2] \quad (3.88)$$

Die Faltung im Originalbereich wird also zu einem gewöhnlichen Produkt im Bildbereich.

3.4.6 Lösung von pDGL mit Fouriertransformation

Wir lösen die Diffusionsgleichung in einer Dimension als Anfangswertproblem

$$\frac{\partial}{\partial t} n(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x, t), \quad n(x, 0) = n_0(x) \quad (3.89)$$

durch Fouriertransformation,

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{n}(k, t) e^{ikx} = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{n}(k, t) e^{ikx} \quad (3.90)$$

Vertauschen von Differentiation und Integration führt einfach auf

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[\frac{\partial}{\partial t} \tilde{n}(k, t) + Dk^2 \tilde{n}(k, t) \right] e^{ikx}. \quad (3.91)$$

Das diese Gleichung für alle x gelten muß, folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{n}(k, t) + Dk^2 \tilde{n}(k, t) = 0 \quad (3.92)$$

$$\rightsquigarrow \tilde{n}(k, t) = \tilde{n}(k, t=0) e^{-Dk^2 t} = \tilde{n}_0(k) e^{-Dk^2 t}. \quad (3.93)$$

Für gegebenes Anfangsprofil $n_0(x)$ wird $\tilde{n}_0(k)$ durch FT berechnet und dann mittels Fourier-Rücktransformation $n(x, t)$.

AUFGABE: Löse die Diffusionsgleichung in einer Dimension auf $(-\infty, \infty)$, Gl. (3.89), für $n_0(x) = \frac{\bar{n}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$ mit reellem x_0 und \bar{n} . Interpretiere das Ergebnis physikalisch.

3.4.7 ANWENDUNG QUANTENMECHANIK: Lösung der Schrödingergleichung

Die Schrödingergleichung eines freien Teilchens der Masse m , das sich in einer Dimension bewegt, lautet

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t), \quad \Psi(x, 0) = \Psi_0(x). \quad (3.94)$$

Hierbei ist $\Psi(x, t)$ die **Wellenfunktion** des Teilchens, und

$$|\Psi(x, t)|^2 dx \equiv p(x, t) dx \quad (3.95)$$

ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Intervall $[x, x + dx]$ zu finden.

Wie bei der Diffusionsgleichung können wir diese Gleichung wieder durch Separationsansatz und mittels Fourier-Reihen auf einem endlichen Intervall lösen. Auf dem unendlichen Intervall $(-\infty, \infty)$ geht das am einfachsten durch Fouriertransformation.

AUFGABE: Löse die Schrödingergleichung in einer Dimension auf $(-\infty, \infty)$ für ein gegebenes $\Psi_0(x)$. Interpretiere das Ergebnis physikalisch.

4. KURVEN UND KRUMMLINIGE KOORDINATEN

Wiederum ausgehend von der Newtonschen Mechanik von Massenpunkten, kann man einen grossen Teil der Differentialgeometrie (Kurven, Flächen, Ableitungen etc.) physikalisch anschaulich erklären.

4.1 Kurven und Kinematik eines Massenpunktes

Eine Kurve im R^d ist eine stetige Abbildung $t \rightarrow \mathbf{r}(t)$, also eine einparametrische Schar von Vektoren, wobei t in der Physik meistens ein Zeitparameter ist. Meist fordert man auch Differenzierbarkeit.

Zwei Gesichtspunkte:

1. Kurven als rein geometrische Objekte (Beispiel: Modell für DNA-Doppelhelix).
2. Kurven als Trajektorien von Massepunkten (Testmassen), die sich in Kraftfeldern bewegen.

4.1.1 Bahn eines Massenpunktes. Geschwindigkeit, Beschleunigung

$\mathbf{r}(t)$ sei der Ort eines Massenpunktes zur Zeit t . Beispiele:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos \omega t \\ b \sin \omega t \end{pmatrix}, \quad \text{Ellipse in } d = 2. \quad (4.1)$$

Kurven können sich schneiden, z.B.

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t^3 - t \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

oder Spitzen haben, z.B.

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, \quad \text{Neilsche Parabel}, \quad (4.3)$$

(Skizzen), vgl. FORSTER, Analysis II.

Geschwindigkeit und Beschleunigung sind einfach die Ableitungen

$$\mathbf{v}(t) \equiv \dot{\mathbf{r}}(t), \quad \text{Geschwindigkeit} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{a}(t) \equiv \ddot{\mathbf{r}}(t), \quad \text{Beschleunigung} . \quad (4.5)$$

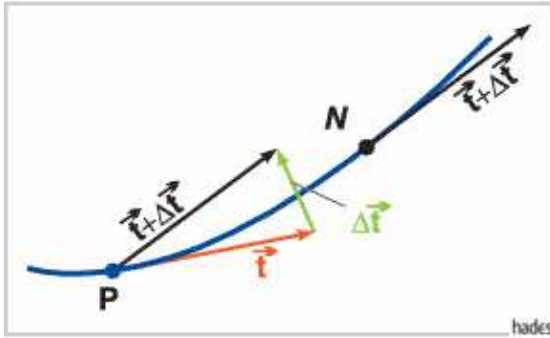


Abbildung 4.1: Krümmung. ©Verlag Harri Deutsch (Bronstein, Taschenbuch der Mathematik 6. Auflage 2006.)

Der Vektor $\mathbf{v}(t)$ ist der Tangentialvektor an die Kurve im Punkt $\mathbf{r}(t)$ (Skizze).

Beispiel

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

4.1.2 Die Bogenlänge s

Es stellt sich als zweckmässig heraus, Kurven durch die Bogenlänge s zu parametrisieren. Die Länge eines Kurvenstückes berechnet man durch Integration der infinitesimalen Beträge von

$$ds \equiv |d\mathbf{r}| = |\mathbf{v}|dt \rightsquigarrow s(t; t_0) = \int_{t_0}^t dt' |\mathbf{v}(t')|. \quad (4.7)$$

Wir nehmen jetzt die Bogenlänge s statt der Zeit t als Kurvenparameter, d.h. wir beschreiben die Kurve als

$$\tilde{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{r}(t(s)). \quad (4.8)$$

Ableiten nach s ergibt

$$\mathbf{t}(s) \equiv \frac{d}{ds} \tilde{\mathbf{r}}(s) = \left(\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) \right) \frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{v}(t(s))}{|\mathbf{v}(t(s))|}, \quad (4.9)$$

wobei man hier ebenfalls zur Unterscheidung $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{v}(t(s))$ eigentlich andere Symbole (Tilde) benutzen müsste - wir lassen die Tilde aber im Folgenden der Übersichtlichkeit halber weg. Der Tangentialvektor $\mathbf{t}(s)$ ist also einfach der Einheits-Geschwindigkeitsvektor in Parametrisierung mit der Bogenlänge s .

