

Einführung in die Theoretische Physik I

Udo Scherz

**Institut für Theoretische Physik
Technische Universität Berlin**

SS 2000

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen der Mechanik	1
1.1 Vektoren im dreidimensionalen Raum	1
1.2 Kinematik	4
1.3 Spezielle Bahnkurven eines Massenpunktes	5
1.4 Axiome der Mechanik	7
1.5 Einfache Anwendungen der Axiome	8
1.6 Einfache mechanische Systeme	11
2 Gedämpfte Schwingungen	13
2.1 Freie gedämpfte Schwingungen	13
2.2 Erzwungene Schwingungen	16
2.3 Anharmonische Schwingungen	18
3 Himmelsmechanik	20
3.1 Planetenbewegung	20
3.2 Mitbewegung der Sonne	22
4 Relativbewegung	23
4.1 Galilei-Transformation	23
4.2 Beschleunigte Bezugssysteme	23
4.3 Trägheitskräfte im rotierenden Bezugssystem	24
5 Spezielle Relativitätstheorie	26
5.1 Doppler-Effekt	26
5.2 Michelson-Morley-Versuch	26
5.3 Lorentz-Transformation	27
5.4 Eigenschaften der Lorentz-Transformation	28
5.5 Minkowski-Raum	33
5.6 Einsteins Relativitätstheorie	34
6 Elektrostatik	37
6.1 Coulomb-Gesetz	37
6.2 Elektrostatisches Potential	38
6.3 Energie des elektrostatischen Feldes	39
6.4 Elektrischer Dipol	40
6.5 Laplace-Gleichung	41
6.6 Poisson-Gleichung	42
6.7 Poisson-Gleichung für ein Dielektrikum	44

Lehrbücher

- A. Lindner, Grundkurs Theoretische Physik, Teubner Studienbücher.
M.S. Spiegel, Vector Analysis, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York.
W. Greiner, Theoretische Physik, Bd. 1: Mechanik, Verlag Harri Deutsch, Zürich.
F. Scheck, Mechanik, Springer-Verlag, Berlin.
C. Gerthsen, H. Vogel, Physik, Springer-Verlag, Berlin.
G. Joos, Lehrbuch der Theoretischen Physik, Akademische Verlagsgesellschaft.
W. Nolting, Grundkurs: Theoretische Physik, 1 Klassische Mechanik, 3 Elektrodynamik,
Verlag Zimmermann-Neufang, Ulmen.
A. Budo, Theoretische Mechanik, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
R. Becker, F. Sauter, Theorie der Elektrizität, Band 1, B.G. Teubner, Stuttgart.
S. Großmann, Mathematischer Einführungskurs für die Physik, B.G. Teubner, Stuttgart.

1 Grundlagen der Mechanik

1.1 Vektoren im dreidimensionalen Raum

Die Verschiebung eines Massenpunktes in eine bestimmte Richtung um eine bestimmte Strecke lässt sich durch einen Vektor beschreiben. Entsprechend werden Vektoren für die physikalischen Größen Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft usw. eingeführt. Ein Vektor \mathbf{a} wird durch seine Komponenten im kartesischen Koordinatensystem wie in Abb. 1.1 gekennzeichnet

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

mit $a_j \in \mathcal{R}$ für $j = 1, 2, 3$ und das T für transponiert wird auch fortgelassen. Hier bezeichnet \mathcal{R} den Körper der reellen Zahlen und die Komponenten verstehen sich in Einheiten der physikalischen Größe, die der Vektor darstellt. Der Ortsvektor beschreibt z.B. den Ort eines Massenpunktes und die Komponenten werden in der Einheit „Meter“ angegeben. Vektoren mit verschiedenen Anfangspunkten, die die gleiche Richtung und die gleiche Länge haben, werden im allgemeinen als äquivalent angesehen und durch das gleiche Symbol \mathbf{a} beschrieben.

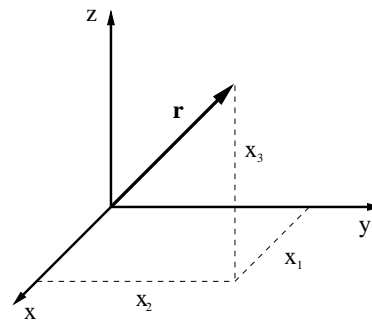


Abb. 1.1 Komponenten eines Vektors

Die Vektoren haben die folgenden Eigenschaften

$$\begin{aligned} u\mathbf{a} &= (ua_1, ua_2, ua_3) \quad \text{für } u \in \mathcal{R}, \\ \mathbf{0} &= (0, 0, 0) \quad \text{heißt Nullvektor,} \\ \mathbf{a} = \mathbf{b} &= (b_1, b_2, b_3) \Leftrightarrow a_1 = b_1 \quad \wedge \quad a_2 = b_2 \quad \wedge \quad a_3 = b_3, \\ \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3). \end{aligned}$$

Das innere Produkt wird definiert durch

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{j=1}^3 a_j b_j \in \mathcal{R}$$

und hat die Eigenschaften ($u, v \in \mathcal{R}$)

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}, \\ \mathbf{a} \cdot (u\mathbf{b} + v\mathbf{c}) &= u\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + v\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} &\geq 0, \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 &\Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Die Norm oder der Betrag $|\mathbf{a}| \in \mathcal{R}$ eines Vektors ist

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \geq 0$$

mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} |u\mathbf{a}| &= |u||\mathbf{a}| \\ |\mathbf{a} + \mathbf{b}| &\leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \quad \text{Dreiecksungleichung.} \end{aligned}$$

Ist $\alpha = \angle \mathbf{a}, \mathbf{b}$ der Winkel zwischen den Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} , so gilt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \alpha,$$

vergl. Abb. 1.2, und die Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} heißen orthogonal, wenn

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

ist. Es gilt die Schwarzsche Ungleichung

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|.$$

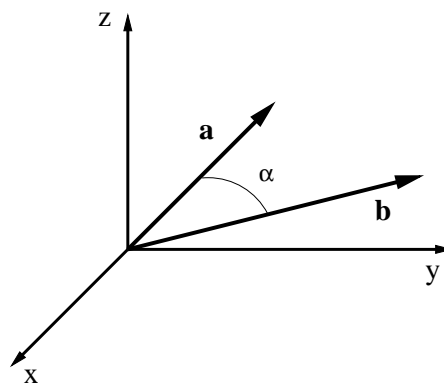


Abb. 1.2 Winkel zwischen zwei Vektoren

□ Aus der Schwarzschen Ungleichung folgt die Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\alpha \\ &\leq |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| = (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2. \blacksquare \end{aligned}$$

Die Einheitsvektoren im dreidimensionalen Ortsraum

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden ein Orthonormalsystem oder auch eine Basis

$$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k, \\ 0 & \text{für } j \neq k \end{cases}$$

und jeder Vektor läßt sich nach dieser Basis entwickeln

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3.$$

Das äußere Produkt oder Vektorprodukt wird definiert durch

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für (j, k, l) zyklisch

$$\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_l \quad \text{mit } (j, k, l) = \begin{cases} (1, 2, 3) \\ (2, 3, 1) \\ (3, 1, 2) \end{cases}.$$

Das Vektorprodukt hat die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \quad \vee \quad \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad \vee \quad \mathbf{b} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\mathbf{b} \times \mathbf{a}, \\ |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| &= |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\alpha \quad \text{mit } \alpha = \angle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{u}\mathbf{b} + \mathbf{v}\mathbf{c}) &= \mathbf{u}\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{v}\mathbf{a} \times \mathbf{c}. \end{aligned}$$

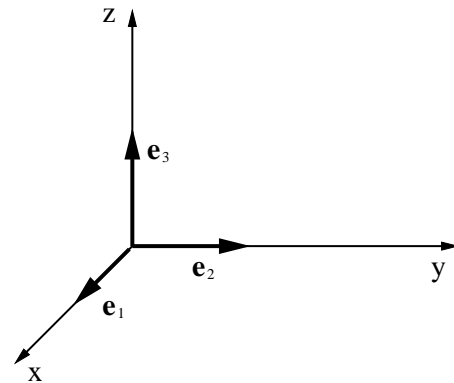


Abb. 1.3 Basisvektoren

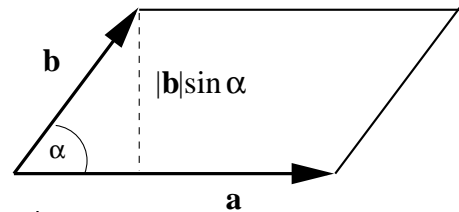


Abb. 1.4 Fläche eines Parallelogramms

Der Betrag des Vektorproduktes $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ ist gleich der Fläche des Parallelogramms, das von den beiden Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannt wird, vergl. Abb. 1.4, und der Vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ steht senkrecht auf dieser Fläche.

Das Spatprodukt dreier Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} ist

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

mit den Eigenschaften

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b})$$

und

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}|\sin\beta\cos\alpha.$$

Das Spatprodukt verschwindet, wenn zwei der drei Vektoren parallel sind. Das Spatprodukt ist gleich dem Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Parallelepipeds, vergl. Abb. 1.5, und kann aus den Komponenten der Vektoren mit Hilfe der Determinante berechnet werden:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{mit } \begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_1, a_2, a_3) \\ \mathbf{b} &= (b_1, b_2, b_3) \\ \mathbf{c} &= (c_1, c_2, c_3). \end{aligned}$$

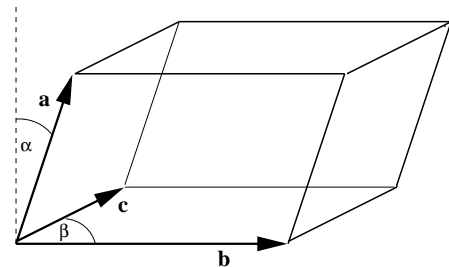


Abb. 1.5 Volumen des Parallelepipeds

Es gilt die sogenannte bac-cab Regel

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

und mehrfache Produkte lassen sich damit auf einfachere zurückführen, z.B.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) - \mathbf{d}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \mathbf{a} \cdot \mathbf{d}.$$

Das Transformationsverhalten der Vektoren wird mit dem des Ortsvektors

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{vergleichen} \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Eine Drehung D wird durch $\mathbf{r}' = D\mathbf{r}$ mit $|\mathbf{r}'| = |\mathbf{r}|$ und $\det\{D\} = 1$ beschrieben und eine Inversion I durch $\mathbf{r}' = I\mathbf{r} = -\mathbf{r}$ mit $I = -E$ und $\det\{I\} = -1$, wobei E die Einheitsmatrix bezeichnet. Die Symmetrieeoperationen S der Kugelgruppe $O(3)$ bestehen aus den Drehungen und den Drehinversionen DI und erfüllen die Bedingungen $|S\mathbf{r}| = |\mathbf{r}|$ und $\det\{S\} = \pm 1$. Da das innere Produkt gegenüber den Symmetrietransformationen S invariant sein muß $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$, erhält man mit der Transformation $\mathbf{r}' = S\mathbf{r}$ bzw. $x'_j = \sum_{k=1}^3 s_{jk} x_k$

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = \sum_{j=1}^3 x'_j x'_j = \sum_{j,k,l} s_{jk} x_k s_{jl} x_l = \sum_{k=1}^3 x_k x_k, \quad \text{falls} \quad \sum_{j=1}^3 s_{jk} s_{jl} = \sum_{j=1}^3 s_{kj}^T s_{jl} = \delta_{kl}$$

ist, woraus sich $S^T S = E$ oder $S^T = S^{-1}$ ergibt.

Eine Drehung des Ortsvektors \mathbf{r} um die z -Achse um den Winkel φ im mathematisch positiven Sinn bei festgehaltenem Koordinatensystem lautet

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi$$

$$y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

$$z' = z$$

oder in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{r}' = D\mathbf{r} \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□ Zum Beweise verwenden wir die Additionstheoreme der Kreisfunktionen

$$\cos(\alpha + \varphi) = \cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi$$

$$\sin(\alpha + \varphi) = \cos \alpha \sin \varphi + \sin \alpha \cos \varphi.$$

Aus der Abb. 1.6 entnimmt man mit $r = |\mathbf{r}|$

$$x = r \cos \alpha \quad \text{und} \quad y = r \sin \alpha$$

und wegen $|\mathbf{r}'| = |\mathbf{r}| = r$ erhält man

$$x' = r \cos(\alpha + \varphi)$$

$$= r \cos \alpha \cos \varphi - r \sin \alpha \sin \varphi$$

$$= x \cos \varphi - y \sin \varphi$$

und

$$y' = r \sin(\alpha + \varphi)$$

$$= r \cos \alpha \sin \varphi + r \sin \alpha \cos \varphi$$

$$= x \sin \varphi + y \cos \varphi. \quad \blacksquare$$

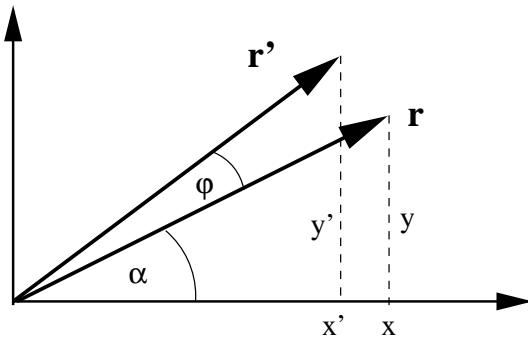


Abb. 1.6 Drehung des Vektors \mathbf{r} um einen Winkel φ um die z -Achse

Wir bezeichnen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ als einen Vektor, wenn er bezüglich der Symmetrietransformationen S wie der Ortsvektor transformiert. Daneben gibt es sogenannte axiale Vektoren, die nur bei Drehungen wie der Ortsvektor transformieren, aber gegenüber der Inversion invariant sind. Transformieren z.B. die Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} wie der Ortsvektor, so ist das Vektorprodukt $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ gegenüber der Inversion invariant und somit ein axialer Vektor.

1.2 Kinematik

Ein Massenpunkt ist ein idealisiertes Teilchen, dessen Ort zur Zeit t durch seine Bahnkurve festgelegt ist

$$\mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \sum_{j=1}^3 x_j(t) \mathbf{e}_j.$$

Die Ableitung nach der Zeit ergibt die Geschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{dx_1(t)}{dt} \mathbf{e}_1 + \frac{dx_2(t)}{dt} \mathbf{e}_2 + \frac{dx_3(t)}{dt} \mathbf{e}_3$$

und zweimaliges Differenzieren die Beschleunigung

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{d^2x_j(t)}{dt^2} \mathbf{e}_j.$$

Der Vektor der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}(t)$ ist ein Tangentenvektor der Bahnkurve zur Zeit t :

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t},$$

für infinitesimal kleines Δt gilt genähert

$$\dot{\mathbf{r}}(t) \Delta t \approx \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

und man schreibt für die Differentiale

$$d\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}(t) dt = \mathbf{r}(t + dt) - \mathbf{r}(t).$$

Beispiel: Massenpunkt auf einer Kreisbahn

$$\begin{aligned} x_1(t) &= R \cos \left\{ 2\pi \frac{t}{T} \right\} \\ x_2(t) &= R \sin \left\{ 2\pi \frac{t}{T} \right\} \quad \text{oder} \quad \mathbf{r}(t) = R \begin{pmatrix} \cos\{\omega t\} \\ \sin\{\omega t\} \\ 0 \end{pmatrix} \\ x_3(t) &= 0 \end{aligned}$$

mit dem Radius R , der Umlaufzeit T und der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$. Dann gilt, vergl. Abb. 1.9,

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = R \begin{pmatrix} -\omega \sin\{\omega t\} \\ \omega \cos\{\omega t\} \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $|\dot{\mathbf{r}}| = R\omega = 2\pi R/T = \text{konstant}$ und der Vektor der Geschwindigkeit steht senkrecht auf dem Ortsvektor

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) &= \sum_{j=1}^3 x_j(t) \dot{x}_j(t) \\ &= -R^2 \omega \cos\{\omega t\} \sin\{\omega t\} + R^2 \omega \sin\{\omega t\} \cos\{\omega t\} = 0. \end{aligned}$$

Dies läßt sich auch aus dem konstanten Betrag des Ortsvektors ableiten

$$|\mathbf{r}(t)|^2 = R^2 \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = 2\mathbf{r}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)$$

und es gilt $\mathbf{r}(t) \perp \dot{\mathbf{r}}(t)$. In der Physik verwendet man häufig die Bezeichnungen

$\mathbf{r}(t)$	Bahnkurve
$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$	Geschwindigkeit
$\mathbf{b}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$	Beschleunigung.

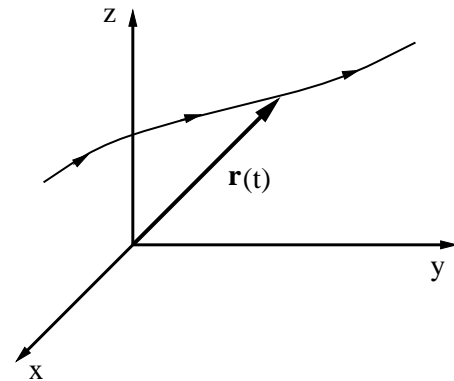


Abb. 1.7 Bahnkurve eines Massenpunktes

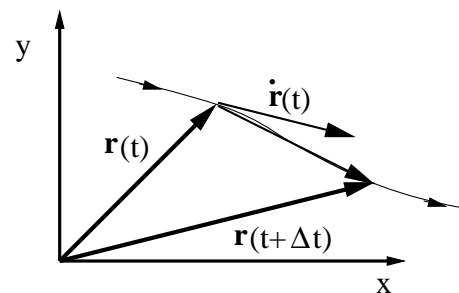


Abb. 1.8 Tangentenvektor der Geschwindigkeit

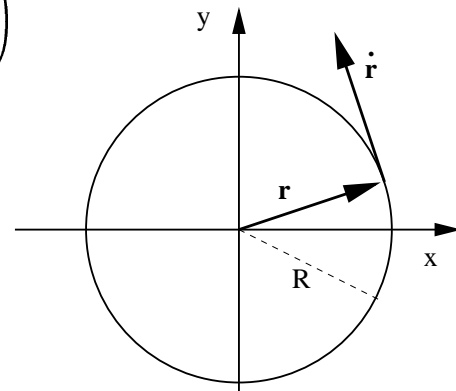


Abb. 1.9 Kreisbahn mit tangentialer Geschwindigkeit

1.3 Spezielle Bahnkurven eines Massenpunktes

A) Konstante Geschwindigkeit

Es sei $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}_0 = \text{konstant}$, dann ist

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) &= \int_{t_0}^t \dot{\mathbf{r}}(t') dt' \\ &= \int_{t_0}^t \mathbf{v}_0 dt' \\ &= \mathbf{v}_0(t - t_0), \end{aligned}$$

und die Bahnkurve ist eine Gerade der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{v}_0(t - t_0) \\ &= \mathbf{v}_0 t + \mathbf{c} \end{aligned}$$

mit $\mathbf{c} = \mathbf{r}(t_0) - \mathbf{v}_0 t_0$, vergl. Abb. 1.10.

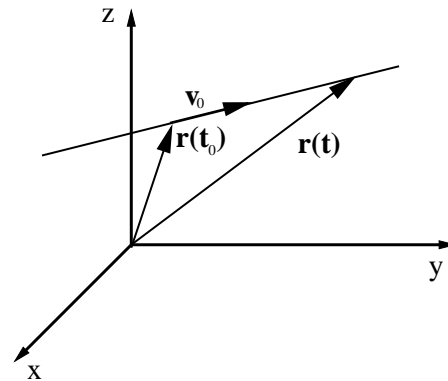


Abb. 1.10 Geradlinig gleichförmige Bewegung

B) Konstante Beschleunigung

Es sei $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{b}_0 = \text{konstant}$, dann ist

$$\dot{\mathbf{r}}(t) - \dot{\mathbf{r}}(t_0) = \int_{t_0}^t \ddot{\mathbf{r}}(t') dt' = \mathbf{b}_0(t - t_0) \quad \text{oder} \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \mathbf{b}_0(t - t_0)$$

und

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) = \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t') dt' = \int_{t_0}^t [\mathbf{v}(t_0) + \mathbf{b}_0(t' - t_0)] dt'.$$

Daraus erhält man die Bahnkurve

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{v}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{b}_0(t - t_0)^2 \\ &= \mathbf{a} + \mathbf{c}t + \frac{1}{2}\mathbf{b}_0t^2 \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{r}(t_0) - \mathbf{v}(t_0)t_0 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_0t_0^2 \\ \mathbf{c} &= \mathbf{v}(t_0) - \mathbf{b}_0t_0. \end{aligned}$$

C) Rotation um eine Drehachse durch den Ursprung

Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}(t)$ gibt die Richtung der Drehachse an und der Betrag $|\vec{\omega}|$ die Kreisfrequenz. Den Ortsvektor zerlegen wir gemäß Abb. 1.11

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{p}(t) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \mathbf{r}_0 \parallel \vec{\omega} \\ \mathbf{p} \perp \vec{\omega} \end{cases}$$

dann ist $\vec{\omega}(t) dt$ der in der Zeit dt ausgeführte Drehwinkel und es gilt wegen $\vec{\omega} \parallel \mathbf{r}_0$

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= d\mathbf{p} = \vec{\omega}(t) dt \times \mathbf{p} \\ &= \vec{\omega}(t) dt \times (\mathbf{p} + \mathbf{r}_0) \\ &= \vec{\omega}(t) dt \times \mathbf{r}(t). \end{aligned}$$

Also gilt

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \vec{\omega}(t) \times \mathbf{r}(t)$$

und

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}(t) &= \frac{d}{dt}(\vec{\omega}(t) \times \mathbf{r}(t)) \\ &= \dot{\vec{\omega}} \times \mathbf{r} + \vec{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} \\ &= \dot{\vec{\omega}} \times \mathbf{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}). \end{aligned}$$

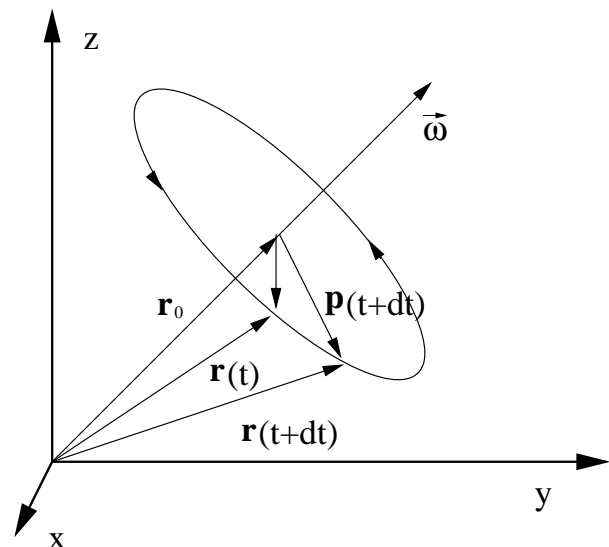


Abb. 1.11 Rotationsbewegung

Beispiel: Bei einer Drehung um die z -Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$, $\omega > 0$, gilt für $\mathbf{r} = (x, y, z)$

$$\dot{\mathbf{r}} = \vec{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |\dot{\mathbf{r}}| = \omega \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{r}} \perp \mathbf{r} \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{r}} \perp \vec{\omega}$$

und es folgt wegen $\dot{\vec{\omega}} = 0$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \vec{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -\omega^2 x \\ -\omega^2 y \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 \mathbf{r}_\perp \quad \text{mit} \quad \mathbf{r}_\perp = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

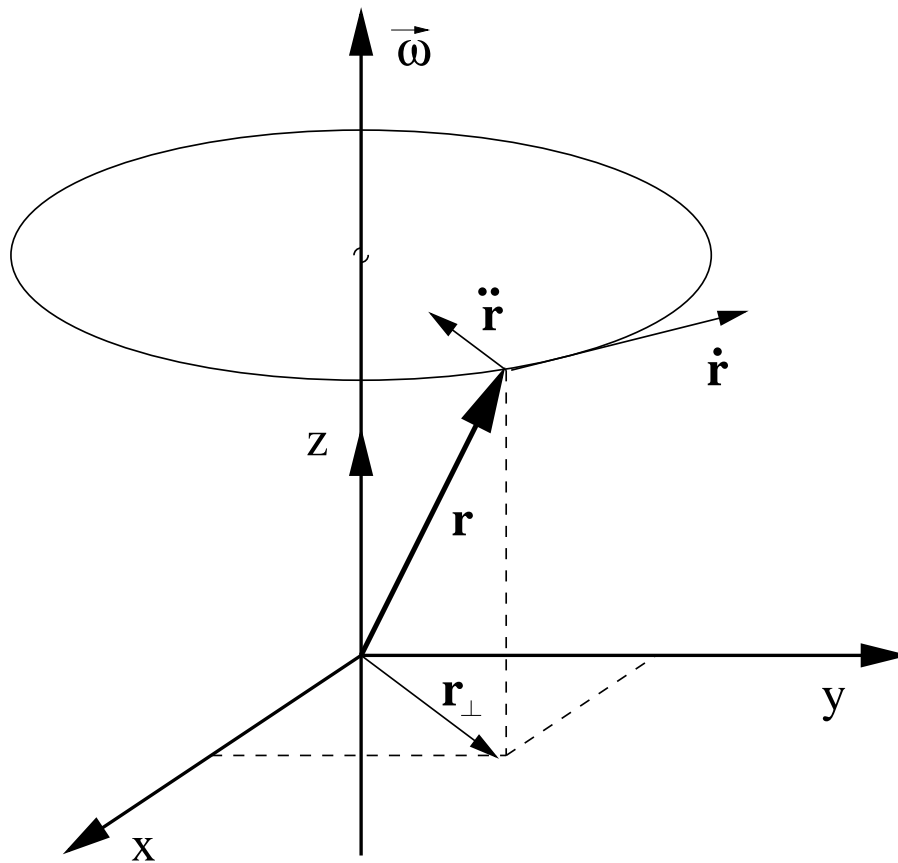


Abb. 1.12 Kreisbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit

1.4 Axiome der Mechanik

Für eine begrenzte Gruppe von Experimenten, die wir mit dem Begriff „klassische Mechanik“ umschreiben, führen wir aus Beobachtungen abgeleitete Axiome ein. Auf deren Grundlage kann man bestimmte Verhaltensweisen massebehafteter Körper berechnen und durch Messungen überprüfen. Ein wesentliches Element sind hierbei idealisierte Vorstellungen, die in der Natur nur näherungsweise erfüllt sind, aber die mathematische Beschreibung stark vereinfachen. So behandeln wir hier reale Körper als sogenannte Massenpunkte, die einen Körper der Masse m allein durch Angabe seines Ortes $\mathbf{r}(t)$ zur Zeit t beschreiben. Im Falle unseres Planetensystems etwa geht man zunächst von Planeten als Massenpunkte aus und berechnet ihre Bahnkurven. Anschließend kann man die Theorie durch Betrachtung der Planeten als starre Körper oder deformierbare Körper verbessern.

