

# Manuskript zur Theoretischen Physik Ia

Priv. Doz. Dr. Andreas Wacker  
Institut für Theoretische Physik  
Technische Universität Berlin

Sommersemester 2003



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Mechanik freier Teilchen</b>	<b>1</b>
1.1	Formulierung des Mechanik . . . . .	1
1.1.1	Bahnkurven . . . . .	1
1.1.2	Newton'sche Axiome . . . . .	1
1.1.3	Determinismus der klassischen Mechanik . . . . .	3
1.2	Mechanische Größen . . . . .	3
1.2.1	Kräfte . . . . .	3
1.2.2	Potential . . . . .	4
1.2.3	Kinetische Energie und Arbeit . . . . .	4
1.3	Erhaltungssätze eines Systems wechselwirkender Teilchen . . . . .	5
1.3.1	Impuls . . . . .	5
1.3.2	Schwerpunktbewegung . . . . .	5
1.3.3	Drehimpuls . . . . .	6
1.3.4	Energie . . . . .	6
1.4	Das Zweikörper-Problem . . . . .	7
1.4.1	Reduktion auf ein Einteilchen-Problem . . . . .	8
1.4.2	Lösung des Einteilchen-Problems . . . . .	8
1.4.3	Kepler-Problem . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Mechanik mit Zwangsbedingungen</b>	<b>10</b>
2.1	Einführendes Beispiel . . . . .	10
2.1.1	Lösung mit Zwangskräften . . . . .	10
2.1.2	Lösung mit Polarkoordinaten . . . . .	11
2.2	Formulierung des Problems . . . . .	11
2.2.1	Zwangsbedingungen . . . . .	11
2.2.2	Das d'Alembert'sche Prinzip . . . . .	12

2.2.3	Lagrange'sche Methode 1. Art . . . . .	13
2.2.4	Energiebilanz bei Bewegungen mit Zwangsbedingungen . . . . .	14
2.3	Das Hamilton'sche Prinzip der stationären Wirkung . . . . .	15
2.3.1	Exkurs: Das Fermat'sche Prinzip in der Optik* . . . . .	15
2.3.2	Funktionale . . . . .	15
2.3.3	Lagrange-Funktion und Wirkungsintegral . . . . .	17
2.4	Die Lagrange'sche Methode 2. Art . . . . .	19
2.4.1	Generalisierte Koordinaten . . . . .	19
2.4.2	Lagrange'sche Gleichungen . . . . .	19
2.4.3	Skizze des allgemeinen Vorgehens . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Hamilton'sche Dynamik</b>	<b>26</b>
3.1	Hamilton'sche Gleichungen . . . . .	26
3.1.1	Auflösbarkeit . . . . .	27
3.1.2	Legendretransformation . . . . .	28
3.1.3	Die Hamiltonfunktion . . . . .	29
3.1.4	Hamiltonfunktion und Energie . . . . .	30
3.1.5	Beispiel: Sphärisches Pendel . . . . .	30
3.1.6	Zyklische Variable . . . . .	32
3.2	Der Phasenraum . . . . .	33
3.2.1	Die Poissonklammer . . . . .	33
3.2.2	Der Liouville'sche Satz . . . . .	35
3.3	Kanonische Transformationen . . . . .	36
3.4	Elektromagnetische Felder . . . . .	37
3.4.1	Beispiel: Teilchen im konstanten elektrischen Feld . . . . .	38
3.4.2	Energiebilanz . . . . .	39
3.5	Übergang zur Quantenmechanik . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Symmetrien und Erhaltungsgrößen</b>	<b>41</b>
4.1	Symmetrietransformationen . . . . .	41
4.2	Noether'sches Theorem . . . . .	42
4.3	Infinitesimale kanonische Transformationen* . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Der starre Körper</b>	<b>46</b>
5.1	Bewegung des starren Körpers . . . . .	46