Jetzt definiert man weiter

$$\mathbf{n}(s) = \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} / \left| \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} \right|, \quad \text{Normalenvektor} \quad (4.10)$$

Dieser steht senkrecht auf dem Tangentialvektor $\mathbf{t}(s)$, denn

$$1 = \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) \rightsquigarrow 0 = \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} \cdot \mathbf{t}(s). \quad (4.11)$$

Der Betrag $K \equiv \left| \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} \right|$ gibt die Abweichung von einer Geraden an und wird als Krümmung der Kurve im Punkt $\tilde{\mathbf{r}}(s)$,

$$K \equiv \lim_{PN \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \mathbf{t}}{PN} \right| = \left| \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} \right| = \left| \frac{d^2 \mathbf{r}(s)}{ds^2} \right|, \quad \text{Krümmung}, \quad (4.12)$$

definiert, vgl. die Skizze. Beachte: das ist der Betrag der zweiten Ableitung von \mathbf{r} in der Bogenlängen-Parametrisierung, nicht $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$. Man definiert weiterhin

$$R \equiv \frac{1}{K}, \quad \text{Krümmungsradius}. \quad (4.13)$$

Beachte: K ist i.A. an jedem Punkt der Kurve verschieden, also eine Funktion von t bzw. s . Die Krümmung erhalten wir direkt aus (AUFGABE)

$$K = \left| \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} \right| = \frac{\mathbf{v}^2 \mathbf{a}^2 - (\mathbf{v}\mathbf{a})^2}{\mathbf{v}^6}. \quad (4.14)$$

Die Geschwindigkeit und Beschleunigung lassen sich mittels der lokalen Einheitsvektoren \mathbf{t} und \mathbf{n} an der Kurve ausdrücken:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{d\tilde{\mathbf{r}}(s)}{ds} \frac{ds}{dt} = v(t)\mathbf{t}(s(t)) \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[v(t)\mathbf{t}(s(t))] = \dot{v}(t)\mathbf{t}(s(t)) + v(t)\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} \frac{ds}{dt} \\ &= \dot{v}(t)\mathbf{t}(s(t)) + \frac{v^2(t)}{R}\mathbf{n}(s(t)). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Die **Geschwindigkeit** ist also einfach der Tangentialvektor \mathbf{t} multipliziert mit dem Betrag $v(t)$. Die **Beschleunigung** hat eine tangentielle Komponente mit Betrag $\dot{v}(t)$ (**Tangentialbeschleunigung**) und eine Komponente in Normalenrichtung senkrecht dazu mit Betrag $\frac{v^2(t)}{R}$ (**Zentripetalbeschleunigung**).

4.1.3 Begleitendes Dreibein

Wir können den normierten Tangentialvektor und Normalenvektor an einem Punkt der Kurve direkt in der Zeitparametrisierung berechnen,

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} \equiv \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)}, \quad \mathbf{n}(t) = \frac{\frac{d}{dt}\mathbf{t}(t)}{\left| \frac{d}{dt}\mathbf{t}(t) \right|}. \quad (4.17)$$

Alles ist konsistent mit der obigen Herleitung in der Parametrisierung durch die Bogenlänge s :

$$\mathbf{v}(t) = v(t)\mathbf{t}(t) \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \frac{d}{dt}[v(t)\mathbf{t}(t)] = \dot{v}(t)\mathbf{t}(t) + v(t)\frac{d\mathbf{t}(t)}{dt} = \dot{v}(t)\mathbf{t}(t) + v(t)\left|\frac{d}{dt}\mathbf{t}(t)\right|\mathbf{n}(t) \\ &= \dot{v}(t)\mathbf{t}(t) + \frac{v^2(t)}{R}\mathbf{n}(t), \end{aligned} \quad (4.19)$$

denn

$$\frac{d}{dt}\mathbf{t}(t) = \frac{d}{ds}\mathbf{t}(s)\frac{ds}{dt} \rightsquigarrow \left|\frac{d}{dt}\mathbf{t}(t)\right| = Kv(t) = \frac{v(t)}{R}, \quad (4.20)$$

und wir erhalten die gleichen Ausdrücke wie in Gl. (4.16).

Wir definieren für $d = 3$ ein **lokales Dreibein**

$$\mathbf{t}, \quad \mathbf{n}, \quad \mathbf{b} \equiv \mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad (4.21)$$

an jedem Punkt der Kurve. Dabei heisst der Vektor \mathbf{b} **Binormalenvektor**, wobei das Vektorprodukt zweier Vektoren nur im R^3 definiert wird. Wir berechnen die Ableitung von $\mathbf{b}(s)$ in Bogenlängen-Parametrisierung,

$$\frac{d\mathbf{b}(s)}{ds} = \dot{\mathbf{t}}(s) \times \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \times \dot{\mathbf{n}}(s) = \mathbf{t}(s) \times \dot{\mathbf{n}}(s), \quad (4.22)$$

denn $\dot{\mathbf{t}}(s) \propto \mathbf{n}$. Es gilt also

$$\dot{\mathbf{b}}(s) \perp \mathbf{b}(s), \mathbf{t}(s) \rightsquigarrow \dot{\mathbf{b}}(s) = -\tau\mathbf{n}(s), \quad (4.23)$$

d.h. $\dot{\mathbf{b}}(s)$ zeigt in Richtung des Normalenvektors, und der zugehörige Vorfaktor τ wir als **Torsion** bezeichnet. Die Torsion ist ein Maß für die Schraubung der Raumkurve aus der von \mathbf{t} und \mathbf{n} aufgespannten Ebene.

AUFGABE: Wiederholung Vektorprodukt. Determinanten-Formel.

AUFGABE: Zeigen Sie für drei Vektoren (Bronstein 3.5.1.4. S. 190) die ‘bac-cab’-Formel

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (4.24)$$

AUFGABE: Zeigen Sie für den Binormalenvektor \mathbf{b} und den Normalenvektor \mathbf{n} den Zusammenhang mit Geschwindigkeit \mathbf{v} und Beschleunigung \mathbf{a} ,

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|} \quad (4.25)$$

$$\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{v}}{|(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{v}|}. \quad (4.26)$$

AUFGABE: Leiten Sie in den **Frenetschen Formeln**

$$\dot{\mathbf{t}}(s) = K\mathbf{n}(s) \quad (4.27)$$

$$\dot{\mathbf{n}}(s) = -K\mathbf{t}(s) + \tau\mathbf{b}(s) \quad (4.28)$$

$$\dot{\mathbf{b}}(s) = -\tau\mathbf{n}(s) \quad (4.29)$$

die Gleichung für $\dot{\mathbf{n}}(s)$ her. Krümmung K und Torsion τ bestimmen also die Richtungsänderung der Einheitsvektoren des begleitenden Dreibeins beim 'Entlangfahren' auf der Kurve.