1. **Trägheitsgesetz:** Wir setzen voraus, daß es ein von den Massen unabhängiges Koordinatensystem gibt, welches wir als „absoluten Raum“ bezeichnen, in dem sich ein Massenpunkt entweder in Ruhe befindet oder sich gleichförmig auf einer geradlinigen Bahn bewegt, wenn auf ihn keine Kräfte wirken. Die Bahnkurve hat dann die Form

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{c} \quad \text{mit konstantem } \mathbf{v}_0 \text{ und } \mathbf{c}.$$

Wir setzen ferner eine „absolute Zeit“ voraus, die für alle übrigen Koordinatensysteme des Ortsraumes gelten soll, auch wenn diese sich gegenüber dem absoluten Raum bewegen. Dieses Axiom entspricht näherungsweise den Beobachtungen, läßt sich andererseits aber nicht nachweisen, weil alle Koordinatensysteme an Massen fixiert sind, die sich zueinander unterschiedlich bewegen.

2. **Newtonsches Grundgesetz:** Greift an einen Massenpunkt eine Kraft \mathbf{F} an, so ist seine Beschleunigung proportional zu \mathbf{F} und der Proportionalitätsfaktor heißt Masse

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \quad \text{oder} \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} \quad \text{mit} \quad \mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}},$$

wobei \mathbf{p} den Impuls des Massenpunktes bezeichnet. Die Einheit der Kraft ist N (Newton), während der Ort in m (Metern) und die Zeit in s (Sekunden) gemessen wird. Durch Messung der Beschleunigung und der Kraft wird jedem Massenpunkt eine Masse m – die sogenannte „träge Masse“ zugeordnet und es gilt für die Einheit der Masse

$$1 \text{ kg} = 1 \text{ Nm}^{-1}\text{s}^2.$$

3. **Actio gleich Reactio Prinzip:** Übt ein Massenpunkt m_1 auf einen Massenpunkt m_2 eine Kraft \mathbf{F}_{12} aus, so ist diese entgegengesetzt gleich der Kraft, die m_2 auf m_1 ausübt: $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$.
4. **Superpositionsprinzip der Kräfte:** Wirken auf einen Massenpunkt mehrere Kräfte, so addieren sich diese wie Vektoren. Kräfte haben auch die Transformationseigenschaften von Vektoren.
5. **Gravitationsgesetz:** Ein Massenpunkt m_2 am Ort \mathbf{r}_2 übt auf einen Massenpunkt m_1 am Ort \mathbf{r}_1 die Kraft aus, vergl. Abb. 1.13,

$$\mathbf{G}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

Hier bezeichnet $G = 6,67259 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ die Gravitationskonstante.

Ein Koordinatensystem, in dem die fünf Axiome gelten, wird als „Inertialsystem“ bezeichnet. Weil man neben kartesischen Koordinaten auch schiefwinkelige oder krummlinige Koordinaten verwenden kann, spricht man allgemeiner von einem Inertialsystem als Bezugssystem.

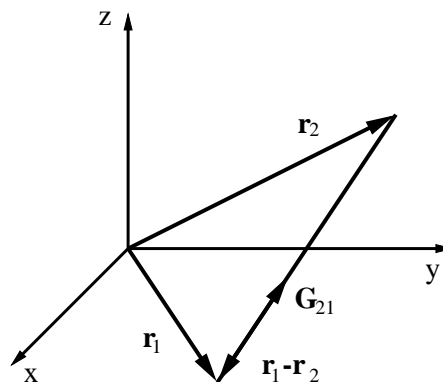


Abb. 1.13 Richtung der Kraft beim Gravitationsgesetz

1.5 Einfache Anwendungen der Axiome

A) Gewicht eines Massenpunktes auf der Erdoberfläche

Betrachtet man die Erde näherungsweise als eine Kugel mit kugelsymmetrischer Massenverteilung im Innern, so läßt sich zeigen, daß die Anziehungskraft auf einen Massenpunkt der Masse m außerhalb der Kugel die gleiche ist wie bei einem Massenpunkt der Erdmasse M im Mittelpunkt der Kugel. Ist R der Erdradius, so gilt für das Gewicht \mathbf{G} des Massenpunktes m am Ort \mathbf{r} mit $|\mathbf{r}| \geq R$

$$\mathbf{G} = -GMm \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \approx m\mathbf{g} \quad \text{mit} \quad \mathbf{g} = -\frac{GM}{R^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad \text{für} \quad |\mathbf{r}| - R \ll R.$$

Die Erdbeschleunigung beträgt ungefähr

$$g = |\mathbf{g}| = \frac{GM}{R^2} = 9,81 \text{ ms}^{-2}.$$

B) Schwere und träge Masse

Ebenso wie das Newtonsche Grundgesetz kann auch das Gravitationsgesetz als Meßvorschrift zur Bestimmung der Masse von Massenpunkten dienen. Zum Vergleich der so definierten „schweren Masse“ m_s mit der „trägen Masse“ m_t betrachten wir die Beschleunigung des Massenpunktes unter seinem eigenen Gewicht, indem wir die z -Achse senkrecht zur Erdoberfläche wählen $\mathbf{r} = (0, 0, z)$ mit $|\mathbf{r}| - R \ll R$ und $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$

$$m_t \ddot{z} = -m_s g.$$

Das von G. Galilei ausgeführte Experiment ergab die gleiche Beschleunigung für verschiedene Körper, woraus wir folgern, daß für alle Massenpunkte das Verhältnis von schwerer zu träger Masse gleich ist. A. Einstein hat diese Erkenntnis zum Ausgangspunkt seiner allgemeinen Relativitätstheorie gemacht.

C) Wurfparabel

Sind Höhe und Weite des Wurfes klein gegen den Erdradius, kann man näherungsweise die Erdoberfläche als eben annehmen und die Erdbeschleunigung hat mit der z -Achse senkrecht zur Erdoberfläche die Form

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}.$$

Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = m\mathbf{g} \quad \text{oder} \quad \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{c}t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2.$$

Wir wählen als Anfangsbedingung die x -Achse in Wurfriechtung

$$\mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ v_z \end{pmatrix}.$$

Also ist $\mathbf{a} = 0$ und $\mathbf{c} = \dot{\mathbf{r}}(0)$ und die spezielle Lösung lautet

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x t \\ 0 \\ v_z t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}.$$

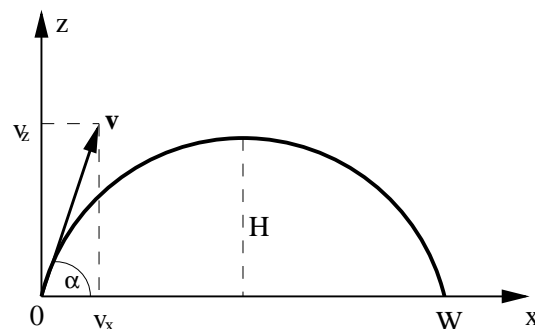


Abb. 1.14 Höhe H und Weite W einer Wurfparabel

Setzt man jetzt $t = x/v_x$ in $z(t)$ ein, so erhält man eine Parabel, vergl. Abb. 1.14,

$$z(x) = \frac{v_z}{v_x}x - \frac{g}{2v_x^2}x^2.$$

Die Weite des Wurfes ergibt sich aus $z(W) = 0$ zu $W = 2v_x v_z/g$. Die Höhe des Wurfes H berechnet sich aus der waagerechten Tangente der Wurfparabel

$$0 = \frac{dz}{dx} = \frac{v_z}{v_x} - \frac{g}{v_x^2}x \quad \text{an der Stelle} \quad x_H = \frac{v_x v_z}{g}$$

und man erhält

$$H = z(x_H) = \frac{v_z^2}{2g}.$$

Führt man den Wurfwinkel α und die Anfangsgeschwindigkeit v wie in Abb. 1.14 ein, so gilt

$$v_x = v \cos \alpha \quad \text{und} \quad v_z = v \sin \alpha$$

und die Weite ist als Funktion von α gegeben durch

$$W(\alpha) = \frac{v^2}{g} 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v^2}{g} \sin\{2\alpha\}.$$

Daraus kann man die maximale Weite bei Variation des Wurfwinkels berechnen

$$0 = \frac{dW(\alpha)}{d\alpha} = \frac{2v^2}{g} \cos\{2\alpha\} \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

und die maximale Weite beträgt $W(\pi/4) = v^2/g$.

D) Drehimpulssatz

Mit Hilfe des Impulses $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$ definiert man für einen Massenpunkt der Masse m den Drehimpuls durch, vergl. Abb. 1.15,

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}.$$

Aus dem Newtonschen Grundgesetz

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}\mathbf{p}$$

berechnen wir

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}\mathbf{p} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) - \underbrace{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p}}_{=0}.$$

Das Drehmoment ist definiert durch

$$\mathbf{D} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

und man erhält den Drehimpulssatz als Gesetz der Drehbewegungen

$$\mathbf{D} = \frac{d}{dt}\mathbf{l} = \dot{\mathbf{l}},$$

wonach das Drehmoment gleich der zeitlichen Änderung des Drehimpulses ist. Dieses Gesetz entspricht dem Newtonschen Grundgesetz für die translatorischen Bewegungen $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$.

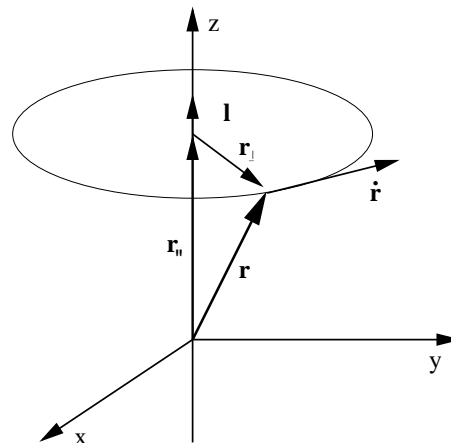


Abb. 1.15 Drehimpuls \mathbf{l} bei Drehung um die z -Achse

E) Energiesatz

Wird in einem Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ein Massenpunkt entlang einer Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ um ein infinitesimales Wegstück $d\mathbf{r}$ bewegt, so berechnet sich die zu leistende Arbeit aus der Komponente der Kraft in Richtung $d\mathbf{r}$, vergl. Abb. 1.16,

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{F}| |d\mathbf{r}| \cos \gamma,$$

wobei γ der Winkel zwischen \mathbf{F} und $d\mathbf{r}$ ist, vergl. Abb. 1.16. Greift speziell die Kraft senkrecht zu $d\mathbf{r}$ an, so ist die zu leistende Arbeit Null. Insgesamt ist auf dem Wege von $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$ nach $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$ die zu leistende Arbeit durch das Arbeitsintegral gegeben

$$A_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

Dieses Linienintegral kann wegen $d\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}(t) dt$ auch in der Form

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt$$

berechnet werden.

Hängt das Arbeitsintegral nicht vom Wege sondern nur von Anfangs- und Endpunkt ab, so heißt das Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ konservativ. Dann existiert ein Potential $U(\mathbf{r})$, so daß $\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -dU$ gilt und man erhält für das Arbeitsintegral

$$A_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} dU(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2).$$

Bei konservativen Kräften ist die Summe aus kinetischer Energie $T(t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2(t)$ und potentieller Energie $U(\mathbf{r}(t))$ eine Konstante der Bewegung.

□ Zum Beweise multiplizieren wir das Newtonsche Grundgesetz mit der Geschwindigkeit

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)$$

und integrieren von t_1 bis t_2

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt = \int_{\mathbf{r}(t_1)}^{\mathbf{r}(t_2)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}(t_1)) - U(\mathbf{r}(t_2)) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} d\left[\frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\right] = \int_{t_1}^{t_2} dT(t) = T(t_2) - T(t_1). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$T(t_1) + U(\mathbf{r}(t_1)) = T(t_2) + U(\mathbf{r}(t_2))$$

oder $E = T + U$ ist eine Konstante der Bewegung. ■

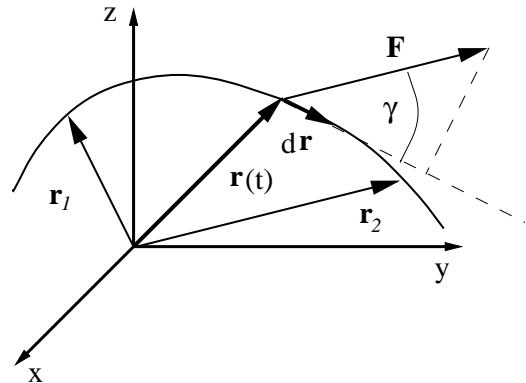


Abb. 1.16 Bewegung auf einer vorgegebenen Wegstrecke

1.6 Einfache mechanische Systeme

A) Idealisertes ebenes Pendel

Ein Massenpunkt der Masse m sei mit einer masselosen Stange der Länge l derart verbunden, daß er sich nur auf einem Kreis um den Ursprung in der x - z -Ebene bewegen kann, vgl. Abb. 1.17. An ihn greift die Gewichtskraft \mathbf{F} an und die Arbeit längs eines infinitesimalen Wegstückes $d\mathbf{r}$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} ; \quad d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ dz \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -mg dz$. Die Integration auf dem Kreisbogen von \mathbf{r}_1 nach \mathbf{r}_2 ergibt für die potentielle Energie mit $U(\mathbf{r}_1) = 0$ nach Abschn. 1.5 E

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{-l}^{-l \cos \varphi} -mg dz \\ &= -mgl(1 - \cos \varphi) = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2). \end{aligned}$$

Wir führen ebene Polarkoordinaten $r = l$ und $\varphi(t)$ ein

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} l \sin \varphi \\ 0 \\ -l \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} l \cos \varphi \\ 0 \\ \dot{\varphi} l \sin \varphi \end{pmatrix}$$

und erhalten für die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2$$

und für die Summe E aus kinetischer und potentieller Energie

$$E = T + U(\mathbf{r}_2) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos \varphi).$$

Anwenden des Energiesatzes von Abschn. 1.5 ergibt dann

$$0 = \frac{dE}{dt} = ml^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + mgl \dot{\varphi} \sin \varphi = ml^2 \dot{\varphi} \left(\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi \right).$$

Weil diese Gleichung zu allen Zeiten t erfüllt sein muß, resultiert die Pendelgleichung

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{l} \sin \varphi(t) = 0.$$

Für kleine Ausschläge $|\varphi(t)| \ll \pi/2$ setzen wir genähert $\sin \varphi \approx \varphi$ und erhalten die Schwingungsgleichung

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{l} \varphi(t) = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0 \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

mit der Schwingungsfrequenz ω und der allgemeinen Lösung

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos\{\omega t + \alpha\} \quad \text{mit} \quad \ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi_0 \cos\{\omega t + \alpha\},$$

die die beiden Integrationskonstanten φ_0 und α enthält. Die Geschwindigkeit des Massenpunktes ist $v = |\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = l|\dot{\varphi}|$. Aus der allgemeinen Lösung erhält man mit zwei Anfangsbedingungen eine spezielle Lösung. Wird das Pendel etwa zur Zeit $t = 0$ um den Winkel φ_0 ausgelenkt $\varphi(0) = \varphi_0 \cos \alpha$ und ohne Geschwindigkeit losgelassen $\dot{\varphi}(0) = 0$, so gilt speziell $\alpha = 0$ und $\varphi(t) = \varphi_0 \cos\{\omega t\}$.

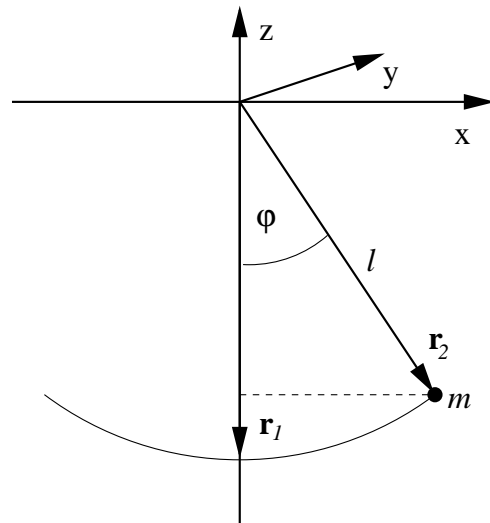


Abb. 1.17 Ebenes Pendel

B) Raketenantrieb

Beim Raketenantrieb werden Treibgase mit einer bestimmten Geschwindigkeit v_G nach hinten ausgestoßen, so daß die Masse der Rakete $M(t)$ zeitabhängig ist. Es sei $M_0 = M(0)$ die Anfangsmasse zu Zeit $t = 0$ und $M_L = M(T)$ die Masse der Rakete mit leeren Tanks nach Brennschluß zur Zeit $t = T$. Wir setzen einen konstanten Masseausstoß pro Zeiteinheit

$$K = -\frac{dM(t)}{dt} > 0 \quad \text{mit} \quad K = \text{konstant}$$

voraus und berechnen die Masse der Rakete zur Zeit $0 \leq t \leq T$

$$M(t) - M(0) = \int_0^t \frac{dM(t')}{dt'} dt' = - \int_0^t K dt' = -Kt$$

und erhalten

$$M(t) = M_0 - Kt \quad \text{mit} \quad M(T) = M_0 - KT = M_L.$$

Nach dem Newtonschen Grundgesetz entspricht die Kraft auf die Rakete F_R der zeitlichen Änderung des Raketenimpulses p_R in x -Richtung

$$F_R = \frac{d}{dt} p_R = \frac{d}{dt} [M(t)\dot{x}(t)]$$

und für das im Zeitintervall dt ausgestoßene Treibgas $dM_G = K dt$ gilt entsprechend

$$F_G dt = dp_G = dM_G[\dot{x} - v_G] = K dt[\dot{x} - v_G].$$

Das Actio gleich Reactio Prinzip $F_R = -F_G$ liefert

$$\frac{d}{dt} [M(t)\dot{x}(t)] = -K[\dot{x} - v_G] \quad \text{bzw.} \quad M\ddot{x} + \dot{M}\dot{x} + K\dot{x} = K v_G$$

oder wegen $\dot{M}\dot{x} + K\dot{x} = 0$

$$\ddot{x}(t) = \frac{K v_G}{M(t)} = \frac{K v_G}{M_0 - Kt}.$$

Integrieren liefert mit $u = Kt/M_0$

$$\int_0^T \ddot{x}(t) dt = \frac{K v_G}{M_0} \int_0^T \frac{dt}{1 - \frac{K}{M_0}t} = v_G \int_0^{\frac{KT}{M_0}} \frac{du}{1 - u}$$

oder

$$\dot{x}(T) - \dot{x}(0) = -v_G \ln\{1 - u\} \Big|_0^{\frac{KT}{M_0}} = -v_G \ln\left\{1 - \frac{KT}{M_0}\right\} = v_G \ln\left\{\frac{M_0}{M_L}\right\}.$$

In der Technik ist M_0/M_L kleiner als 10 und die Gasgeschwindigkeit höchstens $v_G = 2000 \text{ ms}^{-1}$, so daß die maximal erreichbare Geschwindigkeit $\dot{x}(T) - \dot{x}(0)$ etwa $2 \cdot 10^3 \ln\{10\} \text{ ms}^{-1} = 4.6 \cdot 10^3 \text{ ms}^{-1}$ beträgt.

Die Fluchtgeschwindigkeit v_{F1} ist die Mindestgeschwindigkeit, die erreicht werden muß, damit ein Körper nicht auf die Erdoberfläche zurückfällt oder eine geschlossene Bahnkurve um die Erde beschreibt. Dazu muß die kinetische Energie $\frac{1}{2}mv^2$ mindestens gleich der potentiellen Energie an der Erdoberfläche $GM_E m/R = gRm$ sein, wobei G die Gravitationskonstante, M_E die Erdmasse, R den Erdradius und g die Erdbeschleunigung auf der Erdoberfläche bezeichnen. Also gilt für die Fluchtgeschwindigkeit v_{F1}

$$\frac{1}{2}mv_{F1}^2 = gRm \quad \text{oder} \quad v_{F1} = \sqrt{2gR} = 11.2 \cdot 10^3 \text{ ms}^{-1}$$

mit $R = 6.38 \cdot 10^6 \text{ m}$. Um das Schwerfeld der Erde endgültig zu verlassen, sind also mit herkömmlichen Raketenmotoren mehrstufige Raketen erforderlich.