5.1.1	Vektorielle Beschreibung . . . . .	46
5.1.2	Die Winkelgeschwindigkeit . . . . .	47
5.1.3	Zeitabhängigkeit beliebiger Vektoren . . . . .	48
5.2	Der Trägheitstensor . . . . .	49
5.2.1	Kinetische Energie des starren Körpers . . . . .	49
5.2.2	Hauptachsen . . . . .	50
5.2.3	Satz von Steiner . . . . .	50
5.2.4	Der Drehimpuls des starren Körpers . . . . .	50
5.2.5	Drehimpulsbilanz und Euler'sche Gleichungen . . . . .	51
5.3	Anwendungen . . . . .	52
5.3.1	Kräfte auf eine rotierende Achse . . . . .	52
5.3.2	Der kräftefreie Kreisel . . . . .	53
5.3.3	Kreisel mit Drehmoment . . . . .	55
5.3.4	Die Erde als Kreisel . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Dynamische Systeme</b>	<b>57</b>
6.1	Definition . . . . .	57
6.2	Fixpunkte und Stabilität . . . . .	58
6.2.1	Beispiel: Harmonischer Oszillator mit Reibung . . . . .	59
6.2.2	Beispiel: Freier rotierender Körper . . . . .	59
6.2.3	Fixpunkte eines Hamilton'schen Systems . . . . .	60
6.3	Bifurkationen . . . . .	60
<b>A</b>	<b>Vektoren und Matrizen</b>	<b>63</b>
A.1	Basiswechsel auf neue Basis $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_d\}$ . . . . .	64
A.2	Diagonalisierung von Tensoren . . . . .	64

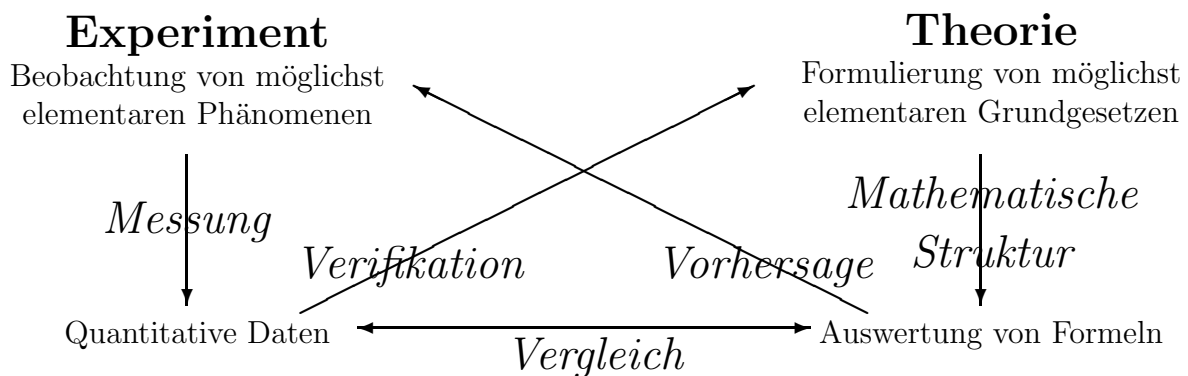
# Einführung

Aufgabe der *Physik* ist es, grundlegende Naturphänomene zu beschreiben. Dies erfolgt mit zwei Zielsetzungen:

**Erkenntnisgewinn**, wie z.B. Struktur des Universums

**Anwendungen** in der Technik, Medizin, Wirtschaftswissenschaften ...

Die Physik lebt von dem Zusammenspiel von Experiment (bzw. Beobachtung in der Astronomie) und Theorie, die komplementäre Rollen spielen.



Das Ziel der theoretischen Physik ist es, *elementare Grundgesetze* (z.B. die Newton'schen Axiome) zu formulieren und mit Hilfe eines *mathematischen Formalismus* hieraus konkrete Aussagen über Naturphänomene (z.B. Planetenbahnen) zu machen. Dies erlaubt Vorhersagen von Phänomenen (z.B. die Existenz des Neptuns durch J.C. Adams und U.J.J. Le Verrier, der dann 1846 in der Nähe der vorhergesagten Position gefunden wurde). Gleichzeitig dient der Vergleich mit den beobachteten Daten der Verifikation oder auch Falsifizierung (z.B. Periheldrehung des Merkurs) von elementaren Grundgesetzen.

Hier beschäftigen wir uns mit der *nichtrelativistischen klassischen Mechanik*, die die Bewegung von makroskopischen Körpern mit Geschwindigkeiten, die deutlich kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sind, beschreibt. Unser Ziel ist dabei:

- die Beschreibung von Planeten, Fußbällen, Schaukeln oder Kreiseln
- die mathematische Formulierung physikalischer Sachverhalte an anschaulichen Beispielen zu erlernen