Web-Animationen und Info (Stand März 2008)

http://www.iag.uni-hannover.de/greite/ingSS07/dateien/maple/MI_7_4.html

<http://www.ottmarlabonde.de/L1/Schmiegeebene.html>

http://de.wikipedia.org/wiki/Frenetsche_Formeln

4.2 Krummlinige Koordinaten

Wie führen zunächst die Begriffe 'kovariante und kontravariante Basis und Koordinaten' ein, um auch für später Differentialoperationen in krummlinigen Koordinaten vorzubereiten.

4.2.1 Kovariante und kontravariante Basis

LITERATUR: E. Klingbeil, 'Tensorrechnung für Ingenieure'.

Sei \mathbf{g}_i , $i = 1, \dots, n$ eine Basis des R^n . Wir konstruieren eine zweite Basis mit *Indizes oben*, \mathbf{g}^i , $i = 1, \dots, n$ so dass die Skalarprodukte

$$\mathbf{g}_i \mathbf{g}^j = \delta_i^j \quad (4.30)$$

erfüllen, wobei wir auch im Kronecker-Delta einen der Indizes oben schreiben. Wir führen Bezeichnungen ein,

$$\mathbf{g}_i \quad , \quad \text{kovariante Basis} \quad (4.31)$$

$$\mathbf{g}^i \quad , \quad \text{kontravariante Basis.} \quad (4.32)$$

Weiterhin definieren wir die Matrix der Skalarprodukte

$$g_{ij} \equiv \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j, \quad \text{kovariante Metrikkoeffizienten} \quad (4.33)$$

$$g^{ij} \equiv \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j, \quad \text{kontravariante Metrikkoeffizienten.} \quad (4.34)$$

Wir können die \mathbf{g}^i durch eine Linearkombination der \mathbf{g}_j , $\mathbf{g}^i = \sum_j A^{ij} \mathbf{g}_j$ ausdrücken und erhalten (AUFGABE)

$$\mathbf{g}^i = \sum_{j=1}^n g^{ij} \mathbf{g}_j \equiv g^{ij} \mathbf{g}_j \quad (4.35)$$

$$\mathbf{g}_i = \sum_{j=1}^n g_{ij} \mathbf{g}^j \equiv g_{ij} \mathbf{g}^j. \quad (4.36)$$

Für eine gegebene Basis \mathbf{g}_i berechnet man die kovariante Metrikoeffizienten einfach durch die Skalarprodukte $\mathbf{g}_i \mathbf{g}_j$. Die kontravariante Metrikoeffizienten und damit die kontravariante Basis erhält man durch Invertieren der Matrix g_{ij} , denn

$$\mathbf{g}_i = g_{ik} \mathbf{g}^k \rightsquigarrow \delta_i^j = g_{ik} \mathbf{g}^k \mathbf{g}^j = g_{ik} g^{kj}. \quad (4.37)$$

AUFGABE:

1. Berechne die kontravariante Basis und die Metrikoeffizienten zur kovarianten Basis $\mathbf{g}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{g}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ des R^2 .

2. Berechne die kontravariante Basis und die Metrikoeffizienten zur kovarianten Basis $\mathbf{g}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{g}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{g}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ des R^3 .

Vektoren \mathbf{x} des R^n kann man jetzt sowohl in der kovarianten als auch in der kontravarianten Basis ausdrücken:

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{g}_i, \quad x^i: \text{kontravariante Komponenten von } \mathbf{x} \quad (4.38)$$

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{g}^i, \quad x_i: \text{kovariante Komponenten von } \mathbf{x}. \quad (4.39)$$

AUFGABE: Zeigen Sie die Regel für das Herauf- und Herunterziehen von Indizes mit den Metrikoeffizienten,

$$x^i = g^{ij} x_j \quad x_i = g_{ij} x^j. \quad (4.40)$$

4.2.2 ANWENDUNG FESTKÖRPERPHYSIK: reziprokes Gitter

LITERATUR: N. W. Ashcroft, N. D. Mermin, 'Solid State Physics'. E. Klingbeil, 'Tensorrechnung für Ingenieure'.

Im R^3 sei \mathbf{g}_i die (kovariante) Basis eines Gitters \mathcal{B} aus Punkten $\mathbf{x} = n^i \mathbf{g}_i$ mit ganzen Zahlen n^i . Solch ein Gitter wird auch als **Bravais-Gitter** bezeichnet. Es ist ein Gitter im *Ortsraum*.

Bei der Analyse von Bravais-Gittern benutzt man häufig Streuexperimente (z.B. mit Photonen, Neutronen, Elektronen etc.), die einer Fourieranalyse mit ebenen Wellen

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (4.41)$$

entsprechen. Man definiert das **reziproke Gitter** \mathcal{R} als die Menge aller \mathbf{k} mit

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{B}, \quad (4.42)$$

denn für solche \mathbf{k} -(Differenz)vektoren man bekommt konstruktive Interferenz (von-Laue-Bedingung).

Das reziproke Gitter ist ein Gitter im *k-Raum*. Seine \mathbf{k} -Vektoren müssen also

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} = 1, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{B} \rightsquigarrow \mathbf{k}\mathbf{x} = 2\pi m \quad (4.43)$$

mit einer ganzen Zahl m erfüllen. Wir definieren die kontravariante Basis \mathbf{g}^i des reziproken Gitters mit $\mathbf{g}_i \mathbf{g}^j = \delta_i^j$ und schreiben die \mathbf{k} -Vektoren als

$$\mathbf{k} = 2\pi k_i \mathbf{g}^i \rightsquigarrow \mathbf{k}\mathbf{x} = 2\pi k_i \mathbf{g}^i n^j \mathbf{g}_j = 2\pi k_i n^i, \quad (4.44)$$

wobei der Faktor 2π herausgezogen wurde, so dass die kovarianten Koeffizienten von \mathbf{k} also 2π mal eine ganze Zahl k_i sein müssen, damit m eine ganze Zahl ist.

Die kontravariante Basis erhält man mittels Kreuzprodukt (AUFGABE),

$$\mathbf{g}^1 = \frac{\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3}{\mathbf{g}_1(\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3)}, \quad \mathbf{g}^2 = \frac{\mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1}{\mathbf{g}_2(\mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1)}, \quad \mathbf{g}^3 = \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{\mathbf{g}_3(\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2)}. \quad (4.45)$$

Oft definiert man den Faktor 2π auch in die Basis \mathbf{g}^i hinein und die kovarianten Koeffizienten von \mathbf{k} ohne den Faktor 2π . Wir haben also zusammenfassend

$$\mathbf{x} = n^i \mathbf{g}_i \in \mathcal{B}, \quad \text{Gitter im Ortsraum} \quad (4.46)$$

$$\mathbf{k} = 2\pi k_i \mathbf{g}^i \in \mathcal{R}, \quad \text{reziprokes Gitter} \quad (4.47)$$

Die Vektoren des reziproken Gitters können als Linearformen aufgefasst werden: sie wirken auf Vektoren des Gitters im Ortsraum gemäß Gl. (4.43) als spezielle Linearformen, $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{k}\mathbf{x} = 2\pi m$.