2 Gedämpfte Schwingungen

2.1 Freie gedämpfte Schwingungen

Im eindimensionalen Fall führt das Newtonsche Grundgesetz auf die Bewegungsgleichung eines elastisch gebundenen Massenpunktes der Masse m

$$m\ddot{x}(t) = F = -cx - \beta\dot{x},$$

wobei $x(t)$ den Ort des Teilchens zur Zeit t oder die Bahnkurve und F die auf den Massenpunkt ausgeübte Kraft bezeichnet. Sie setzt sich hier aus einer der Auslenkung $x(t)$ proportionalen elastischen Rückstellkraft $-cx(t)$ und einer zur Geschwindigkeit proportionalen Reibungskraft $-\beta\dot{x}(t)$ zusammen. Die Konstanten $c > 0$ und $\beta > 0$ heißen Federkonstante bzw. Reibungskoeffizient. Die spezielle Form der Kraft ist für die experimentell beobachteten Oszillatoren eine Idealisierung, die jedoch vielfach eine gute Näherung darstellt. Zur Vereinfachung der Rechnung und zum leichteren Vergleich unterschiedlicher Oszillatoren führen wir eine Schwingungsfrequenz ω_0 und die dimensionslose Güte Q durch

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m} \quad \text{und} \quad Q = \frac{m\omega_0}{\beta}$$

ein und erhalten die Bewegungsgleichung in der Form

$$\ddot{x}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0.$$

Zur Lösung dieser linearen, homogenen, gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten machen wir den Ansatz

$$x(t) = x(0) \exp\{\lambda t\} \quad \text{mit} \quad \dot{x}(t) = \lambda x(t) \quad \text{und} \quad \ddot{x}(t) = \lambda^2 x(t)$$

und erhalten

$$\left(\lambda^2 + \lambda \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right)x(t) = 0.$$

Da diese Gleichung für alle Zeiten erfüllt sein soll, muß der Parameter λ eine Lösung der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 + \lambda \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2 = 0$$

sein und es gilt

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2}{4Q^2} - \omega_0^2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2} = \begin{cases} \text{reell} & \text{für } Q < \frac{1}{2} \\ -\omega_0 & \text{für } Q = \frac{1}{2} \\ \text{komplex} & \text{für } Q > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

A) Der Fall starker Dämpfung $Q < \frac{1}{2}$

Wir erhalten zwei verschiedene reelle Wurzeln der quadratischen Gleichung und die allgemeine Lösung enthält die zwei Integrationskonstanten a und b

$$\begin{aligned} x(t) &= a \exp\{\lambda_1 t\} + b \exp\{\lambda_2 t\} \\ &= \exp\left\{-\frac{\omega_0}{2Q} t\right\} \left[a \exp\left\{\frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2} t\right\} + b \exp\left\{-\frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2} t\right\} \right]. \end{aligned}$$

Es werden speziell die folgenden Anfangsbedingungen betrachtet:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 & \text{so folgt} & & a + b &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= v_0, & & & a\lambda_1 + b\lambda_2 &= v_0. \end{aligned}$$

Einsetzen von λ_1 und λ_2 liefert

$$-\frac{\omega_0}{2Q}x_0 + \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2}(a-b) = v_0$$

und man erhält, vergl. Abb. 2.1,

$$\begin{aligned} a+b &= x_0 \\ a-b &= \frac{x_0 + \frac{2Q}{\omega_0}v_0}{\sqrt{1-4Q^2}} \quad \text{bzw.} \end{aligned} \quad \begin{aligned} a &= \frac{x_0}{2} \left[1 + \frac{1 + \frac{2Q}{\omega_0} \frac{v_0}{x_0}}{\sqrt{1-4Q^2}} \right] \\ b &= \frac{x_0}{2} \left[1 - \frac{1 + \frac{2Q}{\omega_0} \frac{v_0}{x_0}}{\sqrt{1-4Q^2}} \right]. \end{aligned}$$

B) Der Fall kritischer Dämpfung $Q = \frac{1}{2}$

In diesem Fall liefert der Lösungsansatz nur eine reelle Lösung

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_0 \quad \text{mit} \quad x_1(t) = a \exp\{-\omega_0 t\}.$$

Ein zweite linear unabhängige Lösung ist

$$x_2(t) = bt \exp\{-\omega_0 t\}.$$

□ Zum Beweise bilden wir die Ableitungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= \frac{x_2}{t} - \omega_0 x_2 \\ \ddot{x}_2(t) &= -\omega_0 \frac{x_2}{t} - \omega_0 \dot{x}_2 = -\omega_0 \dot{x}_2 - \omega_0^2 x_2 - \omega_0 \dot{x}_2 \end{aligned}$$

und erhalten

$$\ddot{x}_2 + 2\omega_0 \dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = 0$$

die Schwingungsgleichung im Falle $Q = \frac{1}{2}$. ■

Die allgemeine Lösung lautet dann mit den beiden Integrationskonstanten a und b

$$x(t) = (a + bt) \exp\{-\omega_0 t\}.$$

Speziell mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ findet man, vergl. Abb. 2.1,

$$\begin{aligned} x(0) &= a = x_0 \\ \dot{x}(0) &= b - \omega_0 a = v_0 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} a &= x_0 \\ b &= v_0 + x_0 \omega_0. \end{aligned}$$

C) Der Fall schwacher Dämpfung $Q > \frac{1}{2}$

In diesem Fall sind die beiden Wurzeln λ_1 und λ_2 komplex und wir erhalten mit $i^2 = -1$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega \quad \text{mit} \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} < \omega_0.$$

Die allgemeine Lösung beschreibt eine gedämpfte Schwingung

$$x(t) = \exp\left\{-\frac{\omega_0}{2Q}t\right\} \left[a \exp\{i\omega t\} + b \exp\{-i\omega t\} \right]$$

mit der reellen Schwingungsfrequenz ω und den beiden komplexen Integrationskonstanten a und b . Verwendet man die Formel von Euler

$$\exp\{i\omega t\} = \cos\{\omega t\} + i \sin\{\omega t\} \quad \text{und} \quad \exp\{-i\omega t\} = \cos\{\omega t\} - i \sin\{\omega t\},$$

so ergibt sich die reelle Form der gedämpften Schwingung

$$x(t) = \exp\left\{-\frac{\omega_0}{2Q}t\right\} \left[A \cos\{\omega t\} + B \sin\{\omega t\} \right]$$

mit den zwei reellen Konstanten

$$A = a + b \quad \text{und} \quad B = i(a - b).$$

Führt man neue Integrationskonstanten C und δ durch

$$\begin{aligned} A &= C \cos \delta \\ B &= C \sin \delta \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \tan \delta = \frac{B}{A} \quad \text{und} \quad C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

ein, und verwendet die Beziehung

$$A \cos\{\omega t\} + B \sin\{\omega t\} = C [\cos\{\omega t\} \cos \delta + \sin\{\omega t\} \sin \delta] = C \cos\{\omega t - \delta\},$$

so erhält man eine andere Form der allgemeinen Lösung

$$x(t) = C \exp\left\{-\frac{\omega_0}{2Q}t\right\} \cos\{\omega t - \delta\}.$$

Die spezielle Lösung, die die beiden Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ erfüllt, erhält man aus

$$x(0) = A = x_0 \quad \text{und} \quad \dot{x}(0) = -\frac{\omega_0}{2Q}x_0 + B\omega = v_0$$

zu, vergl. Abb. 2.1,

$$x(t) = x_0 \exp\left\{-\frac{\omega_0}{2Q}t\right\} \left[\cos\{\omega t\} + \left(\frac{v_0}{x_0\omega} + \frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}}\right) \sin\{\omega t\} \right].$$

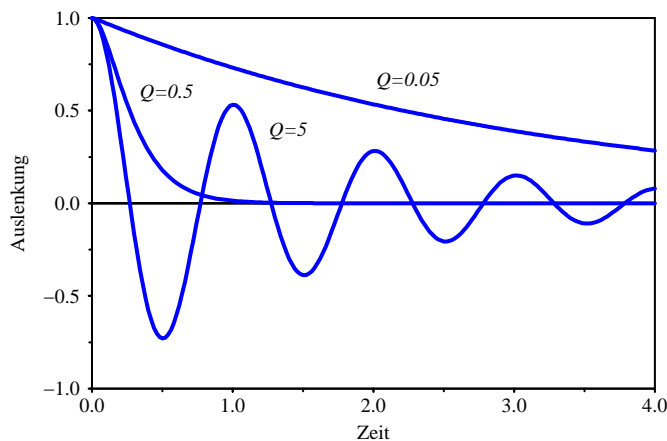


Abb. 2.1 Auslenkung $x(t)/x_0$ für $v_0 = 0$ in Abhängigkeit von der Zeit t/T mit $T = 2\pi/\omega_0$ für drei Güten Q .

Die Energie des Massenpunktes ist gegeben durch

$$E(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2(t)$$

und nimmt wegen der Dämpfung zeitlich ab. Bei den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = 0$ ist die Energie zur Zeit $t = 0$: $E(0) = m\omega_0^2x_0^2/2$. Die Abb. 2.2 zeigt die Energieabnahme im Falle schwacher Dämpfung mit der Güte $Q = 5$.

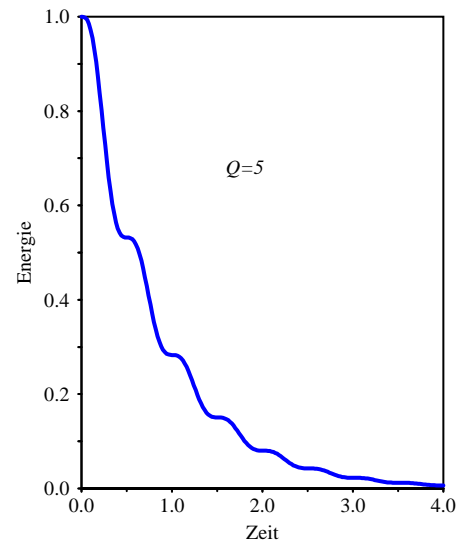


Abb. 2.2 Abnahme der Energie $E(t)/E(0)$ bei schwacher Dämpfung $Q = 5$.

2.2 Erzwungene Schwingungen

Wird auf einen elastisch gebundenen Massenpunkt der Masse m eine periodische Kraft $F(t) = F_0 \cos\{\omega t\}$ mit einer Kreisfrequenz $\omega > 0$ ausgeübt, so lautet die Bewegungsgleichung im eindimensionalen Fall bei Berücksichtigung einer Dämpfungskraft $-\beta\dot{x}(t)$

$$m\ddot{x}(t) = -cx(t) - \beta\dot{x}(t) + F_0 \cos\{\omega t\}$$

oder

$$\ddot{x}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = K_0 \cos\{\omega t\} \quad \text{mit} \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m} \quad ; \quad Q = \frac{m\omega_0}{\beta} \quad ; \quad K_0 = \frac{F_0}{m} > 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung setzt sich aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $x_h(t)$ nach Abschn. 2.1 und einer speziellen Lösung $x_s(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung zusammen: $x(t) = x_h(t) + x_s(t)$. Die beiden Integrationskonstanten von $x_h(t)$ können zur Erfüllung von zwei Anfangsbedingungen verwendet werden. Aus den Ergebnissen von Abschn. 2.1 und der Abb. 2.1 ist ersichtlich, daß die Lösung $x_h(t)$ der homogenen Differentialgleichung nach hinreichend langer Zeit abgeklungen ist und somit den sogenannten Einschwingvorgang beschreibt. Wir berechnen in diesem Abschnitt die spezielle Lösung $x_s(t)$, die nach dem Einschwingvorgang allein zu beobachten ist.

Die Rechnung läßt sich besonders einfach in komplexer Schreibweise durchführen. Dazu betrachten wir die komplexe Auslenkung

$$z(t) = x_s(t) + iy(t) \quad \text{mit} \quad x_s(t) = \text{Re}\{z(t)\}$$

als Lösung der komplexen Differentialgleichung

$$\ddot{z}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = K_0 \exp\{i\omega t\},$$

deren Realteil die zu lösende Differentialgleichung ist. Zur Lösung der komplexen Differentialgleichung machen wir den Ansatz

$$z(t) = z_0 \exp\{i\omega t\} \quad \text{mit} \quad \dot{z} = i\omega z \quad \text{und} \quad \ddot{z} = -\omega^2 z$$

und erhalten

$$\left[-\omega^2 + i\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2 \right] z_0 \exp\{i\omega t\} = K_0 \exp\{i\omega t\}.$$

Weil diese Gleichung zu allen Zeiten erfüllt sein muß, folgt

$$\left[-\omega^2 + i\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2 \right] z_0 = K_0 \quad \text{oder} \quad z_0 = \frac{K_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega \frac{\omega_0}{Q}}.$$

Wir zerlegen die komplexe Zahl z_0 in Betrag $a(\omega) = |z_0|$ und Phase $\phi(\omega)$

$$z_0(\omega) = a(\omega) \exp\{-i\phi\} \quad \text{mit} \quad a(\omega) = \frac{K_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \frac{\omega_0^2}{Q^2}}} \quad \text{und} \quad \tan \phi = \frac{\omega\omega_0}{Q(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

und erhalten die spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung in der Form

$$\begin{aligned} x_s(t) &= \text{Re}\{z(t)\} = \text{Re}\{z_0 \exp\{i\omega t\}\} = \text{Re}\{a(\omega) \exp\{i(\omega t - \phi)\}\} \\ &= a(\omega) \cos\{\omega t - \phi(\omega)\}. \end{aligned}$$

Sie stellt offenbar eine Schwingung mit der Frequenz ω , der Amplitude $a(\omega)$ und der Phase $\phi(\omega)$ dar. Interessant ist die Abhängigkeit der Amplitude $a(\omega)$ von der Kreisfrequenz ω der äußeren Kraft, vergl. Abb. 2.3. Diese sogenannte Resonanzkurve hat ihr Maximum an der Stelle der Resonanzfrequenz ω_R

$$\frac{da(\omega)}{d\omega} = 0 \quad \text{oder} \quad \omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

falls $Q > 1/\sqrt{2} \approx 0.7$ ist. Die Resonanzfrequenz ω_R ist also kleiner als die Schwingungsfrequenz des freien, schwach gedämpften Oszillators $\omega_f = \omega_0 \sqrt{1 - 1/4Q^2}$, vergl. Abschn. 2.1 C, und es gilt $\omega_R < \omega_f < \omega_0$. Die Abhängigkeit der Phase $\phi(\omega)$ von der Anregungsfrequenz ω ist in Abb. 2.4 wiedergegeben.

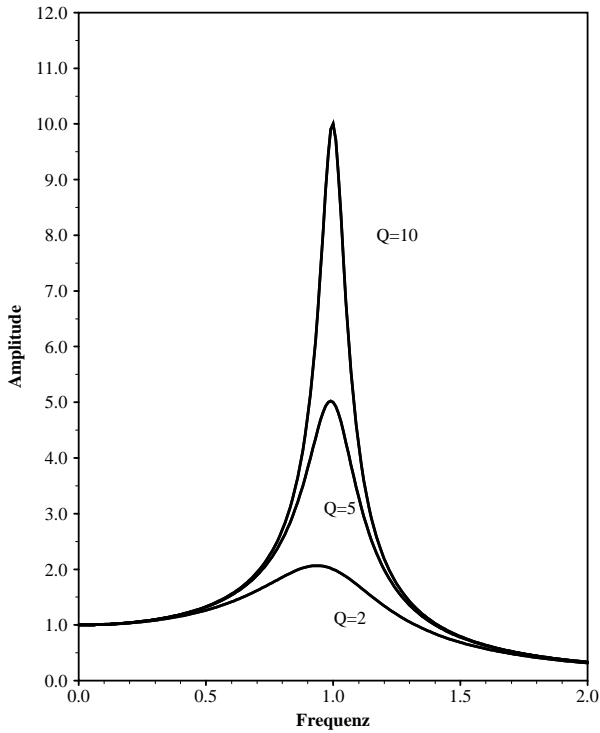


Abb. 2.3 Resonanz der Schwingungsamplituden für drei Güten Q . Aufgetragen ist die Amplitude durch K_0/ω_0^2 als Funktion von ω/ω_0 .

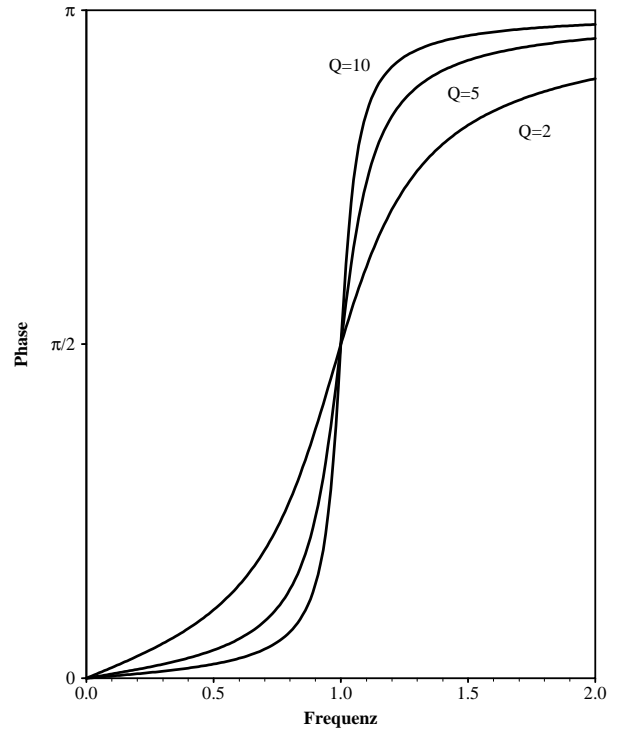


Abb. 2.4 Änderung der Phase für drei Güten Q . Aufgetragen ist die Phase im Bogenmaß als Funktion von ω/ω_0 .

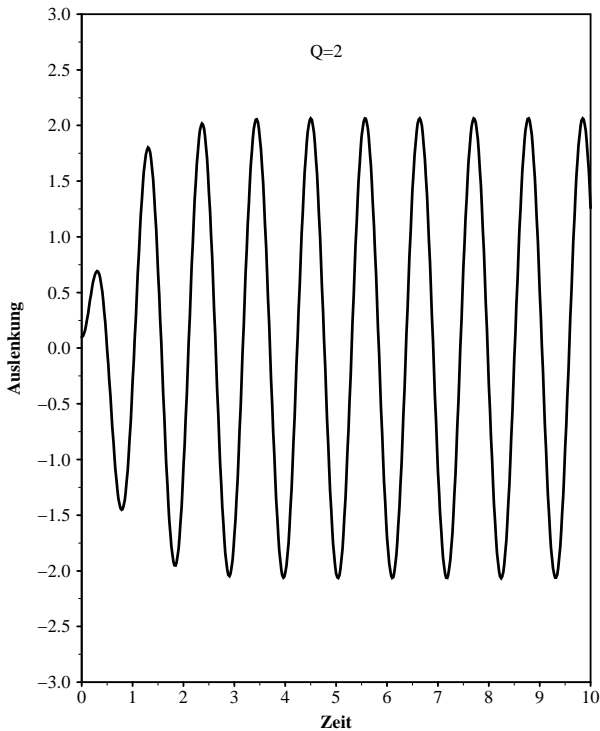


Abb. 2.5 Auslenkung erzwungener Schwingungen mit Einschwingvorgang und stationärer Schwingung bei Resonanz. Aufgetragen ist die Auslenkung dividiert durch K_0/ω_0^2 bei $\omega_0^2 x_0/K_0 = 0.1$ über der Zeit t/T mit $T = 2\pi/\omega_0$.

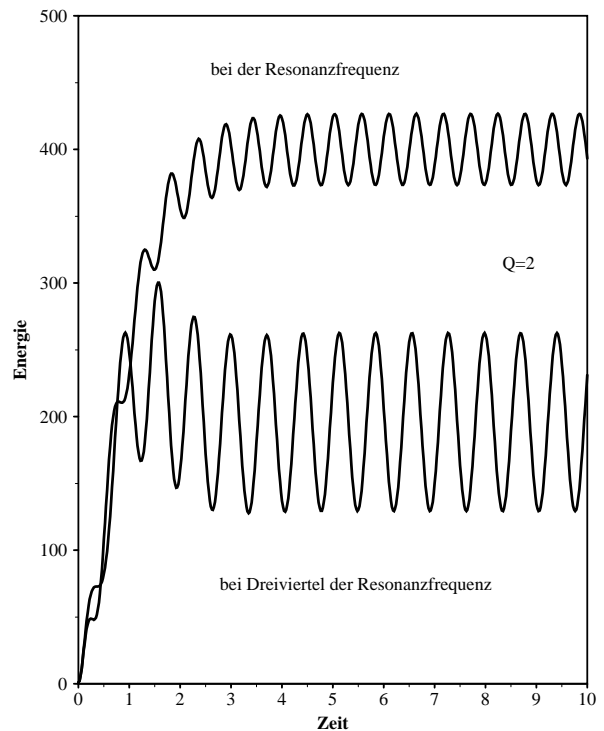


Abb. 2.6 Energie erzwungener Schwingungen bei der Güte $Q = 2$. Aufgetragen ist die Energie $E(t)/E(0)$ als Funktion von t/T mit $T = 2\pi/\omega_0$ einmal für $\omega = \omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - 1/(2Q^2)}$ und einmal für $\omega = 0.75\omega_R$ mit $\omega_0^2 x_0/K_0 = 0.1$.

2.3 Anharmonische Schwingungen

Die Auslenkung $x(t)$ des Massenpunktes beim harmonischen Oszillator ist eine Lösung einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung. Die allgemeine Lösung besteht aus zwei linear unabhängigen Lösungen und enthält zwei Integrationskonstanten, die durch zwei Anfangs- oder Randbedingungen bestimmt werden. Zu einem gegebenen Zeitpunkt t läßt die Angabe des Ortes $x(t)$ noch unterschiedliche Lösungen zu, die erst durch zusätzliche Angabe der Geschwindigkeit $v(t) = \dot{x}(t)$ zu einer eindeutigen Lösung führt. Die Festlegung von x und \dot{x} zu einer Zeit t legt dann bei konservativen Kräften die Energie fest und es gilt in kartesischen Koordinaten nach Abschn. 1.5 E für einen Massenpunkt der Masse m mit der potentiellen Energie $U(x)$

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + U(x).$$

Läßt man außer kartesischen Koordinaten auch krummlinige Koordinaten zu, etwa ebene Polarkoordinaten beim ebenen Pendel, so schreiben wir allgemeiner für die Bahnkurve und ihre Ableitung $q(t)$ und $\dot{q}(t)$. Die möglichen Lösungen der Bewegungsgleichung von Newton lassen sich dann auch im Phasenraum der beiden Koordinaten q und \dot{q} als Trajektorie darstellen, wobei die Zeit t als Kurvenparameter dient. Jedes System der Mechanik läßt sich allgemein in einer Mannigfaltigkeit von verallgemeinerten Koordinaten darstellen, und die konkrete Auswahl wird aufgrund der rechnerischen Einfachheit getroffen.

A) Harmonischer Oszillator

Als Beispiel seien die Trajektorien im Phasenraum des eindimensionalen harmonischen Oszillators betrachtet. Im dämpfungsfreien Fall lautet die Bewegungsgleichung nach Abschn. 2.1

$$m\ddot{x} = -cx \quad \text{oder} \quad \ddot{x} = -\omega_0^2 x \quad \text{mit} \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m}.$$

Setzt man jetzt $v = \dot{x}$, so kann man die Differentialgleichung 2. Ordnung in zwei gekoppelte Differentialgleichungen 1. Ordnung zerlegen

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\omega_0^2 x & \text{Es folgt} & \quad \frac{dv}{dx} = \frac{\dot{v}}{\dot{x}} = -\omega_0^2 \frac{x}{v} & \text{oder} & \quad v dv = -\omega_0^2 x dx. \\ \dot{x} &= v. \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$d\left(\frac{1}{2}v^2\right) = -\omega_0^2 d\left(\frac{1}{2}x^2\right) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}v^2 = -\omega_0^2 \frac{1}{2}x^2 + \frac{E}{m}$$

mit einer beliebigen Konstanten E , die die Energie des Massenpunktes festlegt. Dann gilt

$$v^2 + \omega_0^2 x^2 = R^2 \quad \text{mit} \quad R = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

und die Trajektorien sind Kreise, wenn der Phasenraum von den Koordinaten $\omega_0 x$ und v aufgespannt wird, vergl. Abb. 2.7. Die verschiedenen Kreise entsprechen verschiedenen Energien und werden aufgrund der Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos\{\omega_0 t + \varphi\} \\ \dot{x}(t) &= -\omega_0 x_0 \sin\{\omega_0 t + \varphi\} \end{aligned}$$

im mathematisch negativen Sinn, d.h. im Uhrzeigersinn, durchlaufen. Im Falle gedämpfter Schwingungen erhält man keine geschlossenen Kurven, sondern Spiralbahnen zum Ursprung hin.