# Literaturverzeichnis

- H. Goldstein, C. P. Poole, and J. L. Safko, *Classical Mechanics* (Addison Wesley, 2001), der Klassiker, auch in Deutsch erhältlich.
- J. Honerkamp and H. Römer, *Klassische Theoretische Physik* (Springer, Berlin, 1993).
- F. Scheck, *Theoretische Physik 1, Mechanik* (Springer, Berlin, 1999), etwas mathematischer.
- W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik, Bände 1+2, Klassische Mechanik/Analytische Mechanik* (Springer, Berlin, 2001).
- A. Sommerfeld, *Vorlesungen über Theoretische Physik, Mechanik* (Harri Deutsch, Frankfurt, 1994), eine ältere Darstellung, die auch auf die Entwicklungsgeschichte eingeht.
- F. Kuypers, *Klassische Mechanik* (Wiley/VCH, Weinheim, 1997).
- A. Budo, *Theoretische Mechanik* (Wiley/VCH, Weinheim, 1990).
- L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band 1, Mechanik* (Harri Deutsch, Frankfurt, 1997), geniale aber eigenwillige Lehrbuchreihe zur Theoretischen Physik; zum Einstieg eher weniger geeignet.
- T. Fließbach, *Lehrbuch zur Theoretischen Physik 1. Mechanik* (Spektrum Akad. Verlag, Heidelberg, 1999).
- R. Jelitto, *Theoretische Physik, Bände 1+2* (Aula, Wiesbaden, 1991).
- W. Greiner, *Theoretische Physik, Bände 1+2* (Harri Deutsch, Frankfurt, 1989).

# Kapitel 1

## Mechanik freier Teilchen

### 1.1 Formulierung des Mechanik

#### 1.1.1 Bahnkurven

Wir untersuchen ein System aus  $N$  Teilchen. Diese sollen nicht in ihrer Bewegung eingeschränkt sein, weswegen wir von *freien Teilchen* sprechen. Die Teilchen nehmen wir als punktförmig an, und ordnen jedem Teilchen  $i$  (mit  $i = 1, \dots, N$ ) einen Punkt  $P_i$  im *affinen dreidimensionalen Punktraum* zu.

Ein affiner Raum ist ein Punktraum mit Elementen  $P, Q, R$  und zugeordnetem reellen dreidimensionalem Vektorraum  $\mathcal{V}$  mit Skalarprodukt wobei

1. Für alle  $(P, Q)$  gibt es ein  $\mathbf{r} = \overrightarrow{PQ} \in \mathcal{V}$
2. Für alle  $(P, \mathbf{r})$  gibt es ein  $Q$  mit  $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{r} = \overrightarrow{PQ}$
3. Für alle  $(P, Q, R)$  gilt:  $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

Zeichnet man einen Punkt  $O$  als *Ursprung* aus, so wird dann jedem Teilchen  $i$  am Ort  $P_i$  der Vektor  $\mathbf{r}_i = \overrightarrow{OP_i}$  zugeordnet. Bezüglich einer *Basis*  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  des Vektorraumes gilt dann

$$\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{e}_x + y_i \mathbf{e}_y + z_i \mathbf{e}_z$$

und dem Teilchen  $i$  werden die *Koordinaten*  $(x_i, y_i, z_i)$  zugeordnet.

Der reelle Parameter  $t$  (die *Zeit*) beschreibt die Veränderung des Systems, indem er eine Parametrierung der *Bahnkurven*  $\mathbf{r}_i(t)$  aller Teilchen erlaubt. Ein Spezialfall ist die *geradlinig-gleichförmige Bewegung*  $\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{r}_i(0) + \mathbf{v}_i t$  mit konstantem Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}_i$ .

#### 1.1.2 Newton'sche Axiome

Die zentrale Frage der Mechanik ist, wie die Bewegungen der Teilchen (Planeten, Fußbälle, ...) zustande kommen. Die Erfahrung zeigt, dass man die Bewegungen durch die Einführung von

Kräften  $\mathbf{F}_i$ , die auf die Teilchen wirken, geschickt beschreiben kann. Diese Kräfte sind dabei definiert über die

*Newton'schen Axiome* (1686)

1. Ein Teilchen bleibt genau dann in Ruhe oder gleichförmig geradliniger Bewegung, wenn keine Kräfte auf es wirken. *Trägheitsprinzip* → Definition des kräftefreien Zustandes
2. Die Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{r}}_i(t)$  eines Teilchens ist proportional zur Kraft  $\mathbf{F}_i(t)$ , die auf das Teilchen wirkt. Der Proportionalitäts-Faktor ist die *träge Masse*  $m_i$  des Teilchens  $i$ . Es gilt also

$$\mathbf{F}_i(t) = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i(t)$$

→ Definition der Kraft

3. Die Kraft  $\mathbf{F}_{ij}$ , die das Teilchen  $j$  auf das Teilchen  $i$  ausübt, ist entgegengesetzt gleich der Kraft  $\mathbf{F}_{ji}$  des Teilchens  $i$  auf das Teilchen  $j$

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$$

(*actio gleich reactio*)