Die kontravariante Basis \mathbf{g}^i ist also eine Basis des Raums (Dualraum), der dual zu dem von der kovarianten Basis \mathbf{g}_i aufgespannten Raum ist.

4.2.3 Polarkoordinaten

Wir betrachten diese als erstes konkretes Beispiel für eine Beschreibung in krummlinigen Koordinaten. Solche Koordinaten vereinfachen häufig die Lösung physikalischer Probleme stark, wenn sie z.B. der Symmetrie des Problems angepasst sind. Für kugelsymmetrische Probleme im R^3 verwendet man Kugelkoordinaten (sphärische Polarkoordinaten, eng. *spherical polar coordinates (polars)*).

Wir schreiben den Ortsvektor als (SKIZZE)

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \sin \theta \\ r \sin \phi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \text{sphärische Polarkoordinaten.} \quad (4.48)$$

Wir definieren ein lokales Dreibein im Punkt \mathbf{r} durch die drei Tangentialvektoren an die drei Kurven

$$\theta, \phi = \text{const} \rightsquigarrow \mathbf{t}_r = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} r(t) \cos \phi \sin \theta \\ r(t) \sin \phi \sin \theta \\ r(t) \cos \theta \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{e}_r \equiv \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

$$\theta, r = \text{const} \rightsquigarrow \mathbf{t}_\phi = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} r \cos \phi(t) \sin \theta \\ r \sin \phi(t) \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{e}_\phi \equiv \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

$$\phi, r = \text{const} \rightsquigarrow \mathbf{t}_\theta = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} r \cos \phi \sin \theta(t) \\ r \sin \phi \sin \theta(t) \\ r \cos \theta(t) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{e}_\theta \equiv \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

Wir erhalten drei orthogonale, lokale Basisvektoren $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ also durch einfache Differentiation nach jeweils einem der Parameter r, θ, ϕ und Normieren.

Es folgt für die **Geschwindigkeit in Polarkoordinaten**

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d}{dt} [r(t)\mathbf{e}_r(t)] = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r \quad (4.52)$$

$$= \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\phi} \sin\theta\mathbf{e}_\phi + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta. \quad (4.53)$$

Daraus folgt z.B. die kinetische Energie eines freien Teilchens der Masse m (hier gleich der Lagrange-Funktion L),

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\dot{\phi}^2 \right). \quad (4.54)$$

Die Bogenlänge für eine Kurve in Polarkoordinaten folgt dann als

$$ds = |d\mathbf{r}|dt = |\mathbf{v}|dt = \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\dot{\phi}^2 \right)^{1/2} dt, \quad (4.55)$$

was man häufig als

$$ds^2 = \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\dot{\phi}^2 \right) dt^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \quad (4.56)$$

schreibt. Allgemein definiert man für beliebige andere Koordinatentripel (x^1, x^2, x^3) das Quadrat des Bogenlängelements (**metrische Fundamentalform**)

$$ds^2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 g_{\alpha\beta}(x^\nu) dx^\alpha dx^\beta, \nu = 1, 2, 3. \quad (4.57)$$

mit dem **metrischen Tensor** $g_{\alpha\beta}(x^\nu)$.

AUFGABE: Berechne die Beschleunigung in Polarkoordinaten.

4.2.4 Beliebige Basis, Metrik-Tensor

Es seien jetzt krummlinige Koordinaten in d Dimensionen gegeben, die kontravarianten Komponenten x^k des Ortsvektors \mathbf{r} also Funktionen

$$\mathbf{r} = \sum_k x^k(u^1, u^2, \dots, u^d)\mathbf{e}_k \quad (4.58)$$

mit der üblichen festen kovarianten Einheitsbasis $\{\mathbf{e}_k\}$.

Eine lokale kovariante Basis $\{\mathbf{g}_i\}$ im Punkt \mathbf{r} erhält man durch Differentiation,

$$\mathbf{g}_i \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} = \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial u^i} \mathbf{e}_k. \quad (4.59)$$

Tatsächlich ist das eine Basis im Punkt \mathbf{r} , falls

$$\det(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_d) \neq 0. \quad (4.60)$$

Entsprechend gilt dann die Umkehrung

$$\mathbf{e}_k = \sum_j \frac{\partial u^j}{\partial x^k} \mathbf{g}_j. \quad (4.61)$$

AUFGABE: Beweis dieser Umkehrung.

Für die **Geschwindigkeit** eines Teilchen auf einer Kurve durch \mathbf{r} hat man (Kettenregel)

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \sum_{ki} \frac{\partial x^k}{\partial u^i} \dot{u}^i \mathbf{e}_k = \sum_i \dot{u}^i \mathbf{g}_i \quad (4.62)$$

Für die Bogenlänge ds folgt damit

$$ds = |\mathbf{v}| dt = \left(\sum_{ij} \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \dot{u}^i \dot{u}^j \right)^{1/2} dt \equiv \left(\sum_{ij} g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j \right)^{1/2} dt, \quad (4.63)$$

wobei

$$g_{ij} \equiv \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j}, \quad \text{metrischer Tensor} \quad (4.64)$$

durch das gewöhnliche Skalarprodukt der zwei Vektoren $\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j$ berechnet wird. Es folgt also sofort die Symmetrie des metrischen Tensors,

$$g_{ij} = g_{ji}. \quad (4.65)$$

Der Abkürzung halber schreibt man meistens

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} du_i du_j. \quad (4.66)$$

AUFGABE:

1. Berechne den metrischen Tensor g_{ij} für Polarkoordinaten in $d = 3$.
2. Berechne den metrischen Tensor und die Geschwindigkeit in Zylinderkoordinaten in $d = 3$,

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{Zylinderkoordinaten.} \quad (4.67)$$

4.2.5 Beschleunigung und Christoffel-Symbole

Für die **Beschleunigung** eines Teilchen auf einer Kurve durch \mathbf{r} hat man (Kettenregel)