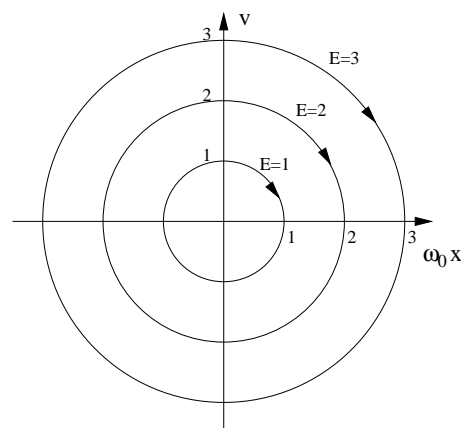


Abb. 2.7 Trajektorien des ungedämpften harmonischen Oszillators im Phasenraum. Die Geschwindigkeit v ist in Einheiten $\omega_0 x_0$ ebenso wie $\omega_0 x$ angegeben. Die Einheit der Energie ist $m\omega_0^2 x_0^2/2$.

B) Allgemeiner eindimensionaler Fall

Im allgemeinen Fall mit der potentiellen Energie $U(x)$ lautet die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}(t) = F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

und die Zerlegung in zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung ergibt mit $v = \dot{x}$

$$\dot{v} = \frac{1}{m}F(x) \quad \text{oder} \quad \frac{dv}{dx} = \frac{\dot{v}}{\dot{x}} = \frac{F(x)}{mv} \quad \text{oder} \quad mv \, dv = F(x) \, dx.$$

$$\dot{x} = v$$

Daraus erhält man mit der konstanten Energie E

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = F(x) \, dx = -dU \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2}mv^2 = -U(x) + E$$

die Trajektorie in der Form

$$v(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}.$$

C) Ebenes Pendel

Als weiteres Beispiel sei das ebene Pendel betrachtet, das auf eine eindimensionale Bewegungsgleichung eines anharmonischen Oszillators führt. Die Pendelgleichung hat nach Abschn. 1.6 mit $\omega_0^2 = g/l$ die Form

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0 \quad \text{mit der Energie} \quad E = \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos \varphi).$$

Sei jetzt $\omega = \dot{\varphi}$ die Winkelgeschwindigkeit, so erhält man

$$\dot{\omega} = -\omega_0^2 \sin \varphi \quad \text{oder} \quad \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{\dot{\omega}}{\dot{\varphi}} = -\omega_0^2 \frac{\sin \varphi}{\omega}$$

$$\dot{\varphi} = \omega$$

oder

$$\omega \, d\omega = -\omega_0^2 \sin \varphi \, d\varphi \quad \text{und} \quad d\left(\frac{1}{2}\omega^2\right) = \omega_0^2 \, d \cos \varphi.$$

Die unbestimmte Integration mit der Konstanten c ergibt

$$\frac{1}{2}\omega^2 = \omega_0^2 \cos \varphi + c \quad \text{mit} \quad c = \frac{E}{ml^2} - \omega_0^2$$

und die Trajektorie hat die Form

$$\omega(\varphi) = \pm \sqrt{2\omega_0^2 (\cos \varphi - 1) + \frac{2E}{ml^2}}.$$

Es gilt die Periodizitätsbedingung und die Symmetriebeziehung

$$\omega(\varphi + 2\pi) = \omega(\varphi)$$

$$\omega(-\varphi) = \omega(\varphi)$$

und $\omega(\varphi)$ hat Nullstellen nur für Energien

$$\frac{E}{ml^2} \leq 2\omega_0^2 \quad \text{oder} \quad E \leq 2mgl.$$

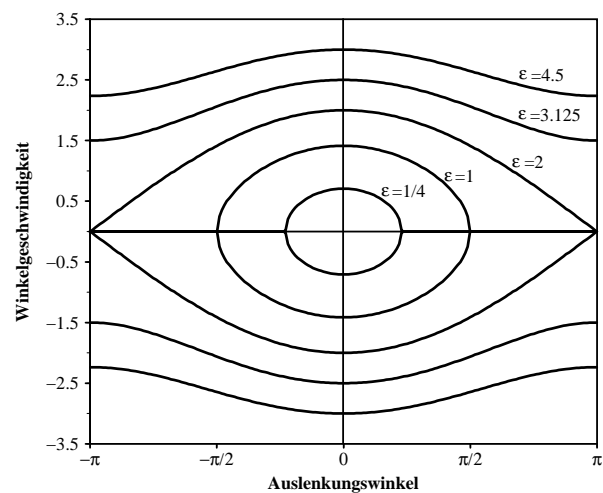


Abb. 2.8 Trajektorien des ebenen Pendels. Die Einheit von ω ist ω_0 und die der Energie ε ist mgl .

Obwohl die Trajektorien $\omega(\varphi)$ innerhalb von $-\pi < \varphi \leq \pi$ für $E > 2mgl$ keine geschlossenen Kurven sind, vergl. Abb. 2.8, handelt es sich wegen der Periodizitätsbedingung dennoch um eine periodische Bewegung.

3 Himmelsmechanik

Die klassische Mechanik mit dem Newtonschen Bewegungsgesetz und dem Gravitationsgesetz wurde aufgrund der Beobachtungen der Planetenbewegung durch G. Galilei und J. Kepler gefunden. Die drei Keplerschen Gesetze, wonach die Planetenbahnen Ellipsen sind, in deren einen Brennpunkt die Sonne steht, der Ortsvektor in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht und sich die Quadrate der Umlaufzeiten wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen der Ellipsen verhalten, können verwendet werden, um induktiv das Gravitationsgesetz und das Newtonsche Bewegungsgesetz aufzustellen. Wir wollen hier deduktiv von den Axiomen der klassischen Mechanik ausgehen und die Eigenschaften der Planetenbewegung sowie anderer Himmelskörper unter dem Einfluß der Gravitation herleiten.

3.1 Planetenbewegung

Als Näherung betrachten wir nur ein Zweikörpersystem aus der Sonne und der Erde und lassen die übrigen Planeten außer Betracht. Weiterhin werden die Himmelskörper als Massenpunkte mit der Sonnenmasse $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ kg und der Erdmasse $M_E = 6 \cdot 10^{24}$ kg an den Orten \mathbf{r}_\odot bzw \mathbf{r}_E approximiert. Wegen der Kleinheit des Massenverhältnisses $M_E/M_\odot = 3 \cdot 10^{-6}$ gehen wir zunächst von einer ruhenden Sonne aus und legen den Ursprung des Koordinatensystems an den Ort der Sonne. Im folgenden Abschnitt wird die Mitbewegung der Sonne berücksichtigt, was nur zu geringen Korrekturen führt.

Zur Bestimmung der Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ der Erde um die Sonne betrachten wir die Newtonsche Bewegungsgleichung und das Gravitationsgesetz mit $r = |\mathbf{r}|$

$$M_E \ddot{\mathbf{r}}(t) = -GM_\odot M_E \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad \text{oder} \quad \ddot{\mathbf{r}} = -C \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad \text{mit} \quad C = GM_\odot.$$

Die Gravitationskraft $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ist konservativ und es gilt nach Abschn. 1.4 5.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -GM_\odot M_E \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad \text{mit} \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -dU(\mathbf{r}) \quad \text{und} \quad U(\mathbf{r}) = -\frac{GM_\odot M_E}{r}.$$

□ Zum Beweise bilden wir das totale Differential der potentiellen Energie U

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

und differenzieren nach der Kettenregel wegen $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{GM_\odot M_E}{r^2} \frac{x}{r} \quad \text{wegen} \quad \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{GM_\odot M_E}{r^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}.$$

Also erhält man

$$dU = \frac{GM_\odot M_E}{r^3} [x dx + y dy + z dz] = \frac{GM_\odot M_E}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r},$$

sodaß sich die Gravitationskraft \mathbf{F} als konservativ erweist. ■

Die Herleitung der möglichen Bahnkurven wird bei Verwendung von Erhaltungssätzen besonders einfach. Nach Abschn. 1.5 E gilt der Satz von der Erhaltung der Energie $E = T + U$, den wir in der Form

$$0 = \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} M_E \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{GM_\odot M_E}{r} \right] \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{C}{r} \right] = 0$$

schreiben. Die Gravitationskraft ist ferner eine Zentralkraft $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$ und es gilt nach Abschn. 1.5 D der Satz von der Erhaltung des Drehimpulses $\mathbf{L} = M_E \mathbf{l}$ mit $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$

$$0 = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times M_E \dot{\mathbf{r}}) \quad \text{oder} \quad \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = 0.$$

Darüber hinaus gilt speziell für die Gravitationskraft \mathbf{F} der Satz von der Erhaltung des dimensionslosen Runge-Lenz-Vektors

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{a} = \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{1}{C} \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{l}.$$

□ Zum Beweise beachtet man

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\mathbf{r}}{r^2} \dot{r} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}, \quad \text{denn es ist } \dot{r} = \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{r},$$

sowie

$$\frac{1}{r^3} \mathbf{r} \times \mathbf{l} = \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{r^3} (\mathbf{r} \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} - r^2 \dot{\mathbf{r}}) = \frac{\mathbf{r}}{r^3} \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r}$$

und berechnet die Ableitung des Runge-Lenz-Vektors aus der Bewegungsgleichung

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) - \frac{1}{C} \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{l} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \mathbf{l} = 0. \blacksquare$$

Zur Berechnung der Bahnkurve der Erde $\mathbf{r}(t)$ gehen wir von der Erhaltung des Drehimpulses $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ aus, wonach die Bahnkurve in einer Ebene verlaufen muß, und führen ebene Polarkoordinaten r, φ ein, indem wir den Polarwinkel auf die Richtung des konstanten Runge-Lenz-Vektors \mathbf{a} beziehen

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} &= r - \frac{1}{C} \mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{l}) = r - \frac{1}{C} \mathbf{l} \cdot (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = r - \frac{1}{C} \mathbf{l}^2 \\ &= ar \cos \varphi. \end{aligned}$$

Da aber $a = |\mathbf{a}|$, $l = |\mathbf{l}|$ und C Konstanten sind, erhält man die Bahnkurve als Kegelschnitte in ebenen Polarkoordinaten

$$r(\varphi) = \frac{l^2}{C} \frac{1}{1 - a \cos \varphi}$$

und es gilt

$$a^2 = 1 + \frac{2l^2}{C^2} \varepsilon \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \frac{E}{M_E} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{C}{r}.$$

□ Zum Beweise berechnet man

$$\begin{aligned} a^2 &= \left(\frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{1}{C} \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{l} \right)^2 = 1 - \frac{2}{C} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{l}) + \frac{1}{C^2} (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{l})^2 \\ &= 1 - \frac{2}{C} \frac{l^2}{r} + \frac{1}{C^2} l^2 \dot{\mathbf{r}}^2 = 1 + \frac{2l^2}{C^2} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{C}{r} \right) = 1 + \frac{2l^2}{C^2} \varepsilon, \end{aligned}$$

denn aus $\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{l} = 0$ folgt $(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{l})^2 = \dot{\mathbf{r}}^2 \mathbf{l}^2$. ■

Die konkrete Form des Kegelschnittes hängt vom Runge-Lenz-Vektor und damit von der Energie $\varepsilon = E/M_E$ und dem Drehimpuls $\mathbf{l} = \mathbf{L}/M_E$ ab, die jeweils auf die Masseneinheit bezogen sind:

Kreisbahn	:	$a = 0$ oder $\varepsilon = -\frac{C^2}{2l^2} < 0$
Ellipsenbahn	:	$0 < a < 1$ oder $-\frac{C^2}{2l^2} < \varepsilon < 0$
Parabelbahn	:	$a = 1$ oder $\varepsilon = 0$
Hyperbelbahn	:	$a > 1$ oder $\varepsilon > 0$.

Führt man im Falle einer Ellipsenbahn kartesische Koordinaten ein

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi - d \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \quad \text{mit} \quad d = \frac{l^2}{C} \frac{a}{1 - a^2},$$

so erhält man die Gleichung einer Ellipse, vergl. Abb. 3.1,

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad \text{mit} \quad A = \frac{l^2}{C} \frac{1}{1 - a^2} \quad \text{und} \quad B = \frac{l^2}{C} \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

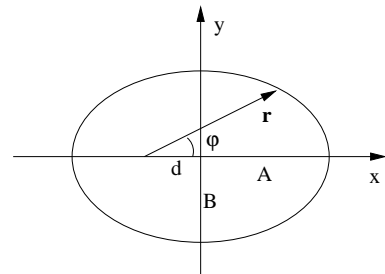


Abb. 3.1 Ellipsenbahn eines Planeten in kartesischen und in Polarkoordinaten.

3.2 Mitbewegung der Sonne

Die Wahl eines Koordinatensystems im vorigen Abschnitt, dessen Ursprung am Ort der Sonne ruht, ist insofern nicht gerechtfertigt, als in den Axiomen festgelegt wurde, daß das Newtonsche Bewegungsgesetz in einem Inertialsystem anzuwenden ist. Die Ergebnisse sind jedoch näherungsweise richtig, wie sich bei einer korrekten Rechnung unter Berücksichtigung der Mitbewegung der Sonne ergibt. Dazu müssen die Bewegungsgleichungen von Sonne und Erde

$$M_{\odot}\ddot{\mathbf{r}}_{\odot}(t) = -GM_{\odot}M_{\text{E}}\frac{\mathbf{r}_{\odot} - \mathbf{r}_{\text{E}}}{|\mathbf{r}_{\odot} - \mathbf{r}_{\text{E}}|^3}$$

$$M_{\text{E}}\ddot{\mathbf{r}}_{\text{E}}(t) = -GM_{\odot}M_{\text{E}}\frac{\mathbf{r}_{\text{E}} - \mathbf{r}_{\odot}}{|\mathbf{r}_{\text{E}} - \mathbf{r}_{\odot}|^3}$$

gemeinsam gelöst werden, wobei beide Himmelskörper die Gravitationskraft aufeinander ausüben, vergl. Abschn. 1.4. Die Differentialgleichungen lassen sich entkopplern, indem Schwerpunkt- und Relativkoordinaten

$$\mathbf{R} = \frac{M_{\odot}\mathbf{r}_{\odot} + M_{\text{E}}\mathbf{r}_{\text{E}}}{M_{\odot} + M_{\text{E}}} \quad \text{und} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_{\text{E}} - \mathbf{r}_{\odot}$$

eingeführt werden. Im Zusammenhang mit dem Actio gleich Reactio Prinzip gilt dann

$$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{1}{M_{\odot} + M_{\text{E}}}(M_{\odot}\ddot{\mathbf{r}}_{\odot} + M_{\text{E}}\ddot{\mathbf{r}}_{\text{E}}) = 0,$$

sodaß sich der Schwerpunkt wegen $\ddot{\mathbf{R}} = 0$ konstant geradlinig gleichförmig bewegt. Wir drücken den Ort der Erde \mathbf{r}_{E} durch Schwerpunkt- und Relativkoordinaten aus

$$\mathbf{r}_{\text{E}} = \mathbf{R} + \frac{M_{\odot}}{M_{\odot} + M_{\text{E}}}\mathbf{r},$$

denn es ist

$$\frac{1}{M_{\odot} + M_{\text{E}}}(M_{\odot}\mathbf{r}_{\odot} + M_{\text{E}}\mathbf{r}_{\text{E}} + M_{\odot}\mathbf{r}_{\text{E}} - M_{\odot}\mathbf{r}_{\odot}) = \mathbf{r}_{\text{E}},$$

und die Bewegungsgleichung der Erde lautet

$$M_{\text{E}}\ddot{\mathbf{r}}_{\text{E}} = M_{\text{E}}\ddot{\mathbf{R}} + \frac{M_{\text{E}}M_{\odot}}{M_{\odot} + M_{\text{E}}}\ddot{\mathbf{r}} = -GM_{\odot}M_{\text{E}}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

oder in Relativkoordinaten

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = -C\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad \text{mit} \quad C = G(M_{\odot} + M_{\text{E}}),$$

wobei G die Gravitationskonstante bezeichnet. Wegen $M_{\text{E}}/M_{\odot} = 3 \cdot 10^{-6}$ ergeben sich nur kleine Unterschiede in der Bewegungsgleichung zwischen der Berücksichtigung und der Vernachlässigung der Mitbewegung der Sonne, die wegen $\mathbf{r}_{\odot} = 0$ zu $C = GM_{\odot}$ führt.

Die Gleichungen dienen allgemein der Lösung des Zweikörperproblems unter dem Einfluß der Gravitationswechselwirkung.

4 Relativbewegung

In den Axiomen der klassischen Mechanik wird als Bezugssystem ein Inertialsystem mit dem Trägheitsgesetz zugrunde gelegt, vergl. Abschn. 1.4. Dabei geht man von einem absoluten Raum aus, in dem sich die Massen bewegen, und es wird eine absolute Zeit vorausgesetzt, die für alle Bezugssysteme unabhängig davon gelten soll, wie sie sich gegeneinander bewegen. Diese Annahmen sind auf direktem Wege nicht nachweisbar, es gibt jedoch Konsequenzen für bestimmte Ergebnisse der klassischen Mechanik, die mit einigen Beobachtungen nicht in Einklang stehen. Dazu gehört, daß Massenpunkte mit Geschwindigkeiten im Bereich der Lichtgeschwindigkeit anderen Gesetzen gehorchen. In der speziellen Relativitätstheorie wird deshalb die Voraussetzung einer absoluten Zeit fallen gelassen und jedem Bezugssystem eine eigene Zeit zugeordnet. In diesem Kapitel werden jedoch nur die Eigenschaften der klassischen Mechanik für verschiedene Bezugssysteme besprochen.

4.1 Galilei-Transformation

Sei Σ ein Inertialsystem, in dem die fünf Axiome der klassischen Mechanik gelten, so ist jedes Bezugssystem Σ' , welches sich gegenüber Σ geradlinig gleichförmig bewegt, auch ein Inertialsystem. Um das zu zeigen, sei $\mathbf{R}(t) = \mathbf{v}_0 t$ mit $\mathbf{v}_0 = \text{konstant}$ der Vektor, der vom Ursprung von Σ zum Ursprung von Σ' weist, vergl. Abb. 4.1. Ist dann \mathbf{r} der Ort eines Massenpunktes bezüglich Σ und \mathbf{r}' bezüglich Σ' , so gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{R}(t) + \mathbf{r}' = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}' \\ \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}_0 + \dot{\mathbf{r}}' \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{\mathbf{r}}'.\end{aligned}$$

Wirkt auf einen Massenpunkt m eine Kraft \mathbf{F} , so wird in beiden Bezugssystemen die gleiche Beschleunigung $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} = m\ddot{\mathbf{r}}'$ gemessen. Auch das Gravitationsgesetz für zwei Massen an den Orten \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 gilt wegen

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| &= |\mathbf{R} + \mathbf{r}'_1 - \mathbf{R} - \mathbf{r}'_2| \\ &= |\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2|\end{aligned}$$

in beiden Bezugssystemen gleichermaßen. Da auch die Axiome 3) und 4) bezüglich der Kräfte unverändert bleiben, ist Σ' ebenso ein Inertialsystem.

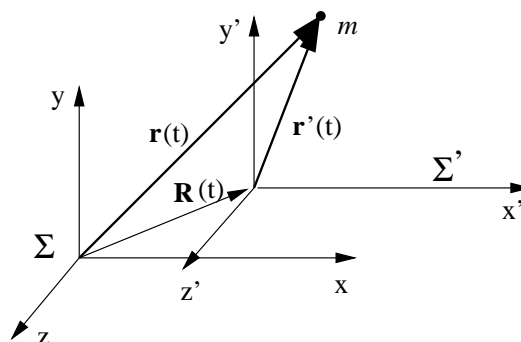


Abb. 4.1 Das Koordinatensystem Σ' bewegt sich gegenüber Σ entsprechend $\mathbf{R}(t)$.

4.2 Beschleunigte Bezugssysteme

Wir betrachten in diesem Abschnitt ein Koordinatensystem Σ' , welches sich gegenüber einem Inertialsystem Σ mit einer konstanten Beschleunigung \mathbf{b}_0 bewegt. Dann gilt nach Abb. 4.1

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{r}'(t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{R}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{b}_0 t^2$$

und in Σ gilt das Newtonsche Grundgesetz

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} = m \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{R}(t) + \mathbf{r}'(t)) = m\ddot{\mathbf{R}} + m\ddot{\mathbf{r}}' = m\mathbf{b}_0 + m\ddot{\mathbf{r}}'.$$

Ein Beobachter im beschleunigten Bezugssystem Σ' mißt die Beschleunigung des Massenpunktes $\ddot{\mathbf{r}}'$ und findet das Bewegungsgesetz in der Form

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}^\top \quad \text{mit der Trägheitskraft} \quad \mathbf{F}^\top = -m\mathbf{b}_0,$$

die aufgrund der Beschleunigung von Σ' auftritt. Demgegenüber bezeichnet man \mathbf{F} als eine eingepreßte Kraft.

Betrachtet man speziell einen Beobachter in einem frei fallenden Fahrstuhl, der mit der Erdbeschleunigung \mathbf{g} in Richtung auf die Erdoberfläche beschleunigt, so ist die Trägheitskraft im Fahrstuhl $\mathbf{F}^T = -m\mathbf{g}$, und ein Massenpunkt erfährt unter seinem eigenen Gewicht $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ im Fahrstuhl die Beschleunigung

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = m\mathbf{g} + \mathbf{F}^T = m\mathbf{g} - m\mathbf{g} = 0,$$

so daß ein schwereloser Zustand beobachtet wird.