4. Die Kräfte  $\mathbf{F}_{ij}$  auf das Teilchen  $i$  addieren sich vektoriell. d.h.

$$\mathbf{F}_i^{\text{gesamt}} = \sum_j \mathbf{F}_{ij}$$

## Bemerkungen

- Das dritte Newton'sche Axiom legt das Massenverhältnis der einzelnen Körper fest. Alle Massen und Kräfte sind aber nur bis auf einen konstanten Faktor definiert. Dieser ist durch die willkürliche Wahl des Kilogramms<sup>1</sup> gegeben.
- Wesentlich für das Programm der Mechanik ist, dass die Kräfte einfache Funktionen des Ortes (und manchmal auch der Geschwindigkeit, z.B. die Lorentzkraft) sind. Deswegen wird das Gravitationsgesetz

$$\mathbf{F}_{ij} = -\gamma \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

auch häufig als fünftes Newton'sches Axiom bezeichnet.

- Die Newton'schen Axiome sind invariant gegenüber *Galilei-Transformationen*  $O \rightarrow O'$  mit  $\overrightarrow{OO'} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0 t$ .

<sup>1</sup>Das Kilogramm ist seit 1889 durch das Ur-Kilogramm, einen in Paris gelagerten Platin-Iridium-Block definiert, siehe z.B. E. Göbel: Physikalische Blätter **57**, 35 (2001).



### 1.1.3 Determinismus der klassischen Mechanik

Bei bekannten Funktionen der Kräfte  $\mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$  wird die Bewegung der Teilchen durch ein System von  $3N$  expliziten Differentialgleichungen 2. Ordnung in den Teilchenkoordinaten

$$\ddot{\mathbf{r}}_i(t) = \frac{1}{m_i} \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t), t)$$

in den Teilchenkoordinaten  $(x_i, y_i, z_i)$  bestimmt. Die Mathematik zeigt, dass es eine eindeutige Lösung gibt, wenn  $6N$  unabhängige Randbedingungen vorgegeben sind und  $\mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$  eine gutmütige Funktion (Lipschitz-Bedingung) ist (Satz von Cauchy, Picard und Lindelöf). Damit ist bei vorgegebenen *Anfangsbedingungen*  $\mathbf{r}_i(0), \dot{\mathbf{r}}_i(0)$  für alle  $i = 1, \dots, N$  das Verhalten des Systems für alle Zeiten vorbestimmt. Demnach ist die klassische Mechanik eine deterministische Theorie. Aufgrund ihres Erfolges im 18. und 19. Jahrhundert hat sie ein Bild der Physik als inhärent deterministischer Theorie in unser Bewusstsein eingepreßt, das man durchaus in Frage stellen kann.

Den entsprechenden Satz kann man sich wie folgt klar machen: Führen wir die Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}_i(t) = \dot{\mathbf{r}}_i$  als neue Variable ein, so erhält man  $6N$  Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_i(t) &= \frac{1}{m_i} \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t), t) \\ \dot{\mathbf{r}}_i(t) &= \mathbf{v}_i(t) \end{aligned}$$

Diskretisiert man die Zeitachse in Zeitschritte  $t_n = n\Delta t$  so kann man über

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i(t_{n+1}) &= \mathbf{v}_i(t_n) + \Delta t \frac{1}{m_i} \mathbf{F}_i(t, \mathbf{r}_1(t_n), \dots, \mathbf{r}_N(t_n)) \\ \mathbf{r}_i(t_{n+1}) &= \mathbf{r}_i(t_n) + \Delta t \mathbf{v}_i(t_n) \end{aligned}$$

für  $n = 1, 2, \dots$  aus der Kenntnis von  $\mathbf{r}_i(0), \mathbf{v}_i(0)$  die Bahnkurve rekursiv für alle Zeiten bestimmen. Für  $\Delta t \rightarrow 0$  wird das Verfahren, das als Euler-Verfahren bezeichnet wird, exakt und erlaubt eine numerische Berechnung der Bahnkurven. (Es gibt aber deutlich bessere Verfahren, die mit Verkleinerung des Zeitschrittes schneller gegen die richtige Lösung konvergieren.)

## 1.2 Mechanische Größen

### 1.2.1 Kräfte

Die Gesamtkraft  $\mathbf{F}_i$  auf ein Teilchen  $i$  kann man aufteilen in:

**Äußere Kräfte**  $\mathbf{F}_i^{(a)}(\mathbf{r}_i, t)$ , die nur vom Ort  $\mathbf{r}_i$  des betrachteten Teilchens abhängen. (Z.B.

$$\mathbf{F}_i^{(a)}(\mathbf{r}_i, t) = -m_i g \mathbf{e}_z \text{ im homogenen Schwerfeld)}$$

**Innere Kräfte**  $\mathbf{F}_i^{(in)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$ , die auch vom Ort der anderen Teilchen abhängen. Hierbei handelt es sich in der Regel um Zwei-Körper-Kräfte

$$\mathbf{F}_i^{(in)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t)$$

(Z.B. die Gravitationskraft).