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \sum_i (\ddot{u}^i \mathbf{g}_i + \dot{u}^i \dot{\mathbf{g}}_i), \quad (4.68)$$

wir benötigen also die Ableitung der lokalen Basisvektoren $\dot{\mathbf{g}}_i$ und wollen natürlich alles wieder in der lokalen Basis am Punkt \mathbf{r} ausdrücken,

$$\dot{\mathbf{g}}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial u^j} \dot{u}^j \equiv \sum_{lj} \Gamma_{ij}^l \mathbf{g}_l \dot{u}^j. \quad (4.69)$$

Die **Christoffel-Symbole** Γ_{ij}^l folgen schlicht aus der Definition,

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial u^j} = \sum_k \frac{\partial^2 x^k}{\partial u^j \partial u^i} \mathbf{e}_k = \sum_{kl} \frac{\partial^2 x^k}{\partial u^j \partial u^i} \frac{\partial u^l}{\partial x^k} \mathbf{g}_l \quad (4.70)$$

$$\rightsquigarrow \Gamma_{ij}^l = \sum_k \frac{\partial^2 x^k}{\partial u^j \partial u^i} \frac{\partial u^l}{\partial x^k}, \quad \text{Christoffel-Symbol.} \quad (4.71)$$

Damit haben wir für die Beschleunigung

$$\ddot{\mathbf{r}} = \sum_i (\ddot{u}^i \mathbf{g}_i + \dot{u}^i \dot{\mathbf{g}}_i) = \sum_i \left(\ddot{u}^i \mathbf{g}_i + \dot{u}^i \sum_{lj} \Gamma_{ij}^l \mathbf{g}_l \dot{u}^j \right) \quad (4.72)$$

$$\rightsquigarrow \ddot{\mathbf{r}} = \sum_l \left(\ddot{u}^l + \sum_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^l \right) \mathbf{g}_l. \quad (4.73)$$

Wenn wir Newton's Gesetz $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ in der lokalen Basis ($\mathbf{F} = \sum_l f^l \mathbf{g}_l$) ausdrücken, erhalten wir also

$$f^l = m \left(\ddot{u}^l + \dot{u}^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^l \right) \quad (4.74)$$

in **Einsteinscher Summationskonvention**: über gemeinsame Indizes wird summiert.

LITERATUR: H. STEPHANI, 'Allgemeine Relativitätstheorie'; J. G. SIMMONS, 'A Brief on Tensor Analysis'; E. KLINGBEIL, 'Tensorrechnung für Ingenieure'.

5. VEKTORANALYSIS

5.1 Vektorfelder

Definition Eine Abbildung

$$R^n \rightarrow R^m, \quad \mathbf{x} \equiv (x_1, \dots, x_n)^T \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))^T \quad (5.1)$$

heißt m -dimensionales Vektorfeld.

Jedem Vektor \mathbf{x} wird ein Vektor $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ zugeordnet. Für $m > 1$ hat man tatsächlich einen Vektor \mathbf{f} (und keinen Skalar).

Definition Der Spezialfall $m = 1$,

$$R^n \rightarrow R, \quad \mathbf{x} \equiv (x_1, \dots, x_n)^T \rightarrow f(\mathbf{x}) \equiv f(x_1, \dots, x_n) \quad (5.2)$$

heißt skalares Feld (Skalarfeld).

Im Druckbild schreibt man das f in Skalarfeldern $f(\mathbf{x})$ nicht fett, in Vektorfeldern $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ schreibt man es fett.

AUFGABE: Skizziere die Skalarfelder $n = 2$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1, \quad g(x, y) = x^2 - y^2. \quad (5.3)$$

AUFGABE: Skizziere das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x, y) = (y, -x). \quad (5.4)$$

5.2 Gradient

5.2.1 Definition

Sei $f : R^n \rightarrow R$ eine skalare, reelle Funktion von n Variablen,

$$\mathbf{x} \rightarrow f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T, \quad \text{skalares Feld } f \quad (5.5)$$

Für differenzierbare Funktionen definieren wir die **Richtungsableitung** in Richtung eines Einheitsvektors \mathbf{v} ,

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}f(\mathbf{x}) \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{t}. \quad (5.6)$$

Die Richtungsableitung ist also einfach die Ableitung der Funktion f entlang der Raumkurve $t \rightarrow \mathbf{x} + t\mathbf{v}$.

BEISPIEL und INTERPRETATION: $f : R^2 \rightarrow R$ Skalarfeld, die Werte von f bilden einen 'Teppich' über der x - y -Ebene. Vom Punkt \mathbf{x} fahren wir eine Strecke $t\mathbf{v}$ in \mathbf{v} -Richtung (Geschwindigkeit \mathbf{v}). Die Richtungsableitung beschreibt, wie stark sich der Wert von f dabei ändert.

Wir berechnen die Richtungsableitung mit Hilfe der Kettenregel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f(\mathbf{x}) &= \left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} f(x_1 + tv_1, \dots, x_n + tv_n) \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}) \left. \frac{d}{dt} (x_i + tv_i) \right|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \nabla f(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (5.7)$$

wobei wir den **Gradienten**

$$\nabla f(\mathbf{x}) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(\mathbf{x}) \right) \quad (5.8)$$

definiert haben. Die Richtungsableitung ist also durch das Skalarprodukt gegeben,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f(\mathbf{x}) = (\nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{v}), \quad \text{Richtungsableitung und Gradient.} \quad (5.9)$$

Bemerkungen:

- Der Gradient im Punkt \mathbf{x} ist selbst ein n -dimensionaler 'Vektor' (siehe aber auch unten). Die Abbildung $\mathbf{x} \rightarrow \nabla f(\mathbf{x})$ ordnet jedem Vektor \mathbf{x} einen Vektor $\nabla f(\mathbf{x})$ zu, ist also ein **Vektorfeld**.
- Die Richtungsableitung ist wegen des Skalarprodukts maximal, wenn \mathbf{v} und $\nabla f(\mathbf{x})$ die gleiche Richtung haben. Der Gradient gibt deshalb die *Richtung des stärksten Anstiegs von f* an.
- In einem festen Punkt \mathbf{x} ordnet der Gradient $\nabla f(\mathbf{x})$ jedem Vektor \mathbf{v} die reelle Zahl $(\nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{v})$ zu, nämlich die Richtungsableitung von f in Richtung \mathbf{v} : so gesehen ist $\nabla f(\mathbf{x})$ also eine Linearform.