4.3 Trägheitskräfte im rotierenden Bezugssystem

Wir betrachten ein Bezugssystem Σ' , welches gegenüber einem Inertialsystem Σ um eine Achse rotiert, die durch den gemeinsamen Ursprung geht. In Bezug auf Abb. 4.1 gilt dann $\mathbf{R}(t) = 0$ und $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t)$. Sind $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ die Einheitsvektoren der Achsen des kartesischen Koordinatensystems Σ und $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ die von Σ' , so beschreiben die Beobachter in Σ bzw. Σ' den Ort eines Massenpunktes m durch die Vektorkomponenten (x, y, z) bzw. (x', y', z')

$$\mathbf{r}(t) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 = \mathbf{r}'(t) = x'\mathbf{e}'_1 + y'\mathbf{e}'_2 + z'\mathbf{e}'_3,$$

wobei sich die Richtung der Vektoren \mathbf{e}'_j für $j = 1, 2, 3$ bezüglich Σ wegen der Rotation zeitlich ändert. Sei $\vec{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit der Drehbewegung, so gilt nach Abschn. 1.3 C für die Änderung des Ortsvektors $\dot{\mathbf{r}} = \vec{\omega} \times \mathbf{r}$ und speziell für $\mathbf{r} = (1, 0, 0) = \mathbf{e}'_1$ usw.

$$\frac{d\mathbf{e}'_j}{dt} = \vec{\omega} \times \mathbf{e}'_j \quad \text{für } j = 1, 2, 3.$$

Damit erhält man für die Geschwindigkeit des Massenpunktes

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}(t) &= \dot{x}'\mathbf{e}'_1 + x'\dot{\mathbf{e}}'_1 + \dot{y}'\mathbf{e}'_2 + y'\dot{\mathbf{e}}'_2 + \dot{z}'\mathbf{e}'_3 + z'\dot{\mathbf{e}}'_3 \\ &= \dot{x}'\mathbf{e}'_1 + \dot{y}'\mathbf{e}'_2 + \dot{z}'\mathbf{e}'_3 + x'\vec{\omega} \times \mathbf{e}'_1 + y'\vec{\omega} \times \mathbf{e}'_2 + z'\vec{\omega} \times \mathbf{e}'_3 \\ &= (\dot{\mathbf{r}})' + \vec{\omega} \times (\mathbf{r})', \end{aligned}$$

wobei $(\mathbf{r})'$ und $(\dot{\mathbf{r}})'$ Ort und Geschwindigkeit des Massenpunktes sind, die ein in Σ' ruhender Beobachter bezüglich seiner Koordinatenachsen $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ feststellt. Für die zweiten Ableitungen beachten wir

$$\frac{d^2\mathbf{e}'_j}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \mathbf{e}'_j) = \dot{\vec{\omega}} \times \mathbf{e}'_j + \vec{\omega} \times \frac{d\mathbf{e}'_j}{dt} = \dot{\vec{\omega}} \times \mathbf{e}'_j + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{e}'_j)$$

und erhalten für die Beschleunigung

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}(t) &= \ddot{x}'\mathbf{e}'_1 + \ddot{y}'\mathbf{e}'_2 + \ddot{z}'\mathbf{e}'_3 + \dot{x}'\dot{\mathbf{e}}'_1 + \dot{y}'\dot{\mathbf{e}}'_2 + \dot{z}'\dot{\mathbf{e}}'_3 \\ &\quad + \dot{x}'\dot{\mathbf{e}}'_1 + \dot{y}'\dot{\mathbf{e}}'_2 + \dot{z}'\dot{\mathbf{e}}'_3 + x'\frac{d^2\mathbf{e}'_1}{dt^2} + y'\frac{d^2\mathbf{e}'_2}{dt^2} + z'\frac{d^2\mathbf{e}'_3}{dt^2} \end{aligned}$$

oder

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{\mathbf{r}})' + 2\vec{\omega} \times (\dot{\mathbf{r}})' + \dot{\vec{\omega}} \times (\mathbf{r})' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\mathbf{r})').$$

Ist \mathbf{F}^{eing} die eingeprägte Kraft, die auf den Massenpunkt m wirkt, so gilt im Inertialsystem Σ die Bewegungsgleichung $\mathbf{F}^{\text{eing}} = m\ddot{\mathbf{r}}$ und man erhält für das Bewegungsgesetz im Bezugssystem Σ'

$$m(\ddot{\mathbf{r}})' = \mathbf{F}^{\text{eing}} \underbrace{- 2m\vec{\omega} \times (\dot{\mathbf{r}})'}_{\text{Coriolis-Kraft}} \underbrace{- m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\mathbf{r})')}_{\text{Zentrifugalkraft}} \underbrace{- m\dot{\vec{\omega}} \times (\mathbf{r})'}_{\text{Kraft durch Winkelbeschleunigung}}$$

Die Beschleunigung wird im rotierenden Bezugssystem durch die eingeprägte Kraft \mathbf{F}^{eing} und durch die Trägheitskräfte Coriolis-Kraft, Zentrifugalkraft und einer weiteren Kraft bestimmt, die bei konstanter Winkelgeschwindigkeit verschwindet. Die Coriolis-Kraft tritt nur bei Massen auf, die sich im rotierenden Bezugssystem Σ' bewegen.

Im Folgenden untersuchen wir Beobachtungen im rotierenden Koordinatensystem und lassen der Einfachheit halber den Strich zur Kennzeichnung fort. Die Bewegungsgleichung schreiben wir in der Form

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}^{\text{eing}} + \mathbf{F}^{\text{Cor}} + \mathbf{F}^{\text{Zen}} + \mathbf{F}^{\text{Wb}} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \mathbf{F}^{\text{Cor}} &= -2m\vec{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} \\ \mathbf{F}^{\text{Zen}} &= -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}) \\ \mathbf{F}^{\text{Wb}} &= -m\dot{\vec{\omega}} \times \mathbf{r}. \end{aligned}$$

A) Ruhender Massenpunkt auf der Erdoberfläche

Die Winkelgeschwindigkeit der Erde $\vec{\omega}$ wird näherungsweise als konstant angenommen $\dot{\vec{\omega}} = 0$ und hat den Betrag $\omega = |\vec{\omega}| = 2\pi/24\text{h} = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. Dann verschwinden \mathbf{F}^{Cor} und \mathbf{F}^{Wb} und die Zentrifugalbeschleunigung $\mathbf{a} = \mathbf{F}^{\text{Zen}}/m$ hängt von der geographischen Breite λ ab, vergl. Abb. 4.2. Zerlegt man $\mathbf{r} = \mathbf{t} + \mathbf{s}$ in einen Vektor \mathbf{t} parallel und einen Vektor \mathbf{s} senkrecht zur Erdachse bzw. zu $\vec{\omega}$, so gilt

$$\vec{\omega} \times \mathbf{r} = \vec{\omega} \times (\mathbf{t} + \mathbf{s}) = \vec{\omega} \times \mathbf{s}$$

und man erhält für die Zentrifugalbeschleunigung

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}) = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{s}) \\ &= -\vec{\omega}\vec{\omega} \cdot \mathbf{s} + \omega^2 \mathbf{s} = \omega^2 \mathbf{s}. \end{aligned}$$

Der Erdradius hat den Wert $R = 6.4 \cdot 10^6 \text{ m}$ und es gilt $|\mathbf{s}| = |\mathbf{r}| \cos \lambda = R \cos \lambda$ für die geographische Breite λ , sodaß sich für die Zentrifugalbeschleunigung

$$|\mathbf{a}| = \omega^2 R \cos \lambda = 3.4 \cdot 10^{-2} \cos \lambda \quad \text{ms}^{-2}$$

ergibt. Vergleicht man sie mit der Erdbeschleunigung $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$, so erkennt man die Ursache für die Abplattung der einstmals flüssigen Erde in Form eines Rotationsellipsoids, wobei ein Lot überall senkrecht zur idealisierten Erdoberfläche hängt.

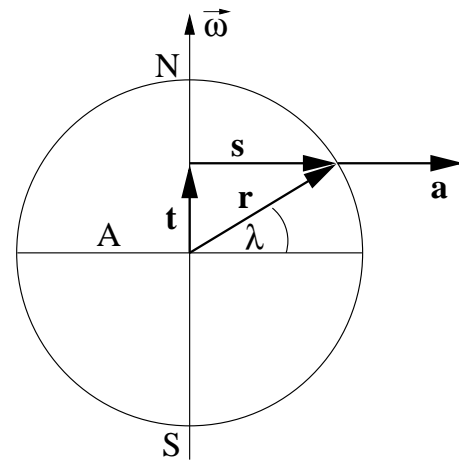


Abb. 4.2 Zentrifugalbeschleunigung auf der rotierenden Erde mit Äquator A, Nordpol N und Südpol S.

B) Horizontalbeschleunigung durch die Coriolis-Kraft

Die Coriolis-Kraft hat insbesondere für die meteorologischen Bewegungen der Luftmassen eine große Bedeutung. Wir betrachten im kleinräumigen Bereich mit genähert ebener Erdoberfläche einen horizontal wehenden Wind der Geschwindigkeit \mathbf{v}_h und zerlegen die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ der Erde für eine Ebene in der geographischen Breite λ in einen Vertikalanteil $\vec{\omega}_v$ senkrecht zur Ebene und einen Horizontalanteil $\vec{\omega}_h$ in der Ebene $\vec{\omega} = \vec{\omega}_v + \vec{\omega}_h$. Dann gilt $|\vec{\omega}_v| = \omega \sin \lambda$ und die Coriolis-Beschleunigung ist

$$\mathbf{b}^{\text{Cor}} = \frac{1}{m} \mathbf{F}^{\text{Cor}} = -2\vec{\omega} \times \mathbf{v}_h = -2\vec{\omega}_v \times \mathbf{v}_h - 2\vec{\omega}_h \times \mathbf{v}_h.$$

Die Druckunterschiede, die die Luftbewegungen verursachen, sind vertikal viel größer als horizontal, so daß sich der zweite vertikale Term der Coriolis-Beschleunigung in der Meteorologie kaum bemerkbar macht. Der erste Term der horizontalen Coriolis-Beschleunigung führt auf der Nordhalbkugel zu einer Rechtsabweichung eines horizontal wehenden Windes (\mathbf{e}_\perp ist der Einheitsvektor senkrecht zur Erdoberfläche nach oben)

$$\mathbf{b}_h^{\text{Cor}} = -2\vec{\omega}_v \times \mathbf{v}_h = -2\omega \sin\{\lambda\} \mathbf{e}_\perp \times \mathbf{v}_h.$$

In der Umgebung eines Tiefdruckgebietes auf der Nordhalbkugel (Zyklone) strömen die Luftmassen im Gegenuhrzeigersinn um das Zentrum herum, weil die Beschleunigung durch das Druckgefälle zum Zentrum hin näherungsweise gleich der entgegengesetzt gerichteten Coriolis-Beschleunigung ist.

5 Spezielle Relativitätstheorie

Die in den vorangegangenen Kapiteln behandelten Gesetze der klassischen Mechanik verlieren ihre Gültigkeit, wenn Massenpunkte betrachtet werden, deren Geschwindigkeiten relativ zu einem Inertialsystem nicht mehr klein sind im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit. Einen Ansatz dazu liefert die Anwendung des Doppler-Effektes auf elektromagnetische Wellen, die von bewegten Körpern ausgesendet werden.

5.1 Doppler-Effekt

Wir betrachten einen Beobachter in einem Inertialsystem, der Lichtstrahlen eines entfernten Sternes registriert. Bewegt sich der Stern relativ zum Beobachter nicht, so soll die elektromagnetische Welle die Frequenz ν_0 , die Wellenlänge λ und die Lichtgeschwindigkeit $c = \nu_0 \lambda$ haben. Die Schwingungsdauer $T = 1/\nu_0 = \lambda/c$ ist die Zeit, die zwischen dem Eintreffen zweier aufeinanderfolgender Maxima der Welle verstreicht. Beträgt die Relativgeschwindigkeit zwischen Beobachter und Stern v , so gehen wir zunächst davon aus, daß sich der Beobachter in Richtung auf den leuchtenden Stern bewegt. Dann ist die Zeitdauer zwischen dem Eintreffen zweier Maxima $\lambda/(c+v)$ und die beobachtete Frequenz ergibt sich zu

$$\nu = \frac{c+v}{\lambda} = \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Dies ist auch die Formel für den Doppler-Effekt einer in der Atmosphäre ruhenden Schallquelle, der sich ein Hörer mit der Geschwindigkeit v nähert, wenn für c die Schallgeschwindigkeit eingesetzt wird. Ruht jedoch der Hörer in der Atmosphäre und bewegt sich die Schallquelle auf ihn zu, so nähert sich die Schallquelle in der Zeit einer Schwingungsdauer $T = 1/\nu_0$ um die Strecke vT und die Wellenlänge verkürzt sich auf $c/\nu_0 - vT = (c-v)/\nu_0$. Die vom ruhenden Hörer registrierte Schwingungsfrequenz ist also für $|v| < c$

$$\nu = \frac{c}{\left(\frac{c-v}{\nu_0}\right)} = \frac{\nu_0 c}{c-v} = \nu_0 \frac{1}{1-\frac{v}{c}} = \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c} + \frac{v^2}{c^2} + \dots\right).$$

Der Doppler-Effekt bzw. die beobachtete Frequenzverschiebung hängt also davon ab, ob sich der Beobachter oder die Quelle relativ zu dem Medium Luft der Schallausbreitung bewegt.

5.2 Michelson-Morley-Versuch

Bei der Beobachtung leuchtender Sterne von der Erde aus findet man den Doppler-Effekt in Form einer Frequenzverschiebung bestimmter Spektrallinien proportional zu v/c . Eine eventuelle Frequenzverschiebung proportional zu v^2/c^2 hängt aber davon ab, ob sich elektromagnetische Wellen im Vakuum in Analogie zu akustischen Wellen in einem Medium, dem sogenannten Äther, bewegen, der dann in einem Inertialsystem, dem absoluten Raum, ruhen würde, und in dem sich Licht mit der Geschwindigkeit c ausbreitet. Wegen der Kleinheit der Frequenzverschiebung proportional zu v^2/c^2 wurde die Überprüfung der Ätherhypothese mit einem Interferometer unter der Annahme durchgeführt, daß sich die Erde mit einer Geschwindigkeit v gegenüber dem Äther bewegt. Für v wurde die Geschwindigkeit der Erde auf ihrer Bahn um die Sonne also $v = 3 \cdot 10^4 \text{ ms}^{-1}$ angesetzt.

Das Schema der Versuchsanordnung von Michelson und Morley ist in Abb. 5.1 dargestellt. Der Lichtstrahl der Lampe L trifft zur Zeit t auf den halbdurchlässigen Spiegel S. Die beiden Teilstrahlen werden zur Zeit $t + \Delta t$ an den gleich weit entfernten Spiegeln S_1 bzw. S_2 reflektiert und treffen

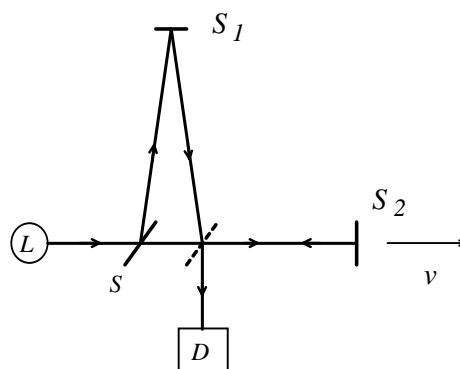


Abb. 5.1 Michelson-Morley-Interferometer

zur Zeit $t + 2\Delta t$ auf den inzwischen verschobenen Spiegel S (gestrichelt gezeichnet). Von dort aus gelangen die beiden Strahlen zusammen in den Detektor D, wo sie interferieren. Das Licht braucht auf dem Wege über den Spiegel S_1 im Falle $v > 0$ eine etwas längere Zeit als über den Spiegel S_2 , wenn sich das Interferometer senkrecht zum Spiegel S_2 mit der Geschwindigkeit v gegenüber dem hypothetischen Äther bewegt. Beobachtet wird eine eventuelle Verschiebung von Interferenzstreifen wenn sich das Interferometer einmal in Richtung senkrecht zu S_2 und einmal in Richtung senkrecht zu S_1 bewegt. Dies wird durch eine einfache Drehung des Interferometers um 90° erreicht.

Das Experiment ergab keine Verschiebung von Interferenzstreifen. Daraus muss geschlossen werden, daß es keinen im absoluten Raum ruhenden Äther gibt und daß sich das Licht in allen Inertialsystemen mit der gleichen Geschwindigkeit $c = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$ ausbreitet und zwar unabhängig davon, ob sich die Inertialsysteme von Quelle und Detektor gegeneinander bewegen oder nicht.

Dieses Ergebnis entspricht nicht der Galilei-Transformation bei der Beobachtung von Massenpunkten aus verschiedenen gegeneinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Inertialsystemen. Um das zu erkennen, betrachten wir einen Lichtblitz, der sich mit der Lichtgeschwindigkeit c vom Zentrum des Inertialsystems Σ in x -Richtung entfernt und zur Zeit t den Abstand $x = ct$ hat. Ein Beobachter im Inertialsystem Σ' , das sich mit der Geschwindigkeit v in Richtung der positiven x -Achse bewegt, mißt den Ort des Lichtblitzes nach der Galilei-Transformation zu $x' = (c - v)t$ und nicht ct wie nach dem Michelson-Morley-Versuch gefordert.

5.3 Lorentz-Transformation

Da die Galilei-Transformation mit den Ergebnissen des Michelson-Morley-Experimentes im Widerspruch steht, müssen die Vorstellungen vom absoluten Raum und der absoluten Zeit fallen gelassen werden. Die Forderung, daß sich Licht in jedem Inertialsystem mit der gleichen Geschwindigkeit c ausbreitet, läßt sich erfüllen, indem jedem Inertialsystem eine eigene Zeitachse zu den drei Koordinatenachsen hinzugefügt wird.

Wir leiten die Lorentz-Transformation zwischen zwei Inertialsystemen aus fünf Forderungen ab und setzen voraus, daß beide Koordinatensysteme zur Zeit 0 aufeinander liegen und sich mit der konstanten Geschwindigkeit \mathbf{v} gegeneinander bewegen.

- 1) Jedem Inertialsystem wird eine Zeit mit Hilfe einer in ihm ruhenden Uhr zugeordnet.
- 2) Für jeden Beobachter, der in einem Inertialsystem ruht, breiten sich elektromagnetische Wellen mit der gleichen Geschwindigkeit c aus, unabhängig von der Relativgeschwindigkeit zum Inertialsystem, in dem die Lichtquelle ruht.
- 3) Kein Inertialsystem ist gegenüber einem anderen ausgezeichnet.
- 4) Für kleine Geschwindigkeiten $|\mathbf{v}| \ll c$ zwischen den Inertialsystemen muß die Galilei-Transformation richtig sein.
- 5) Die Lorentz-Transformation ist wie die Galilei-Transformation linear in den Koordinaten. Die geradlinige Bewegung eines Massenpunktes, auf den keine Kräfte wirken, wird dann auch in eine geradlinige Bewegung transformiert.

Die Transformation des Ortsvektors \mathbf{r} vom Inertialsystem Σ' mit den Koordinaten \mathbf{r}', t' zum Inertialsystem Σ mit den Koordinaten \mathbf{r}, t enthält nach Forderung 1) und 5) zwei von \mathbf{v} abhängige Konstanten α, β , die nach Forderung 3) für die Hin- und Rücktransformation gleich sein müssen

$$\mathbf{r} = \alpha \mathbf{r}' + \beta \mathbf{v} t' \quad \text{und} \quad \mathbf{r}' = \alpha \mathbf{r} - \beta \mathbf{v} t.$$

Ein Massenpunkt, der im Ursprung von Σ' ruht, hat in Σ den Ort $\mathbf{r} = \mathbf{v} t$ und in Σ' $\mathbf{r}' = 0$ und aus $\mathbf{r}' = \alpha \mathbf{v} t - \beta \mathbf{v} t = 0$ folgt dann $\beta = \alpha$. Der dimensionslose Faktor α ist unabhängig vom Koordinatensystem und hängt deshalb nur von $v = |\mathbf{v}|$ ab und es muß wegen der Forderung 4) $\alpha(v) \rightarrow 1$ für $v/c \rightarrow 0$ gelten. Der Einfachheit halber legen wir zur Erfüllung der Forderung 2) die x -Achse in Richtung der Relativgeschwindigkeit und setzen $y' = y$ und $z' = z$. Wir betrachten einen Lichtblitz, der zur Zeit $t = 0$ vom Ursprung von Σ in Richtung der positiven x -Achse ausgesendet wird. Nach Forderung 2) gilt dann für den Ort des Blitzes von Σ aus gesehen $x = ct$ und von Σ' aus gesehen $x' = ct'$. Aus

$$x = \alpha(x' + vt') \quad \text{und} \quad x' = \alpha(x - vt)$$

ergibt sich damit

$$x = \alpha \left(x' + v \frac{x'}{c} \right) = \alpha \left(1 + \frac{v}{c} \right) x' \quad \text{und} \quad x' = \alpha \left(1 - \frac{v}{c} \right) x.$$

Setzt man die Ausdrücke ineinander ein, so erhält man

$$x = \alpha \left(1 + \frac{v}{c} \right) \alpha \left(1 - \frac{v}{c} \right) x \quad \text{und es folgt} \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

denn $\alpha < 0$ kann im Falle $v = 0$ wegen der Forderung 4) nicht richtig sein.

Zur Bestimmung der Zeittransformation lösen wir die Transformationsformeln nach t' auf:

$$\begin{aligned} \alpha v t' = x - \alpha x' \quad \text{oder} \quad t' &= \frac{x}{\alpha v} - \frac{1}{v} x' = \frac{x}{\alpha v} - \frac{\alpha}{v} x + \alpha t \\ &= \alpha t - \alpha \frac{x}{v} \left(1 - \frac{1}{\alpha^2} \right) = \alpha \left(t - \frac{v}{c^2} x \right). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die spezielle Lorentz-Transformation für eine Relativbewegung zweier Inertialsysteme Σ und Σ' mit konstanter Geschwindigkeit v in x -Richtung, vergl. Abb. 5.2,

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y &= y' & y' &= y \\ z &= z' & z' &= z \\ t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad \text{und}$$

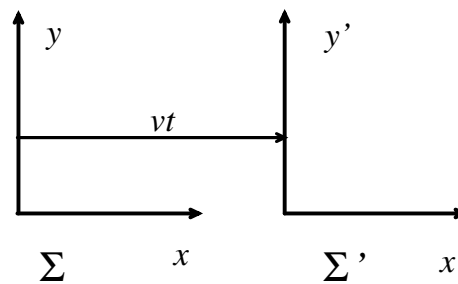


Abb. 5.2 Ortskoordinaten von Σ und Σ'

Die Lorentz-Transformation geht für $v \ll c$ in die Galilei-Transformation über, so daß die Unterschiede nur bei Geschwindigkeiten beobachtet werden können, die nicht klein sind gegenüber der Lichtgeschwindigkeit.

5.4 Eigenschaften der Lorentz-Transformation

Die Unterschiede zur Galilei-Transformation der klassischen Mechanik werden durch die folgenden Eigenschaften deutlich, wobei davon ausgegangen wird, daß die massebehafteten physikalischen Systeme in jeweils einem Inertialsystem ruhen.

1) Grenzggeschwindigkeit für Massenpunkte

Die Lorentz-Transformation enthält Polstellen für $v = \pm c$ und ist nur für $v < c$ sinnvoll. Experimentelle Hinweise auf Massenpunkte mit $v > c$, die sogenannten Tachyonen, gibt es z.Zt. nicht.