## 1.2.2 Potential

Wir definieren:

$V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$  ist das *Potential* des  $N$ -Teilchen Systems, wenn für alle Teilchen  $i$  gilt:

$$\mathbf{F}_i(t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$$

Mit den Kräften sind natürlich auch die Potentiale verschiedener Wechselwirkungen additiv.

### Beispiele:

Für *äußere Kräfte* existiert  $V_i^{(a)}(\mathbf{r}_i, t)$  mit

$$\mathbf{F}_i^{(a)}(\mathbf{r}_i, t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} V_i^{(a)}(\mathbf{r}_i, t)$$

genau dann, wenn  $\text{rot } \mathbf{F}_i^{(a)}(\mathbf{r}, t) = 0$  gilt.

Für innere *Zwei-Körper-Kräfte* der Form  $\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{f}_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, t)$ , die nur von der Differenz der Orte abhängen, gilt: Ist  $\text{rot } \mathbf{f}_{ij}(\mathbf{r}, t) = 0$ , so existiert  $V_{ij}(\mathbf{r}, t)$  mit  $\mathbf{f}_{ij}(\mathbf{r}, t) = -\nabla V_{ij}(\mathbf{r}, t)$  und das Potential lautet

$$V^{(\text{in})}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = \sum_{i < j} V_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, t) \quad (1.1)$$

da

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_k &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_k} V^{(\text{in})}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = \sum_{j=k+1}^N -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_k} V_{kj}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j, t) + \sum_{i=1}^{k-1} -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_k} V_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k, t) \\ &= \sum_{j=k+1}^N \underbrace{\mathbf{f}_{kj}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j, t)}_{=\mathbf{F}_{kj}} - \sum_{i=1}^{k-1} \underbrace{\mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k, t)}_{=\mathbf{F}_{ik}=-\mathbf{F}_{ki}} = \sum_{i=1}^N (1 - \delta_{ik}) \mathbf{F}_{ki} \end{aligned}$$

gilt. Z.B. lautet das Gravitationspotential des Drei-Körper-Problems

$$V^{(\text{in})}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, t) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - \gamma \frac{m_1 m_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} - \gamma \frac{m_2 m_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|}$$

## 1.2.3 Kinetische Energie und Arbeit

Wir definieren die *kinetische Energie* des Teilchens  $i$  als

$$T_i(t) = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2(t)$$

und die im Zeitintervall  $[t_1, t_2]$  am Teilchen  $i$  geleistete *Arbeit*

$$A_i(t_1, t_2, \{\mathbf{r}_j(t)\}) = \int_{\mathbf{r}_i(t_1)}^{\mathbf{r}_i(t_2)} d\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t), t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t), t)}_{\text{Leistung } P_i(t)}$$

Hierbei bedeutet das Argument  $\{\mathbf{r}_j(t)\}$ , dass die Größe  $A_i$  von den Funktionen (d.h. Bahnkurven)  $(\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \dots, \mathbf{r}_N(t))$  abhängt. Einen solchen Ausdruck bezeichnet man als *Funktional*.

Wegen des zweiten Newton'schen Axioms gilt:

$$A_i(t_1, t_2, \{\mathbf{r}_j(t)\}) = \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\mathbf{r}}_i \cdot m_i \ddot{\mathbf{r}}_i(t) = \frac{1}{2} m_i (\dot{\mathbf{r}}_i^2(t_2) - \dot{\mathbf{r}}_i^2(t_1)) = T_i(t_2) - T_i(t_1)$$

Die Änderung der kinetischen Energie eines Teilchens ist gleich der an ihm geleisteten Arbeit.

## 1.3 Erhaltungssätze eines Systems wechselwirkender Teilchen

Wir betrachten ein System wechselwirkender Teilchen, wobei sich die Kräfte aus äußeren Kräften und inneren Zweiteilchen-Kräften zusammensetzen.

### 1.3.1 Impuls

Der *Gesamtimpuls* ist definiert als

$$\mathbf{P}_{ges}(t) = \sum_i m_i \mathbf{v}_i(t)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{P}_{ges}(t) &= \sum_i m_i \dot{\mathbf{v}}_i(t) = \sum_i \mathbf{F}_i(t) = \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij}(t) + \sum_i \mathbf{F}_i^{(a)}(t) \\ &= \sum_{i < j} \mathbf{F}_{ij}(t) + \underbrace{\sum_{i > j} \mathbf{F}_{ij}(t)}_{\sum_{j > i} \mathbf{F}_{ji}(t) = -\sum_{j > i} \mathbf{F}_{ij}(t)} + \sum_i \mathbf{F}_i^{(a)}(t) = \underbrace{\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)}(t)}_{=\mathbf{F}_{ges}^{(a)}(t)} \end{aligned} \quad (1.2)$$

und der Gesamtimpuls ändert sich nur durch die äußeren Kräfte.