5.2.2 Der Gradient in krummlinigen Koordinaten

Wir betrachten die Ableitung einer Funktion $f : R^n \rightarrow R$ entlang einer Kurve $\mathbf{x}(t)$. In kartesischen Koordinaten gilt nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}) \frac{dx_i}{dt} = (\nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{x}}. \quad (5.10)$$

Jetzt beschreiben wir diese Kurve in krummlinigen Koordinaten u^j , so dass $x^i = x^i(u^j)$ (wir unterscheiden wieder zwischen ko- und kontravarianten Koordinaten). Wir bilden die Ableitung der Funktion in krummlinigen Koordinaten

$$\frac{d}{dt}f(u^1(t), \dots, u^n(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial u^i} f \frac{du^i}{dt} \equiv (\nabla f, \mathbf{v}), \quad (5.11)$$

was wegen $\mathbf{v} = \dot{u}^j \mathbf{g}_j$ auf

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial u^i} \mathbf{g}^i, \quad \text{Gradient in krummlinigen Koordinaten} \quad (5.12)$$

führt, denn wegen $\mathbf{g}^i \mathbf{g}_j = \delta_j^i$ gilt

$$(\nabla f, \mathbf{v}) = \frac{\partial f}{\partial u^i} \mathbf{g}^i \dot{u}^j \mathbf{g}_j = \frac{\partial f}{\partial u^i} \dot{u}^i. \quad (5.13)$$

An der Darstellung Gl. (5.12) erkennt man, dass der Gradient im Punkt $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, \dots, u^n)$ eine Linearform ist, die auf Vektoren \mathbf{v} wirkt. Deshalb schreibt sich ∇f als Linearkombinationen der kontravarianten Basisvektoren \mathbf{g}^i . Man kann ∇f aber auch wieder als Vektor auffassen, wenn man die \mathbf{g}^i durch die \mathbf{g}_j ausdrückt. Häufig möchte man ∇f in einer *normierten* Basis \mathbf{g}_j mit $|\mathbf{g}_j| = 1$ ausdrücken, d.h. man definiert

$$\mathbf{g}_j^* \equiv \frac{\mathbf{g}_j}{|\mathbf{g}_j|} \quad (5.14)$$

und schreibt

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial u^i} \mathbf{g}^i = \frac{\partial f}{\partial u^i} g^{ij} \mathbf{g}_j = \frac{\partial f}{\partial u^i} g^{ij} |\mathbf{g}_j| \mathbf{g}_j^*. \quad (5.15)$$

Für orthogonale Koordinaten ist der Metriktensor diagonal,

$$g_{ij} = \delta_{ij} |\mathbf{g}_i|^2 \rightsquigarrow g^{ij} = \delta^{ij} \frac{1}{|\mathbf{g}_i|^2}, \quad (5.16)$$

und der Gradient wird

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\mathbf{g}_i^*}{|\mathbf{g}_i|}, \quad \text{orthogonale Koordinaten, normierte Basis.} \quad (5.17)$$

In der kartesischen Basis ist natürlich wegen $\mathbf{g}_i = \mathbf{g}^i = \mathbf{e}_i$ alles einfacher und man braucht die Unterscheidung ko- und kontravariant nicht wirklich.

AUFGABE:

1. Berechne den Gradienten in Polarkoordinaten im R^3 , ausgedrückt in der normierten kovarianten Basis.

2. Berechne den Gradienten in Zylinderkoordinaten im R^3 , ausgedrückt in der normierten kovarianten Basis.

5.3 ANWENDUNG MECHANIK: Kraft, Gradient und Potential

5.3.1 Konservative Kraftfelder

Die Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ auf ein Partikelchen der Masse m am Ort \mathbf{x} ist ein Vektorfeld, z.B. in drei Dimensionen. Die Newtonschen Bewegungsgleichungen lauten dann

$$m\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)). \quad (5.18)$$

Definition Eine Kraft (Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{x})$) heißt **konservativ**, falls sie sich als Gradient eines skalaren Potentials $\Phi(\mathbf{x})$ in der Form

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi(\mathbf{x}) \quad (5.19)$$

schreiben läßt.

Beispiel: die durch eine schwere, sich bei $\mathbf{x} = 0$ befindende Masse M erzeugte Gravitationskraft auf Punktmasse m bei \mathbf{x} ,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -GmM \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}, \quad \text{Gravitationskraft.} \quad (5.20)$$

$$\rightsquigarrow \Phi(\mathbf{x}) = -GmM \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}, \quad \text{Gravitations-Potential.} \quad (5.21)$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}, \quad \text{Gravitationskonstante.} \quad (5.22)$$

5.3.2 Kurvenintegrale, Arbeit, Leistung

Sei $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ein Vektorfeld $R^n \rightarrow R^n$, z.B. die Kraft auf ein Partikelchen der Masse m . Bewegt sich die Masse entlang der (differenzierbaren) Kurve $\mathbf{x}(t)$, so verrichtet die Kraft entlang eines Kurvenstücks, z.B. von $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}dt$, die **Arbeit**

$$\delta W = \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}dt. \quad (5.23)$$

Hierbei ist $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t))\dot{\mathbf{x}}(t)$ die momentane **Leistung** der Kraft.

Mit der Zeit t als Kurvenparameter in $\mathbf{x}(t)$ ergibt sich die verrichtete Arbeit entlang der Kurve, die wir allgemein als C bezeichnen und durch $\mathbf{x}(t)$ parametrisieren, als

$$W[C] \equiv \int_C \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \equiv \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}dt. \quad (5.24)$$

Es wird also die momentane Leistung $\mathbf{F}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}$ entlang der durchfahrenen Kurve C aufintegriert. Integrale dieser Form nennt man **Kurvenintegrale**. Wenn über geschlossene Kurven integriert wird, schreibt man häufig

$$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad (5.25)$$

die konkrete Berechnung erfolgt aber stets durch Parametrisieren der Kurve C als $\mathbf{x}(t)$ und einfaches Integrieren, Gl. (5.24).

AUFGABE: Berechnung von Kurvenintegralen entlang verschiedener Kurven C für gegebene Kraftfelder.

5.3.3 Konservative Kräfte und vom Weg unabhängige Arbeit

Satz 1. Ein Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ist genau dann konservativ, wenn jedes Wegintegral der Arbeit über eine Kurve C nur vom Anfangs- und Endpunkt und nicht von der Form der Kurve abhängt.