2) Invariante gegenüber Lorentz-Transformationen

Durch Einsetzen der speziellen Lorentz-Transformation findet man

$$\begin{aligned} c^2 t^2 - x^2 &= \alpha^2 \left(c^2 t'^2 + 2vt'x' + \frac{v^2}{c^2} x'^2 - x'^2 - 2vx't' - v^2 t'^2 \right) \\ &= \alpha^2 \left(\frac{c^2}{\alpha^2} t'^2 - \frac{1}{\alpha^2} x'^2 \right) = c^2 t'^2 - x'^2 \end{aligned}$$

oder allgemein

$$c^2 t^2 - \mathbf{r}^2 = c^2 t'^2 - \mathbf{r}'^2.$$

3) Relativität der Gleichzeitigkeit

Aus den unterschiedlichen Zeitachsen verschiedener Inertialsysteme ergibt sich, daß die Frage, ob zwei Ereignisse gleichzeitig stattfinden, auch unterschiedlich beantwortet wird. Finden z.B. zwei Ereignisse von Σ aus beobachtet gleichzeitig statt, so ergeben sie sich von Σ' aus beobachtet als nicht gleichzeitig. Dazu betrachten wir einen im Inertialsystem Σ zur Zeit t_0 ausgelösten Lichtblitz, der an zwei von L gleichweit entfernten Orten $x_1 \neq x_2$ gleichzeitig zur Zeit t eintrifft, vergl. Abb. 5.3. Wird dieser Vorgang von Σ' aus beobachtet, so gilt nach der Lorentz-Transformation für die Zeit t'_1 , dem Eintreffen des Lichtblitzes am Ort x_1 , bzw. t'_2 am Ort x_2 : ($\alpha = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$)

$$t'_1 = \alpha \left(t - \frac{v}{c^2} x_1 \right) \neq t'_2 = \alpha \left(t - \frac{v}{c^2} x_2 \right).$$

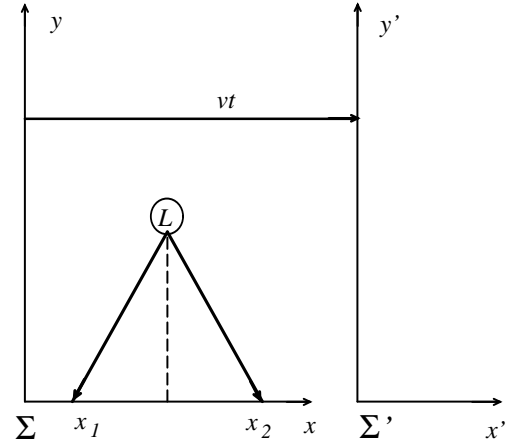


Abb. 5.3 Der Lichtblitz der Lampe L trifft gleichzeitig in x_1 und x_2 ein

4) Kausalitätsprinzip

Das Kausalitätsprinzip wird in der Relativitätstheorie nicht verletzt, obwohl verschiedene Inertialsysteme auch verschiedene Zeitskalen besitzen. Dazu nehmen wir an, daß in Σ zwei Ereignisse an den Orten x_1 und x_2 nacheinander zu den Zeiten $t_1 < t_2$ stattfinden. Sie seien kausal verknüpft, d.h. das Ereignis am Ort x_1 zur Zeit t_1 sei die Ursache und das Ereignis am Ort x_2 zur Zeit t_2 die resultierende Wirkung. Dann bleibt die Reihenfolge auch von Σ' aus gesehen erhalten: ($\alpha = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$)

$$t'_2 - t'_1 = \alpha \left(t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2} (x_2 - x_1) \right) > \begin{cases} 0 & \text{für } x_1 > x_2 \\ \alpha \left(t_2 - t_1 - \frac{x_2 - x_1}{c} \right) & \text{für } x_1 < x_2. \end{cases}$$

Nun ist die Übertragungsgeschwindigkeit $(x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$ von der Ursache am Ort x_1 zur Wirkung am Ort x_2 nicht größer als die Lichtgeschwindigkeit c , was $t'_2 > t'_1$ zur Folge hat. Also sind auch von Σ' aus betrachtet Ursache und Wirkung nicht vertauscht.

5) Zeitdilatation

Der zeitliche Abstand $\Delta t = t_2 - t_1$ zweier Ereignisse am selben Ort x in Σ beobachtet, erscheint von Σ' aus gesehen gedehnt:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > \Delta t.$$

Diese als Zeitdilatation bezeichnete Erscheinung gilt auch, wenn die Ereignisse in Σ' stattfinden und von Σ aus beobachtet werden, denn man hat nur v durch v' zu ersetzen.

6) Längenkontraktion

Im Inertialsystem Σ möge ein Gegenstand der Länge $l = x_2 - x_1$ ruhen. Der Beobachter in Σ verwendet eine Lampe L im gleichen Abstand zu den Enden x_1 und x_2 und einen Maßstab, die beide in Σ ruhen, vergl. Abb. 5.4. Eine entsprechende Messung des in Σ ruhenden Gegenstandes macht ein Beobachter in Σ' mit gleich gebauter Lampe L' und Maßstab, die auch beide in Σ' ruhen. Er stellt zur Zeit t' die Länge $l' = x'_2 - x'_1$ fest. Dann gilt

$$l = x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

und wegen $l' < l$, erscheint der Gegenstand von Σ' aus gesehen verkürzt. Diese Erscheinung heißt Längenkontraktion und gilt so nur für Längen parallel zur Relativgeschwindigkeit \mathbf{v} der beiden Inertialsysteme. Die Formel der Längenkontraktion gilt auch, wenn man die beiden Inertialsysteme miteinander vertauscht.

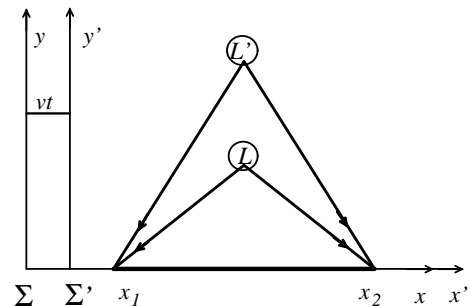


Abb. 5.4 Längenmessung aus Σ und Σ'

7) Additionstheorem der Geschwindigkeiten

Ist $\mathbf{r} = (x, y, z)$ der Ort eines Massenpunktes im Inertialsystem Σ mit den Basisvektoren $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ und $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ der Ort bezüglich Σ' mit den Basisvektoren $\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z$, so gilt

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{r}' = x'\mathbf{e}'_x + y'\mathbf{e}'_y + z'\mathbf{e}'_z.$$

Wir nehmen an, daß sich Σ' gegenüber Σ mit der konstanten Geschwindigkeit v in Richtung der positiven x -Achse bewegt, vergl. Abschn. 5.3 mit Abb. 5.2. Für die Geschwindigkeit $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ des Massenpunktes in Σ bzw. $\mathbf{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$ in Σ' gilt

$$\mathbf{u} = u_x\mathbf{e}_x + u_y\mathbf{e}_y + u_z\mathbf{e}_z \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{u}' = u'_x\mathbf{e}'_x + u'_y\mathbf{e}'_y + u'_z\mathbf{e}'_z$$

mit

$$u_x = \frac{dx}{dt} \quad ; \quad u_y = \frac{dy}{dt} \quad ; \quad u_z = \frac{dz}{dt} \quad \text{bzw.} \quad u'_x = \frac{dx'}{dt'} \quad ; \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'} \quad ; \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}.$$

Zur Umrechnung wird die Lorentz-Transformation für die t' -Koordinate mit $\alpha = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ verwendet

$$t' = \alpha \left(t - \frac{v}{c^2}x(t) \right), \quad \text{woraus sich} \quad \frac{dt'}{dt} = \alpha \left(1 - \frac{v}{c^2}u_x \right)$$

ergibt. Aus der Formel für die x' -Koordinate $x' = \alpha(x(t) - vt)$ folgt dann

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d}{dt'}\alpha(x - vt) = \alpha \left(\frac{dx}{dt} \frac{dt}{dt'} - v \frac{dt}{dt'} \right) = \frac{\alpha(u_x - v)}{\alpha \left(1 - \frac{v}{c^2}u_x \right)} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}.$$

Für die Geschwindigkeiten u'_y und u'_z senkrecht zur Relativgeschwindigkeit der beiden Inertialsysteme findet man andererseits

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt'} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{u_y}{\alpha \left(1 - \frac{v}{c^2}u_x \right)} \quad \text{bzw.} \quad u'_z = \frac{u_z}{\alpha \left(1 - \frac{v}{c^2}u_x \right)}.$$

Für die Beobachtung eines sich in Σ' bewegenden Massenpunktes mit einer Geschwindigkeit u'_x oder u'_y oder u'_z von Σ aus erhält man entsprechend

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} \quad ; \quad u_y = \frac{u'_y}{\alpha \left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x \right)} \quad ; \quad u_z = \frac{u'_z}{\alpha \left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x \right)}.$$

Sind die Geschwindigkeiten $|u_x|, |u_y|, |u_z|$ kleiner als c , so gilt dies auch für $|u'_x|, |u'_y|, |u'_z|$ und umgekehrt.

8) Optischer Doppler-Effekt

Zu dem in Abschn. 5.1 beschriebenen akustischen Doppler-Effekt gibt es ein optisches Analogon, das auf der Lorentz-Transformation beruht. Zur Herleitung betrachten wir zwei Inertialsysteme Σ und Σ' , die sich mit der Geschwindigkeit v gegeneinander bewegen. Zur Zeit $t = t' = 0$ wird am Ort $x = x' = 0$ Licht der Lichtquelle L' ausgesendet und vom Beobachter B registriert, vergl. Abb. 5.5. Die ausgesendete elektromagnetische Welle breitet sich in Σ und Σ' jeweils als Kugelwelle aus. Für die elektrische Feldstärke E mit der Amplitude E_0 in Σ bzw. in Σ' gilt dann

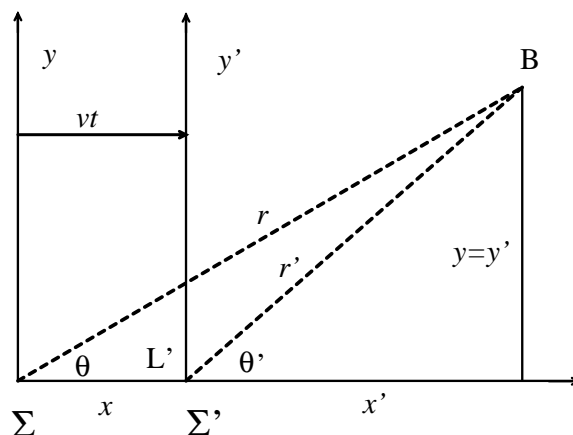


Abb. 5.5 Der Beobachter B ruht in Σ und beobachtet eine Lichtquelle L' , die in Σ' ruht.

$$E = \frac{E_0}{r} \cos \left\{ \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \delta \right\} \quad \text{bzw.} \quad E' = \frac{E_0}{r'} \cos \left\{ \omega' \left(t' - \frac{r'}{c} \right) + \delta' \right\}$$

mit $r = |\mathbf{r}|$ und einer Phase δ bzw. δ' . In kartesischen Koordinaten in der x - y -Ebene

$$\begin{aligned} x &= r \cos \vartheta & y &= r \sin \vartheta & r &= x \cos \vartheta + y \sin \vartheta \\ x' &= r' \cos \vartheta' & y' &= r' \sin \vartheta' & r' &= x' \cos \vartheta' + y' \sin \vartheta' \end{aligned}$$

erhält man mit der Lorentz-Transformation und $\alpha = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$

$$\begin{aligned} E &= \frac{E_0}{r} \cos \left\{ \omega \left(t - \frac{x}{c} \cos \vartheta - \frac{y}{c} \sin \vartheta \right) + \delta \right\} \\ E' &= \frac{E_0}{r'} \cos \left\{ \omega' \left(t' - \frac{x'}{c} \cos \vartheta' - \frac{y'}{c} \sin \vartheta' \right) + \delta' \right\} \\ &= \frac{E_0}{r'} \cos \left\{ \omega' \left[\alpha \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) - \frac{\alpha}{c} (x - vt) \cos \vartheta' - \frac{y}{c} \sin \vartheta' \right] + \delta' \right\}. \end{aligned}$$

Die beiden Kugelwellen müssen für alle t , x , y identisch sein und man erhält durch Vergleich drei Bedingungen

$$\begin{aligned} \omega &= \omega' \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ -\frac{\omega}{c} \cos \vartheta &= -\frac{\omega'}{c} \alpha \left(\frac{v}{c} + \cos \vartheta' \right) & \Rightarrow & \quad \cos \vartheta = \frac{\frac{v}{c} + \cos \vartheta'}{1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta'} \\ -\frac{\omega}{c} \sin \vartheta &= -\frac{\omega'}{c} \sin \vartheta' & \Rightarrow & \quad \sin \vartheta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\sin \vartheta'}{1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta'}. \end{aligned}$$

Bei Beobachtung der Lichtquelle in longitudinaler Richtung $\vartheta = \vartheta' = 0$ erhält man die Frequenzverschiebung ($\nu = \omega/2\pi$)

$$\nu = \nu' \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \nu' \left(1 + \frac{v}{c} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) = \nu' \left(1 + \frac{v}{c} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right),$$

die mit dem akustischen Doppler-Effekt $\nu = \nu'(1 + v/c)$ in erster Ordnung von v/c übereinstimmt. Die Rotverschiebung von Spektrallinien sich entfernender Sterne beruht auf diesem optischen Doppler-Effekt. Interessanterweise gibt es optisch auch einen transversalen Doppler-Effekt, der kein Analogon in der Akustik besitzt. Aus $\vartheta = \pi/2$ folgt $\cos \vartheta' = -v/c$ und man erhält

$$\nu = \nu' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \nu' \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right).$$

9) Sagnac-Effekt und Lasergyroskop

Befindet sich ein Laser-Interferometer in einem Bezugssystem, das gegenüber einem Inertialsystem mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ rotiert, so beobachtet man Interferenzerscheinungen aufgrund einer von $\vec{\Omega}$ abhängigen Frequenzverschiebung. Zur Beschreibung dieses Sagnac-Effektes betrachten wir einen Laser, der mit Hilfe dreier Spiegel zwei entgegengesetzt umlaufende Lichtstrahlen erzeugt, vergl. Abb. 5.6. Ist ω die Kreisfrequenz des Laserlichtes, so überlagern sich die beiden entgegengesetzt laufenden Lichtwellen im Detektor im Falle $\vec{\Omega} = 0$ zu einer stehenden Welle ¹

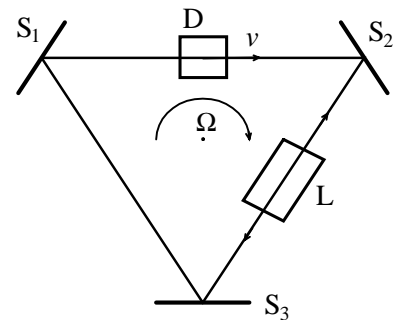


Abb. 5.6 Der Laser L erzeugt durch die Spiegel S_1 , S_2 , S_3 zwei entgegengesetzt umlaufende Lichtstrahlen, deren Frequenzdifferenz im Detektor D registriert wird. Die Drehachse steht senkrecht auf dem Dreieck.

¹ Es gilt $\cos\{\alpha - \beta\} + \cos\{\alpha + \beta\} = 2 \cos \alpha \cos \beta$.

$$S = a \cos \left\{ \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right\} + a \cos \left\{ \omega \left(t + \frac{x}{c} \right) \right\} = 2a \cos \left\{ \omega \frac{x}{c} \right\} \cos \{ \omega t \}.$$

Bei einer Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ hat der Detektor im Abstand R von der Drehachse die Geschwindigkeit $v = |\vec{\Omega}| R$, die näherungsweise die Relativgeschwindigkeit des rotierenden, hier gestrichenen Koordiantensystems Σ' darstellt. Für die Überlagerung der beiden Lichtwellen in Σ' hat man die Lorentz-Transformation von Abschn. 5.3 mit $\alpha = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ einzusetzen

$$\begin{aligned} S &= a \cos \left\{ \omega \alpha \left(t' + \frac{v}{c^2} x' - \frac{x'}{c} - \frac{v}{c} t' \right) \right\} + a \cos \left\{ \omega \alpha \left(t' + \frac{v}{c^2} x' + \frac{x'}{c} + \frac{v}{c} t' \right) \right\} \\ &= a \cos \left\{ \omega \alpha \left(1 - \frac{v}{c} \right) \left(t' - \frac{x'}{c} \right) \right\} + a \cos \left\{ \omega \alpha \left(1 + \frac{v}{c} \right) \left(t' + \frac{x'}{c} \right) \right\} \\ &= a \cos \left\{ \omega_1 \left(t' - \frac{x'}{c} \right) \right\} + a \cos \left\{ \omega_2 \left(t' + \frac{x'}{c} \right) \right\} \\ &= 2a \cos \left\{ \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t' + \frac{\omega_2 - \omega_1}{2c} x' \right\} \cos \left\{ \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t' + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2c} x' \right\} \end{aligned}$$

mit

$$\omega_1 = \omega \alpha \left(1 - \frac{v}{c} \right) \quad ; \quad \omega_2 = \omega \alpha \left(1 + \frac{v}{c} \right) \quad \text{und} \quad \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \omega \alpha \frac{v}{c} = \omega \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Im Detektor wird dann eine Frequenzverschiebung $\Delta\nu = (\omega_2 - \omega_1)/4\pi$ registriert ($\nu = \omega/2\pi$)

$$\Delta\nu = \nu \alpha \frac{v}{c} \approx \nu \frac{v}{c} = \nu \frac{R|\vec{\Omega}|}{c} = \frac{R|\vec{\Omega}|}{\lambda}$$

mit der Wellenlänge $\lambda = c/\nu$ des Laserlichtes. Bei einem Gyroskop zur Navigation in einem Flugzeug sei die Wellenlänge eines Rubinlasers $\lambda = 6943 \text{ \AA} \approx 6.9 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ und $R = 5 \text{ cm} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$. Beträgt dann in einer Kurve die Winkelgeschwindigkeit eine Umdrehung in 5 Minuten, so ist $|\vec{\Omega}| = 2.1 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ und die Frequenzverschiebung ist $\Delta\nu = 1.5 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} = 1.5 \text{ kHz}$.

5.5 Minkowski-Raum

Zur physikalischen Interpretation des vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuums, das Minkowski-Raum genannt wird, betrachten wir den räumlich eindimensionalen Fall wie in Abb. 5.7 und ordnen Punkte mit $t < 0$ der Vergangenheit und Punkte mit $t > 0$ der Zukunft zu. Ein Lichtblitz, der zur Zeit $t = 0$ (Gegenwart) am Ort $x = 0$ registriert oder ausgesendet wird, bewegt sich auf einer der beiden Geraden mit der Steigung ± 1 . Demgegenüber kann ein Massenpunkt, der zur Zeit $t = 0$ am Ort $x = 0$ angetroffen wird, nur die Punkte rechts im schraffierten Bereich in der Zukunft erreichen und kann nur aus dem linken schraffierten Bereich aus der Vergangenheit gekommen sein. Für alle diese Punkte gilt $c^2t^2 - x^2 > 0$ und man nennt sie auch zeitartig. Alle Punkte, die mit einem Ereignis bei $t = 0$, $x = 0$ kausal nicht zusammenhängen können, erfüllen die Bedingung $c^2t^2 - x^2 < 0$ und heißen raumartig. Die beiden Bereiche werden durch den Lichtkegel mit $c^2t^2 - x^2 = 0$ getrennt und nach Abschn. 5.4 ist $c^2t^2 - x^2$ invariant gegenüber Lorentz-Transformationen, was auch für die Einteilung in raumartige und zeitartige Vektoren zutrifft.

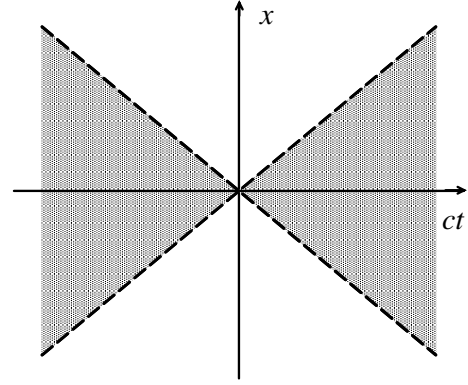


Abb. 5.7 In Bezug auf den Ursprung sind die Vektoren im grauen Bereich zeitartig und im weißen Bereich raumartig.

Zur Beschreibung dieser Verhältnisse wird der vierdimensionale Minkowski-Raum mit Hilfe von kontravarianten Vektorkomponenten x^μ und kovarianten Vektorkomponenten x_μ sowie $x^0 = x_0 = ct$ und $\mathbf{r} = (x, y, z)$ eingeführt

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \quad \text{und} \quad (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z).$$

Das skalare Produkt der Vierervektoren wird aus einem kontravarianten und einem kovarianten Vektor als Invariante gegenüber Lorentz-Transformationen definiert

$$x_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^3 x_\nu x^\nu = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2,$$

wobei in der Einstein-Konvention das Summenzeichen für ein Paar gleicher Indizes unten und oben fortgelassen wird. Sind nun x^μ die Vektorkomponenten bezüglich Σ und x'^μ bezüglich Σ' , so schreibt sich die Lorentz-Transformation nach Abschn. 5.3 in Matrizenform

$$\begin{aligned} x^\mu &= L^\mu{}_\nu(v)x'^\nu \\ x'^\mu &= L^\mu{}_\nu(-v)x^\nu \\ x_\nu &= L_\nu{}^\mu(-v)x'_\mu \\ x'_\nu &= L_\nu{}^\mu(v)x_\mu \end{aligned} \quad \text{mit} \quad L^\mu{}_\nu(v) = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{v}{c}\alpha & 0 & 0 \\ \frac{v}{c}\alpha & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L_\nu{}^\mu(v)$$

mit $\alpha = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, wobei die Summenkonvention nach Einstein verwendet wurde. Die Invarianz des skalaren Produktes gegenüber Lorentz-Transformationen schreibt sich damit

$$x_\nu x^\nu = L_\nu{}^\mu(-v)x'_\mu L^\nu{}_\rho(v)x'^\rho = x'_\mu \delta^\mu{}_\rho x'^\rho = x'_\mu x'^\mu, \quad \text{denn es gilt} \quad L^\mu{}_\nu(-v)L^\nu{}_\rho(v) = \delta^\mu{}_\rho,$$

wobei $\delta^\mu{}_\rho$ das Kronecker-Symbol bzw. die Einheitsmatrix bezeichnet.