Der Gesamtimpuls des Systems ist konstant, wenn die äußere Gesamtkraft  $\mathbf{F}_{ges}^{(a)}(t)$  verschwindet. (Impulserhaltung)

### 1.3.2 Schwerpunktbewegung

Definiere

$$\text{Gesamtmasse } M = \sum_i m_i \quad \text{Schwerpunkt } \mathbf{R}(t) = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

Dann gilt  $\mathbf{P}(t) = M\dot{\mathbf{R}}(t)$  und

$$M\ddot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{F}_{ges}^{(a)}(t) \quad (1.3)$$

In die Beschleunigung des Schwerpunktes gehen nur die äußeren Kräfte ein. Verschwindet die äußere Gesamtkraft, so ist  $\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{V} = \text{const.}$

Der Schwerpunkt des Systems führt eine gleichförmig geradlinige Bewegung  $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(0) + \mathbf{V}t$  aus, wenn die äußere Gesamtkraft  $\mathbf{F}_{\text{ges}}^{(a)}(t)$  verschwindet.

### 1.3.3 Drehimpuls

Der *Gesamtdrehimpuls* ist durch

$$\mathbf{L}_{\text{ges}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i$$

gegeben. Sind die inneren Kräfte *zentrale Zweikörper-Kräfte*  $\mathbf{F}_{ij} \parallel (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ , so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{L}_{\text{ges}}(t) &= \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{r}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i(t) = \sum_{i \neq j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}(t) + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(a)}(t) \\ &= \sum_{i < j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}(t) + \underbrace{\sum_{i > j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}(t)}_{=\sum_{j > i} \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} = -\sum_{i < j} \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij}} + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(a)}(t) \\ &= \sum_{i < j} \underbrace{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij}(t)}_{=0} + \underbrace{\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(a)}(t)}_{\mathbf{D}_{\text{ges}}(t)} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Der Gesamtdrehimpuls des Systems ist konstant, wenn das äußere Gesamtdrehmoment  $\mathbf{D}_{\text{ges}}(t)$  verschwindet und die Zweikörper-Kräfte Zentralkräfte sind. (Drehimpulserhaltung)

### 1.3.4 Energie

Existiert für die inneren Kräfte ein zeitunabhängiges Potential  $V^{(\text{in})}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ , so findet man für die *innere Energie*

$$U(t) = \sum_i T_i(t) + V^{(\text{in})}(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t))$$

die Zeitabhängigkeit:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} U(t) &= \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i + \sum_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} V^{(\text{in})}(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \\ &= \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot (\mathbf{F}_i - \mathbf{F}_i^{(\text{in})}) = \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_i^{(a)} = \sum_i \frac{\partial}{\partial t} A_i^{(a)}(t, t_0, \{\mathbf{r}_j(t)\}) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Die Änderung der inneren Energie ist gleich der von den äußeren Kräften am System geleisteten Arbeit.

Sind die äußeren Kräfte ebenfalls Potentialkräfte d.h.  $\mathbf{F}_i^{(a)}(\mathbf{r}, t) = -\nabla V_i^{(a)}(\mathbf{r}(t), t)$  so gilt für die *Gesamtenergie*

$$E_{\text{ges}}(t) = U(t) + \sum_i V_i^{(a)}(\mathbf{r}_i(t), t) = \sum_i T_i(t) + V(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t), t)$$

die Zeitentwicklung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_{\text{ges}}(t) &= \sum_i \underbrace{m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i}_{\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_i(t)} + \sum_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} V(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t), t) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i}_{-\mathbf{F}_i(t)} + \frac{\partial}{\partial t} V(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t), t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} V(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t), t) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Existiert für die Kräfte ein Potential und hängt dieses nicht explizit von der Zeit ab, so ist die Gesamtenergie zeitlich konstant. (Energieerhaltung)

Wir haben also zwei verschiedene Verwendungen des Begriffes der Energie. Dies lässt sich am Beispiel eines Balls im Schwerfeld verdeutlichen. Die innere Energie des Balls  $U = m\mathbf{v}^2(t)/2$  nimmt zu, wenn der Ball herunter fällt, während die Gesamtenergie  $E_{\text{ges}} = m\mathbf{v}^2(t)/2 + mgz$  konstant bleibt.