Das ist recht einfach zu sehen: ist $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ konservativ, so gilt $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi(\mathbf{x})$ und deshalb

$$\begin{aligned} W[C] &\equiv \int_C \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{t_0}^{t_1} \nabla\Phi(\mathbf{x}(t)) \dot{\mathbf{x}} dt \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{x}(t)) = -\Phi(\mathbf{x}(t_1)) + \Phi(\mathbf{x}(t_0)) = -\Phi(\mathbf{x}_1) + \Phi(\mathbf{x}_0) \end{aligned} \quad (5.26)$$

unabhängig von der Form von C . Umgekehrt definiert

$$\Phi(\mathbf{x}_1) \equiv - \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}_1} \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (5.27)$$

eindeutig eine Funktion $\Phi(\mathbf{x}_1)$ (das Integral ist ja wegunabhängig), bis auf eine Konstante, die vom Anfangspunkt \mathbf{x}_0 abhängt. Die Komponente i des Gradienten ist die Richtungsableitung in Richtung des i -ten Basisvektors \mathbf{e}_i ,

$$\begin{aligned} - \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(\mathbf{x}) &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\Phi(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - \Phi(\mathbf{x})] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i} \mathbf{F}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{t_1}^{t_1+h} dt \mathbf{F}(\mathbf{s}(t)) \dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i, \end{aligned} \quad (5.28)$$

wobei die Kurve C so gewählt wurde, dass am Endpunkt $\mathbf{x} = \mathbf{s}(t_1)$ gerade $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{e}_i$ gilt (SKIZZE!). Damit hat man insgesamt

$$- \nabla\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}). \quad (5.29)$$

AUFGABE: Warum ist $\mathbf{f}(x, y) = (y, -x)$ kein konservatives Kraftfeld?

5.4 Rotation und Integralsatz von Stokes

LITERATUR: Berkeley Physik Kurs 2 (E. M. Purcell). BRONSTEIN. Im Folgenden betrachten wir dreidimensionale Vektorfelder.

5.4.1 Rotation

Wir betrachten ein dreidimensionales Vektorfeld $R^3 \rightarrow R^3$, z.B. ein Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ in 3 Dimensionen. Für konservative Kraftfelder hatten wir gesehen, dass das Integral der Arbeit über eine geschlossene Kurve C gleich Null ist,

$$W[C] \equiv \oint_C \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad \text{konservatives Kraftfeld} \quad (5.30)$$

$$\neq, \quad \text{nicht-konservatives Kraftfeld.} \quad (5.31)$$

Im letzteren Fall nennt man $W[C]$ manchmal *Wirbelstärke*. Ein typisches Wirbelfeld ist $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, -x, 0)$, vgl. die AUFGABE oben. Wir möchten nun ein lokales Mass für die Wirbelstärke eines Kraftfelds finden, das nicht mehr von der speziellen Wahl der Kurve C abhängt. Wir erweitern hierzu die Integration in $W[C]$, indem wir zahlreiche kleine Flächen zur von C umschlossenen Fläche zusammensetzen (SKIZZE) - an den Rändern innen heben sich die Beiträge der Integrale jeweils weg. Der Beitrag eines infinitesimalen Flächenelements A mit Normalenvektor \mathbf{n} wird dann zur Definition der **Rotation** verwendet,

$$(\text{rot}\mathbf{F})\mathbf{n} \equiv (\nabla \times \mathbf{F})\mathbf{n} \equiv \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_{\mathbf{x}}} \mathbf{F}(\mathbf{s}) d\mathbf{s}}{A}, \quad (5.32)$$

wobei $C_{\mathbf{x}}$ eine kleine geschlossene Kurve um den Punkt \mathbf{x} bezeichnet. Hierdurch ist die Komponente der Rotation in \mathbf{n} -Richtung definiert - man bekommt alle drei Komponenten durch die Wahl $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$ etc. Wir wählen z.B. $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$, dann ist für eine infinitesimal kleine quadratische Fläche mit Mittelpunkt \mathbf{x}

$$\begin{aligned} \oint_{C_{\mathbf{x}}} \mathbf{F}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} &= \int_{-1}^1 F_y(x + \frac{\Delta x}{2}, y + t\frac{\Delta y}{2}, z) \frac{\Delta y}{2} dt \\ &\quad - \int_{-1}^1 F_y(x - \frac{\Delta x}{2}, y + t\frac{\Delta y}{2}, z) \frac{\Delta y}{2} dt \\ &\quad + \int_{-1}^1 F_x(x + \frac{\Delta x}{2}t, y - \frac{\Delta y}{2}, z) \frac{\Delta x}{2} dt \\ &\quad - \int_{-1}^1 F_x(x + \frac{\Delta x}{2}t, y + \frac{\Delta y}{2}, z) \frac{\Delta x}{2} dt \\ &= \partial_x F_y(x, y, z) \frac{\Delta x}{2} \Delta y - \partial_x F_y(x, y, z) \frac{-\Delta x}{2} \Delta y \\ &\quad + \partial_y F_x(x, y, z) \frac{-\Delta y}{2} \Delta x - \partial_y F_x(x, y, z) \frac{\Delta y}{2} \Delta x + O(\Delta x^2 \Delta y) + O(\Delta y^2 \Delta x) \end{aligned} \quad (5.33)$$

und damit

$$\begin{aligned} (\text{rot}\mathbf{F})\mathbf{e}_3 &= \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y} (\partial_x F_y(x, y, z) \Delta x \Delta y - \partial_y F_x(x, y, z) \Delta x \Delta y) \\ &= \partial_x F_y(x, y, z) - \partial_y F_x(x, y, z). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Entsprechend macht man es für die zwei anderen Komponenten. Die Rotation von $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ergibt sich also in kartesischen Komponenten als

$$\text{rot}\mathbf{F} \equiv \nabla \times \mathbf{F} \equiv \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)^T \quad (5.35)$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}, \quad (5.36)$$

wobei in der letzten Zeile die Determinante als Merkgel benutzt wurde und $\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ etc. abkürzt. Die Rotation ist also selbst wieder ein dreidimensionales Vektorfeld.

BEISPIEL:

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (y, -x, 0) \rightsquigarrow \nabla \times \mathbf{f} = (0, 0, -2). \quad (5.37)$$

5.4.2 Integralsatz von Stokes

Wir betrachten nochmals die Zerlegung des Wirbelstärken-Integrals

$$W[C] \equiv \oint_C \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_i A_i \frac{W_i}{A_i} \quad (5.38)$$

in zahlreiche kleine Flächen A_i , die von C umschlossen werden. Im Grenzfall $A_i \rightarrow 0$ folgt jetzt mit der Definition der Rotation heuristisch

$$W[C] \equiv \oint_C \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_A \text{rot} \mathbf{F} d\mathbf{A}, \quad \text{Stokes'scher Integralsatz}, \quad (5.39)$$

was die Äquivalenz des *Kurvenintegrals* $\mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ über die geschlossene Kurve C mit dem *Flächenintegral* über die eingeschlossene Fläche A beschreibt.

5.4.3 ANWENDUNG ELEKTRODYNAMIK: Induktionsgesetz

Ein zeitlich veränderliches Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ erzeugt ein elektrisches Wirbelfeld $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ gemäß

$$\oint_C \mathbf{E} ds = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{B} d\mathbf{A}, \quad \text{Induktionsgesetz} \quad (5.40)$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad \text{1. Maxwell'schen Gleichung.} \quad (5.41)$$

Die zweite Zeile ist eine der **Maxwell'schen Gleichungen** und folgt aus dem Stokes'schen Integralsatz.