5.6 Einsteins Relativitätstheorie

Das in Abschn. 1.4 formulierte Grundgesetz von Newton $\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\mathbf{p}$ ist nach Abschn. 4.1 invariant gegenüber der Galilei-Transformation, wenn eine absolute Zeit im Ortsraum postuliert wird. Wendet man wie bei der Herleitung der Lorentz-Transformation das Relativitätsprinzip an, wonach kein Inertialsystem gegenüber einem anderen ausgezeichnet ist, so muß ein dem Newtonschen Grundgesetz entsprechendes Grundgesetz im Minkowski-Raum gegenüber Lorentz-Transformationen invariant sein. Um ein solches Gesetz zu finden, betrachten wir einen Massenpunkt der Masse m , der in einem Inertialsystem Σ_0 im Ursprung ruhen möge. In diesem sogenannten Ruhssystem hat der Massenpunkt den Vierervektor x_0^μ oder $(ct_0, 0, 0, 0)$, wobei die Zeit t_0 in Σ_0 auch Eigenzeit genannt wird. Der Massenpunkt werde vom Laborsystem Σ aus beobachtet, und hat von dort aus gesehen die konstante Geschwindigkeit v , vergl. Abb. 5.8. Der Vierervektor des Laborsystems x^μ ergibt sich dann mit Hilfe der Lorentz-Transformation nach Abschn. 5.3 zu

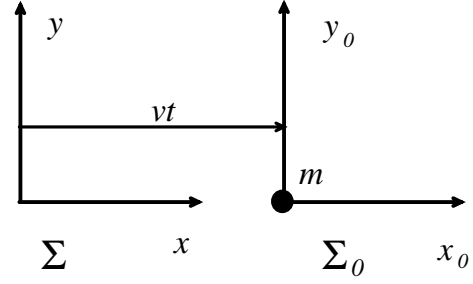


Abb. 5.8 Laborsystem Σ und Ruhssystem Σ_0

mit der Lorentz-Matrix $L^\mu{}_\nu(v)$ nach Abschn. 5.5. Hier ist $\alpha = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ und x und ct sind die Koordinaten des Massenpunktes im Laborsystem. Dann gilt

$$x^\mu = L^\mu{}_\nu(v)x_0^\nu \quad \text{oder} \quad (ct, x, 0, 0) = (ct_0\alpha, vt_0\alpha, 0, 0)$$

$$x = vt = vt_0\alpha \quad \text{mit} \quad \frac{dx}{dt} = v \quad \text{und} \quad t = t_0\alpha \quad \text{mit} \quad dt = \alpha dt_0.$$

Die Vierergeschwindigkeit ist im Ruhssystem Σ_0

$$w_0^\mu = \frac{dx_0^\mu}{dt_0} \quad \text{oder} \quad w_0^0 = c \quad ; \quad w_0^1 = 0 \quad ; \quad w_0^2 = w_0^3 = 0,$$

und soll sich mit der Lorentz-Transformation in die Vierergeschwindigkeit w des Laborsystems transformieren

$$w^\mu = L^\mu{}_\nu(v)w_0^\nu \quad \text{oder} \quad w^0 = c\alpha \quad ; \quad w^1 = v\alpha \quad ; \quad w^2 = w^3 = 0.$$

Diese Geschwindigkeit erhält man im Laborsystem, indem man mit Einstein eine Differentiation nach der Eigenzeit t_0 postuliert

$$w^\mu = \frac{d}{dt_0}x^\mu, \quad \text{denn dann gilt} \quad w^\mu = \frac{dt}{dt_0} \frac{dx^\mu}{dt} = \alpha \frac{dx^\mu}{dt} \quad \text{oder} \quad w^0 = \alpha c \quad ; \quad w^1 = \alpha v$$

und $w^2 = w^3 = 0$. Entsprechend führt man die Viererimpulse durch Multiplikation der Geschwindigkeiten mit der Masse m ein (Ruhmasse)

$$\begin{aligned} p_0^0 = mc \quad ; \quad p_0^1 = 0 \quad ; \quad p_0^2 = p_0^3 = 0 & \quad \text{im Ruhssystem} \\ p^0 = mc\alpha \quad ; \quad p^1 = mv\alpha \quad ; \quad p^2 = p^3 = 0 & \quad \text{im Laborsystem.} \end{aligned}$$

Für den Impuls des Massenpunktes in x -Richtung im Laborsystem gilt dann im Unterschied zur klassischen Mechanik

$$p^1 = p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{und} \quad p^0 = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad p^2 = p^3 = 0.$$

Dann findet man aus dem Skalarprodukt im Minkowski-Raum die gegenüber Lorentz-Transformationen invarianten Ausdrücke

$$\begin{aligned} x_0^\mu x_{0\mu} = c^2 t_0^2 \quad \text{und} \quad x^\mu x_\mu = c^2 t^2 - x^2 = c^2 t_0^2 \alpha^2 - v^2 t_0^2 \alpha^2 = \frac{c^2 - v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} t_0^2 = c^2 t_0^2 \\ w_0^\mu w_{0\mu} = c^2 \quad \text{und} \quad w^\mu w_\mu = c^2 \alpha^2 - v^2 \alpha^2 = c^2 \\ p_0^\mu p_{0\mu} = m^2 c^2 \quad \text{und} \quad p^\mu p_\mu = m^2 c^2 \alpha^2 - m^2 v^2 \alpha^2 = m^2 c^2. \end{aligned}$$

Bei der Formulierung eines Bewegungsgesetzes muß beachtet werden, daß eine Herleitung aufgrund der Kenntnis der Lorentz-Transformation nicht möglich ist, weil diese nur zwischen Inertialsystemen gilt, die sich gegeneinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, das Grundgesetz aber die Beschleunigung des Massenpunktes bzw. des Ruhesystems gegenüber dem Laborsystem beschreiben soll. In Analogie zum Postulat der Geschwindigkeit im Laborsystem als Ableitung des Ortsvierervektors nach der Eigenzeit wird nach A. Einstein das gegen Lorentz-Transformationen invariante Grundgesetz im Laborsystem in der Form postuliert

$$F^\mu = \frac{d}{dt_0} p^\mu \quad \text{mit} \quad p^0 = m c \alpha \quad ; \quad p^1 = m v \alpha \quad ; \quad p^2 = p^3 = 0,$$

wobei t_0 die Eigenzeit, d.h. die Zeit im Ruhesystem bezeichnet. Dann gilt für die Einskomponente des Vierervektors F^1 der Kraft wegen $dt = \alpha dt_0$

$$F^1 = \frac{d}{dt_0} p^1 = \frac{dt}{dt_0} \frac{dp^1}{dt} = \alpha \frac{d}{dt} m v \alpha = \alpha F_x \quad \text{mit} \quad F_x = \frac{d}{dt} \frac{m v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Die Nullkomponente hat die Form

$$F^0 = \frac{d}{dt_0} p^0 = \frac{dt}{dt_0} \frac{dp^0}{dt} = \alpha \frac{d}{dt} \frac{m c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Um ihre physikalische Bedeutung zu verstehen, berechnen wir das skalare Produkt im Minkowski-Raum ($w_1 = -w^1$)

$$F^\mu w_\mu = \alpha^2 \left(\frac{d}{dt} \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - F_x v \right).$$

Andererseits gilt aber aufgrund des Einsteinschen Grundgesetzes

$$F^\mu w_\mu = \left(\frac{d}{dt_0} p^\mu \right) w_\mu = \left(\frac{d}{dt_0} m w^\mu \right) w_\mu = \frac{m}{2} \frac{d}{dt_0} w^\mu w_\mu = \frac{m}{2} \frac{d}{dt_0} (c^2) = 0,$$

woraus

$$F_x v = \frac{d}{dt} \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

resultiert. Der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung entspricht in der klassischen Mechanik der zeitlichen Änderung der kinetischen Energie

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} m v^2 = m v \dot{v} = v F_x,$$

und deshalb wird nach Einstein die kinetische Energie in der Form postuliert

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Eine Reihenentwicklung nach $\frac{v^2}{c^2} < 1$ ergibt ¹

$$\frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right) = m c^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{3}{8} m v^2 \frac{v^2}{c^2} + \dots$$

¹ Für $|\varepsilon| < 1$ gilt $(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 + \dots$

Für einen im Laborsystem ruhenden Massenpunkt gilt $v = 0$ und die Ruhenergie der Masse m beträgt danach mc^2 , was auch als Äquivalenz von Masse und Energie bezeichnet wird. Die von Einstein gefolgerte Möglichkeit der Umwandlung von Masse in Energie und umgekehrt ist durch zahlreiche Experimente belegt. Der zweite Term in obiger Reihenentwicklung stellt die kinetische Energie der klassischen Mechanik dar und der dritte Term beschreibt für $v \ll c$ einen relativistischen Korrekturterm.

Die Nullkomponenten von Viererkraft F^μ und Viererimpuls p^μ schreiben sich mit der kinetischen Energie E

$$F^0 = \alpha \frac{d}{dt} \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\alpha}{c} \frac{d}{dt} E \quad \text{und} \quad p^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E}{c}.$$

Aus dem skalaren Produkt des Viererimpulses findet man damit die relativistische Energie-Impuls-Beziehung ($p = p^1 = -p_1$)

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2 \quad \text{oder} \quad E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2,$$

die gegenüber Lorentz-Transformationen invariant ist und für $p \ll mc$ die Form hat

$$E = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m^2 c^2} + \dots \right) = mc^2 + \frac{p^2}{2m} + \dots$$

Die Energie-Impulsbeziehung von Einstein wurde für Massenpunkte formuliert, gilt aber auch für masselose Teilchen wie Photonen mit der Frequenz ν , der Wellenlänge λ und dem Dispersionsgesetz $\nu\lambda = c$, wenn die De Broglie-Beziehungen mit dem Planckschen Wirkungsquantum $h = 6.62 \cdot 10^{-34} \text{ Kg m}^2 \text{ s}^{-1}$

$$E = h\nu \quad \text{und} \quad p = \frac{h}{\lambda}$$

sowie $m = 0$ eingesetzt werden

$$E^2 = p^2 c^2 = \frac{h^2}{\lambda^2} c^2 = h^2 \nu^2.$$

Die Einsteinsche Energie-Impuls-Beziehung bildet somit ein Bindeglied zwischen der Energie-Impuls-Beziehung von Massenpunkten in der klassischen Mechanik und dem Dispersionsgesetz elektromagnetischer Wellen. In der Abb. 5.9 sind die Energie-Impuls-Beziehungen in Einheiten von mc^2 für die Energie und mc für den Impuls dargestellt.

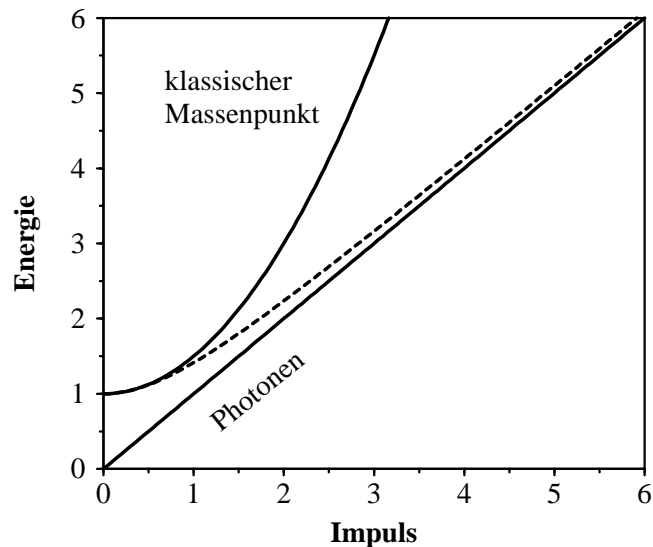


Abb. 5.9 Einsteinsche Energie-Impuls-Beziehung für Massenpunkte (gestrichelt) im Vergleich zur klassischen Mechanik und der Dispersionsbeziehung von elektromagnetischen Wellen (Photonen).

6 Elektrostatik

In den vorangegangenen Kapiteln wurde die Bewegung von Massenpunkten im Rahmen der klassischen Mechanik behandelt. Die Bahnkurve ergibt sich dabei aus dem Grundgesetz $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$, wobei unter anderem die folgenden Kräfte $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ als Funktion des Ortes \mathbf{r} und der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$ betrachtet wurden:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_G &= -G \frac{mM}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} && \text{Gravitationskraft} \\ \mathbf{F}_g &= m\mathbf{g} && \text{Gewichtskraft} \\ \mathbf{F}_R &= -c\mathbf{r} && \text{elastische Rückstellkraft} \\ \mathbf{F}_r &= -\beta\dot{\mathbf{r}} && \text{Reibungskraft} \\ \mathbf{F}^{\text{Cor}} &= -2m\vec{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} && \text{Coriolis-Kraft} \\ \mathbf{F}^{\text{Zen}} &= -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}) && \text{Zentrifugalkraft.} \end{aligned}$$

In diesem Kapitel werden Kräfte zwischen geladenen Massenpunkten untersucht, indem wir einem Massenpunkt am Ort \mathbf{r} neben der Masse m als zusätzliche Eigenschaft eine elektrische Ladung q zuordnen. Die elektrische Ladung wird in Einheiten C (Coulomb) gemessen. Aus Experimenten ist bekannt, daß solche Ladungen nur in positiven oder negativen ganzzahligen Vielfachen einer Elementarladung $e_0 = 1.6021773 \cdot 10^{-19}$ C auftreten und die damit zusammenhängenden Kräfte auch von der Geschwindigkeit abhängen. Neben der Gravitation und dieser sogenannten elektroschwachen Wechselwirkung wird z.B. zwischen den Nukleonen im Atomkern noch eine sogenannte starke Wechselwirkung beobachtet, die ihre Ursache in den Farb-Kräften einzelner Quarks hat, aus denen die Nukleonen zusammengesetzt sind. In diesem Kapitel beschränken wir uns auf die stationären Kräfte zwischen elektrisch geladenen Massenpunkten, die wir auch als Punktladungen bezeichnen.

6.1 Coulomb-Gesetz

Die Kraft, die die Punktladung q_1 am Ort \mathbf{r}_1 auf die Punktladung q_2 am Ort \mathbf{r}_2 ausübt, ist durch das **Coulomb-Gesetz**

$$\mathbf{F}_C = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.9875518 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

gegeben, wobei die elektrische Feldkonstante ϵ_0 durch das Maßsystem festgelegt ist. Im Unterschied zur Gravitationskraft kann die Coulomb-Kraft anziehend oder abstoßend sein. Eine Punktladung q_1 am Ort \mathbf{r}_1 erzeugt am Ort \mathbf{r} ein Kraftfeld $\mathbf{F}_C(\mathbf{r})$, das mit Hilfe der elektrischen Feldstärke $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ gemäß

$$\mathbf{F}_C(\mathbf{r}) = q \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3}$$

beschrieben wird. Die elektrische Feldstärke $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ existiert überall im dreidimensionalen Ortsraum \mathcal{R} außer an der Stelle \mathbf{r}_1 , wo sich eine Singularität befindet. Die Dimension der elektrischen Feldstärke ist

$$[\mathbf{E}] = \frac{[\mathbf{F}_C]}{[q]} = \frac{\text{N}}{\text{C}}.$$

Es gilt nach Abschn. 1.4 Axiom 4 das Prinzip von der ungestörten Superposition der Kräfte. Befinden sich etwa N Punktladungen q_j an den Orten \mathbf{r}_j mit $j = 1, 2, \dots, N$, so ist die elektrische Feldstärke gegeben durch

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3}$$

und existiert nicht an den Stellen $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$. Zum quantitativen Vergleich zwischen der Coulomb-Kraft \mathbf{F}_C und der Gravitationskraft \mathbf{F}_G , die zwei Elektronen der Masse $m_e = 9.1093897 \cdot 10^{-31}$ kg und der Ladung $-e_0$ aufeinander ausüben, berechnen wir

$$\frac{|\mathbf{F}_C|}{|\mathbf{F}_G|} = \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{Gm_e^2} \approx 4 \cdot 10^{42},$$

so daß die Gravitationskräfte praktisch nur an elektrisch neutraler Materie meßbar sind.

6.2 Elektrostatisches Potential

Die Coulomb-Kraft $\mathbf{F}_C(\mathbf{r})$ besitzt die gleiche Ortsabhängigkeit wie die Gravitationskraft $\mathbf{F}_G(\mathbf{r})$ und ist damit nach Abschn. 3.1 ebenso wie die elektrische Feldstärke $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ konservativ. Für die elektrische Feldstärke einer Punktladung q_1 am Ort \mathbf{r}_1 gilt daher

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -dV(\mathbf{r}) \quad \text{mit} \quad V(\mathbf{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \quad \text{und} \quad [V(\mathbf{r})] = \frac{\text{Nm}}{\text{C}} = \text{V}.$$

Das elektrostatische Potential $V(\mathbf{r})$ existiert nicht an der Stelle \mathbf{r}_1 und wird in Einheiten V (Volt) gemessen. Der Zusammenhang mit dem Potential $U(\mathbf{r})$ der Kraft \mathbf{F} mit $d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dU$ ist durch $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ und $U(\mathbf{r}) = qV(\mathbf{r})$ gegeben, und $U(\mathbf{r})$ wird in Einheiten Nm = J gemessen.

Zur übersichtlicheren Darstellung der Rechnungen mit Vektorfeldern führen wir als Vektoroperator den **Nablaoperator** durch seine Komponenten in kartesischen Koordinaten ein $\mathbf{r} = (x, y, z)$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Damit schreibt sich das totale Differential des elektrostatischen Potentials $V(\mathbf{r})$ in der einfachen Form, vergl. Abschn. 3.1,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \nabla V \cdot d\mathbf{r} \quad \text{mit} \quad \nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right).$$

Der Vektor ∇V heißt Gradient des skalaren Feldes $V(\mathbf{r})$ und transformiert wie der Ortsvektor $\mathbf{r}' = S\mathbf{r}$ mit $S = (s_{jk})$ und $S^T = S^{-1}$ und $\mathbf{r} = S^T \mathbf{r}'$, vergl. Abschn. 1.1, mit $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ und $\mathbf{r}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$

$$\frac{\partial V}{\partial x'_j} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x'_j} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_k} s_{kj}^T = \sum_{k=1}^3 s_{jk} \frac{\partial V}{\partial x_k} \quad \text{wegen} \quad x_k = \sum_{j=1}^3 s_{jk} x'_j.$$

Es gilt für die elektrische Feldstärke $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ einer Punktladung q_1 am Ort \mathbf{r}_1

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} \quad \text{und} \quad V(\mathbf{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}.$$

□ Zur Vereinfachung des Beweises setzen wir $\mathbf{r}_1 = 0$ und $r = |\mathbf{r}|$. Da der Nablaoperator ein Differentialoperator ist, gilt

$$\begin{aligned} \nabla r &= \frac{\mathbf{r}}{r} & \text{wegen} & \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \nabla \frac{1}{r} &= -\frac{\mathbf{r}}{r^3} & \text{wegen} & \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}. \end{aligned}$$

Damit findet man

$$\nabla V(\mathbf{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \frac{1}{r} = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\mathbf{E}(\mathbf{r}),$$

was zu beweisen war. ■

Für die elektrische Feldstärke $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ von N Punktladungen q_1, q_2, \dots, q_N an den Orten $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ gilt nach dem Prinzip von der ungestörten Superposition der Kräfte

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad \text{mit} \quad V(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|},$$

wobei $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ und das elektrostatische Potential $V(\mathbf{r})$ an den Stellen $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ singularär sind. Nimmt man nun an, daß alle elektrischen Felder ihre Ursache in Punktladungen haben, so existiert wegen des Superpositionsprinzips der Kräfte allgemein zu jedem $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ein elektrostatisches Potential $V(\mathbf{r})$ derart, daß $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$ gilt. Diese Beziehung konservativer Vektorfelder $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ erleichtert die mathematische Beschreibung, weil sich aus der Berechnung des Potentials $V(\mathbf{r})$ alle drei Komponenten $(E_1(\mathbf{r}), E_2(\mathbf{r}), E_3(\mathbf{r})) = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ in einfacher Weise durch Differenzieren ergeben.

6.3 Energie des elektrostatischen Feldes

Wir definieren die elektrostatische Energie E^{pot} einer Punktladung q in einem gegebenen elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ als die Arbeit, die aufgewendet werden muß, um die Ladung q aus dem Unendlichen an den Ort \mathbf{r} zu bringen. Da die Kraft auf die Punktladung $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$ konservativ ist, ist das Arbeitsintegral vom Wege unabhängig und es gilt nach Abschn. 1.5 E

$$\begin{aligned} E^{\text{pot}} &= - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = -q \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = q \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \nabla' V(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = q \int_{\infty}^{\mathbf{r}} dV \\ &= qV(\mathbf{r}) - qV(\infty). \end{aligned}$$

Weil man bei der Messung von Kräften immer nur Potentialdifferenzen bestimmt, kommt es bei $V(\mathbf{r})$ auf eine additive Konstante nicht an, und man setzt verabredungsgemäß $V(\infty) = 0$, sodaß $E^{\text{pot}} = qV(\mathbf{r})$ resultiert.

Als Beispiel betrachten wir ein Proton der Ladung e_0 , das sich im Ursprung des Koordinatensystems befindet und ein Elektron der Ladung $-e_0$ am Ort \mathbf{r} . Die vom Proton erzeugte elektrische Feldstärke sei $\mathbf{E}_p(\mathbf{r})$ und $V_p(\mathbf{r})$ das zugehörige Potential. Die Kraft auf das Elektron sei $\mathbf{F}_e(\mathbf{r})$ und die potentielle Energie des Elektrons E_e^{pot} . Dann gilt mit $r = |\mathbf{r}|$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_p(\mathbf{r}) &= \frac{e_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad ; \quad V_p(\mathbf{r}) = \frac{e_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \\ \mathbf{F}_e(\mathbf{r}) &= -\frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad ; \quad E_e^{\text{pot}} = -e_0 V_p(\mathbf{r}) = -\frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Befindet sich dagegen im Ursprung ein Elektron, so ergeben sich die Felder entsprechend

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_e(\mathbf{r}) &= -\frac{e_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad ; \quad V_e(\mathbf{r}) = -\frac{e_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \\ \mathbf{F}_e(\mathbf{r}) &= \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad ; \quad E_e^{\text{pot}} = -e_0 V_e(\mathbf{r}) = \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

In der Abb. 6.1 ist E^{pot} in Einheiten $\text{Ha} = e_0^2/(4\pi\epsilon_0 a_B)$ und die Länge in $a_B = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2/(e_0^2 m_e)$ angegeben. Dabei ist m_e die Elektronenmasse, \hbar das Plancksche Wirkungsquantum und Ha das Hartree.

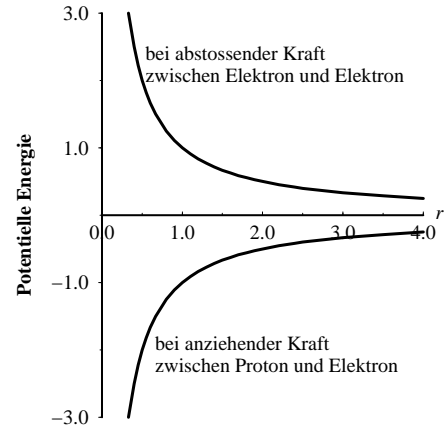


Abb. 6.1 Potentielle Energie bei abstossender und bei anziehender Coulomb-Kraft.

Wir bestimmen jetzt die potentielle Energie, die aufgewendet werden muß, um N Punktladungen q_1, q_2, \dots, q_N an die Orte $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ zu bringen. Es kostet keine elektrostatische Energie, die erste Punktladung q_1 an den Ort \mathbf{r}_1 zu bringen, da noch kein elektrisches Feld vorhanden ist. Sie erzeugt dann das elektrische Feld $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$ mit dem Potential $V_1(\mathbf{r})$

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} = -\nabla V_1(\mathbf{r}) \quad \text{mit} \quad V_1(\mathbf{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}.$$

Wir bringen die zweite Punktladung q_2 an den Ort \mathbf{r}_2 und wenden die Energie

$$E_2^{\text{pot}} = q_2 V_1(\mathbf{r}_2) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

auf. Das nunmehr vorhandene elektrische Feld ist

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^2 \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} = -\nabla V_2(\mathbf{r}) \quad \text{mit} \quad V_2(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^2 \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}.$$

Bringt man die weiteren Punktladungen ebenfalls an ihre Orte, so erhält man schließlich für die potentielle Energie aller N Punktladungen

$$E^{\text{pot}} = \sum_{k=2}^N E_k^{\text{pot}} = \sum_{k=2}^N q_k V_{k-1}(\mathbf{r}_k) = \sum_{k=2}^N q_k \sum_{j=1}^{k-1} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j|} = \sum_{\substack{j,k \\ j < k}}^{1 \dots N} \frac{q_j q_k}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|}.$$

6.4 Elektrischer Dipol

Wir betrachten zwei entgegengesetzt gleiche Punktladungen q und $-q$ an den Orten $\frac{1}{2}\mathbf{l}$ und $-\frac{1}{2}\mathbf{l}$ mit festem Abstand l und untersuchen das elektrische Feld $\mathbf{E}_D(\mathbf{r})$, das dieser elektrische Dipol näherungsweise am Ort \mathbf{r} für $l \ll |\mathbf{r}|$ erzeugt, vergl. Abb. 6.2.