Eine typische Anwendung des Energiesatzes ist folgende: Da für die kinetische Energie stets  $T > 0$  gilt, sind die Positionen der Teilchen auf die Gebiete des  $3N$ -dimensionalen Konfigurationsraumes beschränkt, bei denen  $V(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t)) < E_{\text{ges}}$  ist.

## 1.4 Das Zweikörper-Problem

Wir betrachten ein System zweier Teilchen mit Massen  $m_1, m_2$  zwischen denen eine Zentralkraft mit dem Potential  $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$  wirkt. Dabei sollen keine äußeren Kräfte vorliegen. Wir wollen dieses System mit einer beliebigen Anfangsbedingung zum Zeitpunkt  $t = 0$  für die Orte  $\mathbf{r}_1(0), \mathbf{r}_2(0)$  und Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{r}}_1(0), \dot{\mathbf{r}}_2(0)$  lösen.

Die Newton'schen Gleichungen liefern 6 Differentialgleichungen zweiter Ordnung (bzw. 12 Differentialgleichungen erster Ordnung), die nur mit erheblichem Aufwand numerisch lösbar sind. Dagegen liefern die Erhaltungssätze des vorangegangenen Abschnitts 10 unabhängige Funktionen  $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2) = \text{const}$ , die man als *Integrale der Bewegungsgleichung* bezeichnet. Diese erlauben es, alle Variablen als Funktion von den Konstanten, die aus den Anfangsbedingungen bekannt sind, und zwei Parametern auszudrücken (diese werden  $\rho$  und  $\varphi$  sein). Die Bewegung erfolgt also auf einer zwei-dimensionalen Mannigfaltigkeit. Diese Parameter erfüllen zwei Differentialgleichungen erster Ordnung, die man durch ein Integral explizit lösen kann. Dies wird im Folgenden gezeigt.

Dagegen gibt es für das Drei-Körper-Problem keine expliziten Lösungen. Der Grund liegt darin, dass man zeigen kann, dass es außer den bekannten Erhaltungsgrößen keine weiteren Integrale der Bewegungsgleichung gibt. Insbesondere gibt es (außer für spezielle Anfangsbedingungen) keine geschlossenen Bahnen und das Verhalten ist chaotisch.

### 1.4.1 Reduktion auf ein Einteilchen-Problem

Der Impulssatz und die gleichmäßige Schwerpunktbewegung liefern

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(0) + \mathbf{V}t$$

wobei aus der Anfangsbedingung

$$\mathbf{R}(0) = \frac{m_1 \mathbf{r}_1(0) + m_2 \mathbf{r}_2(0)}{m_1 + m_2} \quad \text{und} \quad \mathbf{V} = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1(0) + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2(0)}{m_1 + m_2}$$

bestimmt ist. Nun kann man als zweite Variable die *Relativkoordinate*  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  einführen. Es gilt

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{M} \mathbf{r} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{M} \mathbf{r}$$

Daraus folgt:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m_1} \left( -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_1} \right) - \frac{1}{m_2} \underbrace{\left( -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_2} \right)}_{= \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_1}} = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \left( -\frac{\partial V(r)}{\partial \mathbf{r}} \right)$$

und somit

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial V(r)}{\partial \mathbf{r}} \quad \text{mit der reduzierten Masse } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Damit wurde das Problem auf das eines Teilchens mit reduzierter Masse in einem äußeren Potential  $V(r)$  reduziert. Die Anwendung von 6 Integralen der Bewegung erlaubte es, 3 Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu eliminieren.

### 1.4.2 Lösung des Einteilchen-Problems

In Schwerpunkt- und Relativ-Koordinaten gilt (nachrechnen!)

$$\mathbf{L}_{\text{ges}} = M \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} + \underbrace{\mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}}_{\mathbf{L}_{\text{rel}}} \quad \text{und} \quad E_{\text{ges}} = \frac{M}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + \underbrace{\frac{\mu}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + V(r)}_{E_{\text{rel}}}$$

Da  $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(0) + \mathbf{V}t$ , sind  $M \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}$  und  $M/2 \dot{\mathbf{R}}^2$  jeweils zeitlich konstant und somit sind auch  $\mathbf{L}_{\text{rel}}$  und  $E_{\text{rel}}$  Erhaltungsgrößen.