BEISPIEL: Eine rechteckige Leiterschleife (SKIZZE) der Fläche A rotiert gleichmäßig mit der Winkelgeschwindigkeit ω im konstanten Magnetfeld \mathbf{B} . Es gilt

$$U(t) \equiv \oint_C \mathbf{E} ds = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{B} d\mathbf{A} = -BA \frac{\partial}{\partial t} \cos(\omega t) = BA\omega \sin(\omega t) \quad (5.42)$$

wobei $U(t)$ die in der Schleife induzierte Spannung ist. AUFGABE: wie kann man diese Spannung experimentell messen?

5.4.4 ANWENDUNG MAGNETOSTATIK

Ein Leiter führe eine stationäre (zeitunabhängige) Stromdichte $\mathbf{J}(\mathbf{x})$. Diese erzeugt ein Magnetfeld \mathbf{B} , für das gilt

$$\oint_C \mathbf{B} ds = \mu_0 \int_A \mathbf{J} d\mathbf{A} \quad (5.43)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}, \quad \text{3. Maxwell'sche Gleichung.} \quad (5.44)$$

Die zweite Zeile ist eine weitere der **Maxwell'schen Gleichungen** (der Verschiebungsstrom $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = 0$ ist hier Null.) Hierbei ist

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{Vs}{Am}, \quad \text{magnetische Feldkonstante.} \quad (5.45)$$

BEISPIEL (AUFGABE): Ein gerader, unendlich langer Draht mit Querschnitt A führe den Strom I . Berechne das Magnetfeld \mathbf{B} innerhalb und außerhalb des Drahtes.

5.5 Divergenz und Integralsatz von Gauß

Jetzt könnte man hier zum Schluß die Divergenz einfach als weitere vektoranalytische Operation einführen. Bisher waren wir allerdings stets physikalisch motiviert vorgegangen: Der *Gradient* kommt letztendlich aus dem Konzept des Potentials Φ (d.h. der potentiellen Energie) in der Mechanik über die Kraft $\mathbf{F} = -\nabla\Phi$ in den Newton'schen Gleichungen. Die *Rotation* kommt dann aus der Bedingung der Wirbelfreiheit $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$ für konservative, d.h. Energie-erhaltende Kraftfelder. Felder (elektrische und magnetische) treten auch in der Elektrodynamik auf, und wir sahen den Stokes'schen Integralsatz im Zentrum zweier Maxwellscher Gleichungen, die das Induktionsgesetzes und das Magnetfeld eines Leiters lokal formulieren.

Was noch fehlt, sind die Quellen der Felder (z.B. elektrische Felder, Gravitationsfelder), und das führt auf die Divergenz.

5.5.1 Divergenz

LITERATUR: Berkeley Physik Kurs 2 (E. M. Purcell). BRONSTEIN. Wir betrachten ein Vektorfeld $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, z.B. ein durch eine Masse erzeugtes Gravitations-Kraftfeld oder ein durch eine Ladung erzeugtes elektrostatisches Feld. Wir betrachten außerdem ein Volumen V , das durch eine Oberfläche A eingeschlossen wird, und definieren

$$\Psi \equiv \int_A \mathbf{F} d\mathbf{A}, \quad \text{Fluß des Vektorfelds } \mathbf{F}(\mathbf{x}) \text{ durch Oberfläche } A. \quad (5.46)$$

Jetzt teilen wir V in viele kleine Volumina V_i mit Oberflächen A_i (SKIZZE), die Anteile der Integration benachbarter Volumina heben sich gerade weg ($d\mathbf{A}$ bezeichnet das

Flächenelement mit nach außen gerichtetem Normalen-Vektor). Im Grenzfall definiert man für ein infinitesimal kleines Volumen V_i um den Punkt \mathbf{x}

$$\operatorname{div}\mathbf{F} \equiv \lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{1}{V_i} \int_A \mathbf{F} d\mathbf{A} \quad (5.47)$$

als **Divergenz** des Vektorfeldes $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ im Punkt \mathbf{x} . Wählt man einen infinitesimal kleinen Quader, so erhält man in kartesischen Koordinaten (AUFGABE)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_n(\mathbf{x}))^T, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \\ \rightsquigarrow \operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_1} F_1(\mathbf{x}) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} F_n(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (5.48)$$

Hier haben wir in der Definition der Divergenz bereits ein n -dimensionales Vektorfeld zugelassen, also nicht notwendigerweise $n = 3$.

5.5.2 Integralsatz von Gauß

Analog zum Integralsatz von Stokes folgt dieser nun quasi automatisch zumindest heuristisch aus der obigen Herleitung der Divergenz, d.h. wir betrachten die Zerlegung des Flußintegrals

$$\Psi \equiv \int_A \mathbf{F} d\mathbf{A} = \sum_i V_i \frac{1}{V_i} \int_{A_i} \mathbf{F} d\mathbf{A}_i \quad (5.49)$$

mit $V_i \rightarrow 0$,

$$\int_A \mathbf{F} d\mathbf{A} = \int \operatorname{div}\mathbf{F} dV, \quad \text{Gauß'scher Integralsatz.} \quad (5.50)$$

5.5.3 ANWENDUNG ELEKTROSTATIK: Gauß'sches Gesetz

Eine Ladungsverteilung mit räumlicher Ladungsdichte $\rho(\mathbf{x})$ erzeugt ein elektrisches Feld \mathbf{E} , dessen Fluß durch eine beliebige geschlossene Oberfläche durch die von der Oberfläche eingeschlossene Gesamtladung gegeben ist,

$$\int_A \mathbf{E} d\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho dV, \quad \text{Gauß'sches Gesetz der Elektrostatik} \quad (5.51)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \quad \text{2. Maxwell'sche Gleichung.} \quad (5.52)$$

Die zweite Zeile ist eine weitere der **Maxwell'schen Gleichungen** (die Numerierung ist in der Tat willkürlich). Hierbei ist

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2}, \quad \text{elektrische Feldkonstante.} \quad (5.53)$$

AUFGABEN:

1. Berechnen Sie das durch eine homogen geladene Kugel mit Radius r und Gesamtladung Q erzeugte elektrische Feld.

2. Berechnen Sie das durch eine unendliche dünne und unendlich ausgedehnte Platte der homogenen Flächenladungsdichte σ erzeugte elektrische Feld ausserhalb der Platte.

5.5.4 Zusammenfassung: Maxwell'sche Gleichungen

Die Maxwell'schen Gleichungen lauten

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} \quad (5.54)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad (5.55)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} \quad (5.56)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \quad (5.57)$$

Die letzte der Maxwell'schen Gleichungen besagt, dass es keine magnetischen Monopole gibt, die als Quellen von Magnetfeldern auftreten würden.