A) Potential des Dipols

Das elektrostatische Potential der beiden Punktladungen ist

$$V_D(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{l}|} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{l}|}.$$

Die Entwicklung in eine Potenzreihe nach der kleinen Größe $\frac{l}{|\mathbf{r}|}$ ergibt mit $r = |\mathbf{r}|$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} \mp \frac{1}{2}\mathbf{l}|} &= \frac{1}{r} \frac{1}{|\frac{\mathbf{r}}{r} \mp \frac{1}{2}\frac{\mathbf{l}}{r}|} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 \mp \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{l}}{r^2} + \frac{1}{4}\frac{l^2}{r^2}}} \\ &\approx \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 \mp \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{l}}{r^2}}} \approx \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{l}}{r^2} \right), \end{aligned}$$

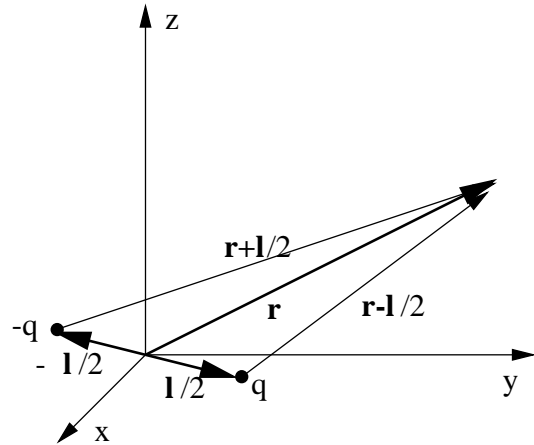


Abb. 6.2 Elektrischer Dipol im Ursprung.

denn es gilt für $|\varepsilon| \ll 1$: $(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \dots \approx 1 + n\varepsilon$ mit $n = -\frac{1}{2}$. Also findet man genähert für das Potential des Dipols mit dem Dipolmoment $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$

$$V_D(\mathbf{r}) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{l}}{r^2} - 1 + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{l}}{r^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{l}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3} \quad \text{für } l \ll |\mathbf{r}|.$$

B) Elektrische Feldstärke des Dipols

Aus dem Potential $V_D(\mathbf{r})$ berechnen wir die elektrische Feldstärke genähert zu

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_D(\mathbf{r}) &= -\nabla V_D(\mathbf{r}) = -\nabla \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r^3} \nabla \mathbf{p}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{p}\cdot\mathbf{r} \nabla \frac{1}{r^3} \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{p}}{r^3} + \mathbf{p}\cdot\mathbf{r} \frac{-3\mathbf{r}}{r^4} \right] = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r}, \end{aligned}$$

wobei $\nabla \mathbf{p}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{p}$ und $\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ beachtet wurden.

C) Kraft auf einen Dipol im elektrischen Feld

Wir betrachten einen elektrischen Dipol mit dem Dipolmoment \mathbf{p} am Ort \mathbf{r} im elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Die auf den Dipol wirkende Kraft \mathbf{F}_D setzt sich aus den Kräften auf die beiden Punktladungen an den Orten $\mathbf{r} \pm \frac{1}{2}\mathbf{l}$ zusammen

$$\mathbf{F}_D = q\mathbf{E}(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{l}) - q\mathbf{E}(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{l})$$

und es gilt genähert für $l \ll |\mathbf{r}|$ die Taylor-Entwicklung an der Stelle \mathbf{r}

$$\mathbf{E}(\mathbf{r} \pm \frac{1}{2}\mathbf{l}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \pm \frac{1}{2}\mathbf{l}\cdot\nabla\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \dots$$

Einsetzen liefert mit $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$

$$\mathbf{F}_D = q \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\mathbf{l}\cdot\nabla\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \dots \right] - q \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}) - \frac{1}{2}\mathbf{l}\cdot\nabla\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \dots \right] \approx \mathbf{p}\cdot\nabla\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

und man erkennt, daß \mathbf{F}_D im homogenen elektrischen Feld verschwindet.

D) Drehmoment auf einen Dipol im elektrischen Feld

Das Drehmoment \mathbf{D}_D auf einen Dipol mit dem Dipolmoment \mathbf{p} am Ort \mathbf{r} durch ein elektrisches Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ist die Summe aus den Drehmomenten der beiden Punktladungen

$$\mathbf{D}_D = \frac{1}{2}\mathbf{l} \times q\mathbf{E}(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{l}) + (-\frac{1}{2}\mathbf{l}) \times (-q)\mathbf{E}(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{l}) \approx \frac{1}{2}\mathbf{l} \times q\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\mathbf{l} \times q\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{p} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

E) Energie eines Dipols im elektrischen Feld

Die Energie E_D^{pot} eines Dipols mit dem Dipolmoment \mathbf{p} am Ort \mathbf{r} im elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$ setzt sich nach Abschn. 6.3 aus den Arbeiten zusammen, die erforderlich sind, um die beiden Punktladungen q und $-q$ an die Orte $\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{l}$ und $\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{l}$ zu bringen

$$\begin{aligned} E_D^{\text{pot}} &= qV(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{l}) + (-q)V(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{l}) \\ &= q \left[V(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\mathbf{l} \cdot \nabla V(\mathbf{r}) + \dots \right] - q \left[V(\mathbf{r}) - \frac{1}{2}\mathbf{l} \cdot \nabla V(\mathbf{r}) + \dots \right] \\ &\approx \frac{q}{2}\mathbf{l} \cdot \nabla V(\mathbf{r}) + \frac{q}{2}\mathbf{l} \cdot \nabla V(\mathbf{r}) = \mathbf{p} \cdot \nabla V(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Die potentielle Energie des Dipols E_D^{pot} hat für $\mathbf{p} \uparrow \mathbf{E}$ ein Minimum, so daß sich in vielen Fällen der elektrische Dipol in Richtung des elektrischen Feldes ausrichtet.

6.5 Laplace-Gleichung

Das elektrische Feld von N Punktladungen q_1, \dots, q_N an den Orten $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ ist

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad \text{mit} \quad V(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}$$

und existiert nicht an den Stellen $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$. Dann verschwindet die Divergenz der elektrischen Feldstärke

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad \text{wegen} \quad \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \nabla \frac{1}{r^3} = \frac{3}{r^3} + \mathbf{r} \cdot \frac{-3\mathbf{r}}{r^4} = 0.$$

Setzt man das elektrostatische Potential ein, erhält man daraus die Laplace-Gleichung als Differentialgleichung für das Potential überall dort, wo keine elektrischen Ladungen sind

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{oder} \quad \nabla \cdot \nabla V(\mathbf{r}) = \Delta V(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{mit} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Die Laplace-Gleichung mit dem Laplace-Operator Δ fassen wir als Differentialgleichung auf, mit der das elektrostatische Potential im ladungsfreien Raum berechnet werden kann.

Als Beispiel bestimmen wir das Potential einer Punktladung im Ursprung, das aus Symmetriegründen nur vom Betrag $r = |\mathbf{r}|$ des Ortsvektors abhängen kann $V = V(r)$. Dann gilt für $r \neq 0$ mit $V' = dV/dr$

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta V = \nabla \cdot \nabla V = \nabla \cdot V' \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \nabla V' + V' \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot V'' \nabla r + V' \left(\frac{1}{r} \nabla \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) \\ &= V'' + \frac{3}{r} V' + V' \mathbf{r} \cdot \frac{-1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = V'' + \frac{2}{r} V'. \end{aligned}$$

Zur Lösung der Differentialgleichung setzen wir $\phi(r) = rV(r)$ mit $\phi' = rV' + V$ und $\phi'' = rV'' + 2V'$, und erhalten die Differentialgleichung

$$V'' + \frac{2}{r} V' = \frac{1}{r} \phi'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(r) = ar + b \quad \text{und} \quad V(r) = \frac{b}{r} + a.$$

Die beiden Integrationskonstanten a und b ergeben sich aus den Randbedingungen

$$V(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \quad \text{und} \quad V(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad \text{und wir erhalten} \quad V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}.$$

Daraus ergibt sich das Coulomb-Gesetz mit Hilfe von $\mathbf{F} = q_1 \mathbf{E} = -q_1 \nabla V$ als Lösung der Laplace-Gleichung für eine Punktladung q im Ursprung und eine Punktladung q_1 am Ort \mathbf{r} .

Hier wurde auf induktivem Wege aus dem Coulomb-Gesetz die Differentialgleichung für das elektrische Feld im ladungsfreien Raum $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ gefunden. Allgemein können die Differentialgleichungen der elektromagnetischen Felder auch axiomatisch festgelegt werden, um daraus Lösungen für bestimmte Systeme berechnen zu können.

6.6 Poisson-Gleichung

Zur Herleitung einer Differentialgleichung für die elektrische Feldstärke, die von gegebenen elektrischen Ladungen herrührt, betrachten wir zunächst eine Punktladung q_1 am Ort \mathbf{r}_1 , deren elektrisches Feld dort eine Singularität besitzt. Es sei G ein endliches, einfach zusammenhängendes Volumen, in dessen Innern sich die Punktladung befindet, vergl. Abb. 6.3. Spart man um die Punktladung eine Kugel mit dem Volumen K aus, so ist das Volumen $\tilde{G} = G \setminus K$ ladungsfrei, so daß dort nach dem vorangehenden Abschnitt $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ gilt. Wir bezeichnen die Oberfläche von G mit $O = \partial G$ und die der Kugel mit ∂K . Dann gilt nach dem Integralsatz von Gauß

$$0 = \int_{\tilde{G}} \nabla \cdot \mathbf{E} d^3r = \oint_{\partial \tilde{G}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \oint_O \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} + \oint_{\partial K} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f}.$$

Das letzte Integral über die Oberfläche der Kugel K mit dem Radius a läßt sich aus der bekannten elektrischen Feldstärke der Punktladung berechnen, indem Kugelkoordinaten $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 : a, \vartheta, \varphi$ eingeführt werden:

$$\oint_{\partial K} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = -\frac{q_1}{\epsilon_0}$$

wegen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} \quad \text{und} \quad d\mathbf{f} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} a^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Hier wurde beachtet, daß der Oberflächenvektor $d\mathbf{f}$ bezüglich \tilde{G} nach außen, also in Richtung auf \mathbf{r}_1 weist. Damit erhält man für das Integral über die Oberfläche O von G

$$\oint_O \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \frac{q_1}{\epsilon_0} \quad \text{oder bei } N \text{ Punktladungen} \quad \oint_O \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

wobei $Q = \sum_j q_j$ die Gesamtladung im Volumen G bezeichnet.

Wir gehen nun zu einer kontinuierlichen Ladungsverteilung über. Befindet sich im infinitesimalen Volumenelement d^3r am Ort \mathbf{r} die Ladung dq , so definiert man eine elektrische Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ durch $dq = \rho(\mathbf{r}) d^3r$. Ist dann $Q = \int_G \rho(\mathbf{r}) d^3r$ die insgesamt im Volumen G befindliche Ladung, so erhält man mit dem Integralsatz von Gauß

$$\int_G \nabla \cdot \mathbf{E} d^3r = \int_{O=\partial G} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_G \rho(\mathbf{r}) d^3r \quad \text{oder} \quad \int_G \left(\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \right) d^3r = 0.$$

Weil das letzte Integral für beliebige Volumina G verschwindet, muß notwendigerweise der Integrand Null sein, und man erhält die Poisson-Gleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

als Feldgleichung zwischen der elektrischen Feldstärke $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ und der elektrischen Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$. Wird $\rho(\mathbf{r})$ vorgegeben, so handelt es sich um eine inhomogene Differentialgleichung und die zugehörige homogene Differentialgleichung ist die Laplace-Gleichung. Die allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung ist dann die Summe aus der allgemeinen Lösung der Laplace-Gleichung und einer speziellen Lösung der Poisson-Gleichung.

Zur Konstruktion einer speziellen Lösung der Poisson-Gleichung betrachten wir ein infinitesimales Volumenelement d^3r' am Ort \mathbf{r}' , in dem sich die elektrische Ladung $dq = \rho(\mathbf{r}') d^3r'$ befinden möge. Im Limes $d^3r' \rightarrow 0$ ist dann die von dq erzeugte elektrische Feldstärke am Ort \mathbf{r} gegeben durch

$$d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\rho(\mathbf{r}') d^3r'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

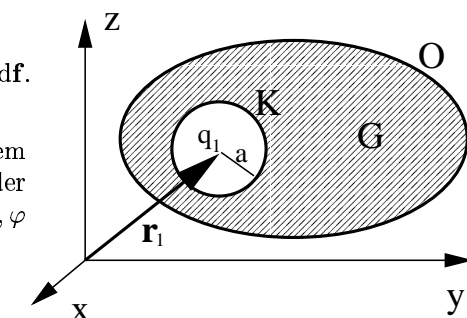


Abb. 6.3 Im Volumen G mit der Oberfläche O befindet sich eine Kugel K um die Ladung q_1 .

und die im Volumen G insgesamt befindliche Ladung Q erzeugt die elektrische Feldstärke am Ort \mathbf{r}

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_G \frac{\rho(\mathbf{r}') d^3r'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad \text{mit} \quad Q = \int_G \rho(\mathbf{r}) d^3r.$$

Die Lösung der Poisson-Gleichung vereinfacht sich, wenn für die elektrische Feldstärke $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ das elektrostatische Potential $V(\mathbf{r})$ eingeführt wird: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$. Damit erhält man die Poisson-Gleichung in der Form

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \nabla V(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad \text{oder} \quad \Delta V(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

mit dem Laplace-Operator $\Delta = \nabla \cdot \nabla$. Die spezielle Lösung hat dann die Form

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_G \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad \text{mit} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) = \int_G \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r'.$$

Beispiel: Kugelkondensator

Als Anwendungsbeispiel berechnen wir die Kapazität eines Kugelkondensators. Er besteht aus zwei konzentrischen, metallischen Kugeln der Radien R_i und R_a , die durch ein Vakuum getrennt, und mit der Ladung Q entgegengesetzt geladen sind, vergl. Abb. 6.4. Innerhalb des Metalles soll das elektrische Feld wegen der hohen elektrischen Leitfähigkeit verschwinden, sodaß das Potential konstant ist. Die Potentialdifferenz zwischen beiden Metallkugeln wird mit U bezeichnet. Im Vakuum zwischen den Kugeln befinden sich keine Ladungen und in diesem Bereich ist die Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta V = 0$ kugelsymmetrisch $V = V(r)$ mit $r = |\mathbf{r}|$ und es gilt nach Abschn. 6.5

$$V(r) = \frac{b}{r} + a \quad \text{mit} \quad a, b \quad \text{konstant.}$$

Anwenden der Poisson-Gleichung und des Integralsatzes von Gauß liefert für das Integral über die innere Kugel K_i

$$\int_{K_i} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) d^3r = \oint_{\partial K_i} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = -\oint_{\partial K_i} \nabla V(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{K_i} \rho(\mathbf{r}) d^3r = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

und es gilt in Kugelkoordinaten R_i, ϑ, φ

$$\begin{aligned} \frac{Q}{\epsilon_0} &= -\oint_{\partial K_i} \nabla \left(\frac{b}{r} + a \right) \cdot d\mathbf{f} = -\oint_{\partial K_i} \nabla \frac{b}{r} \cdot d\mathbf{f} \\ &= b \oint_{\partial K_i} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} R_i^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= b \oint_{\partial K_i} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 4\pi b. \end{aligned}$$

Also erhält man für das Potential im Vakuum zwischen den Kugeln

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + a.$$

Wir setzen die angelegte Spannung U für $Q > 0$ als positiv an

$$U = V(R_i) - V(R_a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a} \right)$$

und erhalten für die Kapazität des Kugelkondensators

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_a R_i}{R_a - R_i}.$$

Im Grenzfall $R_a \rightarrow \infty$ mit $R_a - R_i = d = \text{konstant}$, $R_a R_i \approx R_a^2$ erhält man daraus die Kapazität eines ebenen, idealisierten Plattenkondensators

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad \text{mit der Fläche} \quad A = 4\pi R_a^2 \quad \text{und dem Abstand} \quad d.$$

Die Dimension der Kapazität ist Farad (F) mit $[C] = \text{F} = \frac{\text{C}}{\text{V}} = \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}}$.

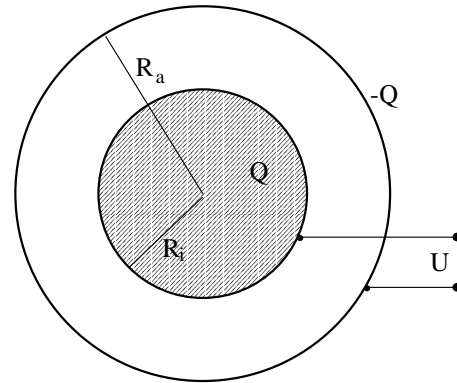


Abb. 6.4 Kugelkondensator mit Ladung Q und Spannung U .

6.7 Poisson-Gleichung für ein Dielektrikum

Bringt man aus Atomen zusammengesetzte Materie in ein elektrisches Feld, so werden auf Elektronen und Atomkerne unterschiedliche Kräfte ausgeübt. Speziell bei einem Dielektrikum geht man davon aus, daß durch ein von außen angelegtes elektrisches Feld viele Dipole von atomarer Dimension induziert werden, deren elektrisches Dipolfeld sich dem äußeren Feld überlagert. Das elektrostatische Potential eines solchen kleinen Dipols mit dem Dipolmoment \mathbf{p} am Ort \mathbf{r}' ist nach Abschn. 6.4 gegeben durch

$$V_D(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

wobei der Nablaoperator ∇' nach \mathbf{r}' differenziert. Für die vielen atomaren Dipole führen wir eine **Dipoldichte** oder **Polarisation** $\mathbf{P}(\mathbf{r}')$ ein, indem wir in einem infinitesimal kleinen Volumenelement d^3r' am Ort \mathbf{r}' die Summe der Dipolmomente $d\mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{r}') d^3r'$ setzen. Das elektrostatische Potential aller Dipolmomente des Dielektrikums im Volumen G können wir dann durch das Integral

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_G \frac{d\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_G \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'$$

ausdrücken. Beachtet man das Differenzieren nach der Produktregel

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \nabla' \cdot \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}'),$$

so erhält man das Potential als Summe zweier Integrale

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_G \nabla' \cdot \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_G \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{F=\partial G} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{f}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_G \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r', \end{aligned}$$

wobei das erstere mit dem Integralsatz von Gauß in ein Oberflächenintegral übergeführt wurde. Das Volumenintegral beschreibt offenbar das Potential einer Raumladungsdichte $\rho_p(\mathbf{r}') = -\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')$ der Dipole, während das Oberflächenintegral das Potential einer Flächenladungsdichte $\sigma_p(\mathbf{r}') = \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}'$ der Dipole mit $d\mathbf{f}' = \mathbf{n}' df'$ und $|\mathbf{n}'| = 1$ auf der Oberfläche F des Volumens G darstellt, vergl. Abb. 6.5. Durch das von außen angelegte elektrische Feld wird also eine Polarisation des Dielektrikums induziert, die sich in einer Raumladungsdichte und in einer Flächenladungsdichte auf der Oberfläche des Dielektrikums äußert.

Durch die Oberflächenladung ändert sich die elektrische Ladung auf den beiden Kondensatorplatten und damit auch die Kapazität des Kondensators. Sei Q_0 bzw. Q die elektrische Ladung auf der Kondensatorplatte ohne bzw. mit Dielektrikum, C_0 bzw. C die Kapazität des Kondensators, so wird experimentell eine Veränderung der Kapazität beim Einbringen des Dielektrikums durch eine relative Dielektrizitätskonstante ϵ_r beschrieben $C = \epsilon_r C_0$ mit $1 \leq \epsilon_r$ und $\epsilon_r = 1$ im Falle des Vakuums. Ist A die Fläche der Kondensatorplatten, d ihr Abstand, U die angelegte Spannung, $E = U/d$ die elektrische Feldstärke und σ_0 bzw. σ die Flächenladung auf den Kondensatorplatten, so findet man

<p>ohne Dielektrikum</p> $C_0 = \frac{Q_0}{U} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$ $Q_0 = \epsilon_0 A \frac{U}{d} = \epsilon_0 A E$ $\sigma_0 = \frac{Q_0}{A} = \epsilon_0 E$	<p>mit Dielektrikum</p> $C = \frac{Q}{U} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d}$ $Q = \epsilon_r Q_0 = \epsilon_r \epsilon_0 A E$ $\sigma = \frac{Q}{A} = \epsilon_r \epsilon_0 E.$
---	--

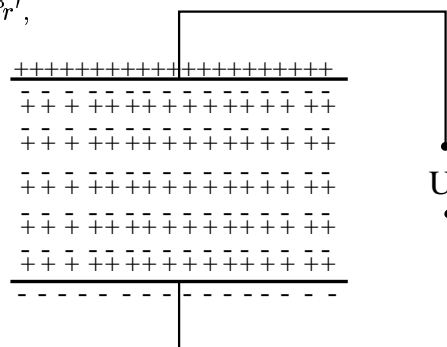


Abb. 6.5 Plattenkondensator mit Dielektrikum und induzierten atomaren Dipolen \mp .

Die Veränderung der Flächenladung durch die Polarisation ist also $\sigma_p = \sigma - \sigma_0 = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E$. Wir verallgemeinern dieses Ergebnis bei einem homogenen elektrischen Feld senkrecht zur Oberfläche des Dielektrikums auf beliebige Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Weil die Oberflächenladungsdichte $\sigma_p(\mathbf{r})$ mit der Polarisation $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ durch $\sigma_p(\mathbf{r}) = \mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}$ verknüpft ist, setzen wir die Feldgleichung für die Polarisation oder Dipoldichte in der Form an

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}),$$

wobei ε_r gegebenenfalls auch ortsabhängig sein kann. Andererseits verursacht die Polarisation im Innern des Dielektrikums eine elektrische Raumladung

$$\rho_p(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \nabla \cdot (\varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r})).$$

Wir definieren den Vektor der **dielektrischen Verschiebung**

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \varepsilon_r(\mathbf{r})\varepsilon_0$$

und erhalten $\rho_p = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla \cdot \mathbf{D}$. Im Vakuum gilt nach dem vorigen Abschnitt die Poisson-Gleichung $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$. Will man diese Gleichung für ein Dielektrikum verallgemeinern, hat man zu der vorgegebenen Raumladungsdichte ρ noch die Raumladungsdichte durch die Polarisation ρ_p hinzuzufügen, sodaß die Differentialgleichung die Form annimmt

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho(\mathbf{r}) + \rho_p(\mathbf{r})) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}) + \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}) + \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}).$$

Daraus findet man die allgemeine Poisson-Gleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}),$$

die auch für das Vakuum mit $\varepsilon_r = 1$ gültig ist.

Der Zusammenhang zwischen der elektrischen Feldstärke $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ und der dielektrischen Verschiebung $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ läßt sich mit Hilfe der Polarisation $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ verallgemeinern. Es war

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r})$$

und die dimensionslose Größe $\chi = \varepsilon_r - 1$ wird auch als elektrische Suszeptibilität bezeichnet, so daß $\mathbf{P} = \chi \varepsilon_0 \mathbf{E}$ gilt. Im Falle eines Dielektrikums wurde ε_r als ein von \mathbf{E} unabhängiger Skalar angesehen, so daß \mathbf{P} stets parallel zu \mathbf{E} ist und der Betrag auch linear vom Betrag der elektrischen Feldstärke abhängt. Es gibt jedoch ferroelektrische Stoffe, bei denen dies nicht mehr der Fall ist, so daß man allgemeiner für die dielektrische Verschiebung

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}[\mathbf{E}](\mathbf{r})$$

ansetzt, wobei $\mathbf{P}[\mathbf{E}](\mathbf{r})$ ein Funktional von $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ oder auch eine Funktion von \mathbf{E} der Art $\mathbf{P}(\mathbf{E}(\mathbf{r}), \mathbf{r})$ sein kann, die für jedes Material bestimmt werden muß.

Die Dimension der elektrischen Feldstärke ist V/m und die Dimension der dielektrischen Verschiebung ist gleich der Dimension der Polarisation oder Dipoldichte und der Dimension einer Flächenladung:

$[\mathbf{E}] = \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{V}}{\text{m}}$	elektrische Feldstärke
$[\mathbf{D}] = [\varepsilon_0][\mathbf{E}] = \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$	dielektrische Verschiebung
$[\mathbf{p}] = \text{Cm}$	Dipolmoment
$[\mathbf{P}] = \frac{[\mathbf{p}]}{\text{m}^3} = \frac{\text{Cm}}{\text{m}^3} = \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$	Dipoldichte oder Polarisation
$[\sigma] = \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$	Flächenladung.