Aus  $\mathbf{L}_{\text{rel}}(t) = \mathbf{L}_{\text{rel}}(0) = \mathbf{L}$  folgt sofort, dass  $\mathbf{r}(t)$  auf die Ebene senkrecht zu  $\mathbf{L}$  beschränkt ist. Wir haben also nur noch ein zweidimensionales Problem und führen Polarkoordinaten  $\rho, \varphi$  ein. Dann gilt

$$L = \mu \rho^2 \dot{\varphi} \quad (1.7)$$

Der Energiesatz liefert

$$E_{\text{rel}} = \frac{\mu}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) + V(\rho) = \frac{\mu}{2} \dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} + V(\rho) \quad (1.8)$$

und wir haben mit Hilfe der 10 Integrale der Bewegung das Problem auf zwei Differentialgleichungen (1.7,1.8) erster Ordnung für  $\rho$  und  $\varphi$  reduziert. Gl. (1.8) liefert

$$\dot{\rho} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} \left( E_{\text{rel}} - \frac{L^2}{2\mu\rho^2} - V(\rho) \right)} =: f(\rho)$$

Dies ist eine separable Differentialgleichung, die sich nach Division durch  $f(\rho)$  mit Hilfe einer Integration über  $t'$  lösen lässt. Wir erhalten:

$$t = \int_0^t dt' \frac{d\rho(t')}{dt'} \frac{1}{f(\rho(t'))} = \int_{\rho(0)}^{\rho(t)} d\rho \frac{1}{f(\rho)} \quad (1.9)$$

Dies ist ein impliziter Ausdruck für  $\rho(t)$ . Qualitativ erhält man eine periodische Schwingung zwischen den beiden Umkehrpunkten  $\rho_{\text{min}}$  und  $\rho_{\text{max}}$ , bei denen  $E_{\text{rel}} = \frac{L^2}{2\mu\rho^2} + V(\rho)$  gilt. Einsetzen in Gl. (1.7) liefert dann

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t dt' \frac{L}{\mu\rho^2(t')}$$

Da in der Regel die Periodendauer von  $\rho(t)$  nicht mit der  $2\pi$ -Periodizität von  $\varphi(t)$  zusammenfällt, schließt sich die Bahnkurve nicht. Die Bahnkurve läuft auf einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit.

### 1.4.3 Kepler-Problem

Eine Besonderheit liegt vor, wenn  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = V(\mathbf{r})$  gilt, d.h. für Potentiale  $V(r) \propto -1/r$ , wie das Gravitationspotential  $V(r) = -\gamma M\mu/r$ . Dann gibt es mit dem Lenz-Runge-Vektor  $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} + V(r)\mathbf{r}$  ein weiteres Integral der Bewegung, das die Bewegung auf eine eindimensionale Mannigfaltigkeit reduziert (nachrechnen!). Wir erhalten somit geschlossene Bahnkurven, falls das Teilchen nicht in das Unendliche entflieht.  $\mathbf{A}$  liegt in der Bahnebene und wir definieren  $\varphi = \angle(\mathbf{A}, \mathbf{r})$ . Dann erhalten wir mit der Rechenregel  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$  für Spatprodukte

$$A\rho \cos \varphi = \mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) - \gamma M\mu\rho = L^2/\mu - \gamma M\mu\rho \quad \Rightarrow \quad \rho(\varphi) = \frac{L^2}{\mu} \frac{1}{\gamma M\mu + A \cos \varphi}$$

Ferner ist

$$A^2 = (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) + 2V(r)\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) + V^2(r)r^2 = \dots = 2L^2 E_{\text{rel}}/\mu + \gamma^2 M^2 \mu^2$$

Für  $A < \gamma M\mu$  (d.h.  $E_{\text{rel}} < 0$ ) erhalten wir eine Ellipse, wobei  $\mathbf{A}$  zum Perihel (Minimum von  $\rho$ ) zeigt. Für die Umlaufzeit liefert Gl. (1.9)

$$T = 2 \int_{\rho_{\text{min}}}^{\rho_{\text{max}}} d\rho \sqrt{\frac{\mu}{2} \frac{\rho}{\sqrt{E_{\text{rel}}\rho^2 + \gamma M\mu\rho - L^2/2\mu^2}}} = 2\pi\gamma M \left( \frac{\mu}{-2E_{\text{rel}}} \right)^{3/2} \quad (1.10)$$

Mit der großen Halbachse  $a = (\rho(\pi) + \rho(0))/2 = \gamma M\mu/(-2E_{\text{rel}})$  der Ellipse erhält man das dritte Kepler'sche Gesetz  $T^2/a^3 = \text{const.}$

Kleine Abweichungen vom  $1/r$  Potential führen dazu, dass sich die Ellipse nicht exakt schließt. Man spricht von einer *Periheldrehung*. Die bereits im 19. Jhd. beobachtete Periheldrehung des Merkurs, die sich nur zum Teil durch die Gravitationswechselwirkung mit den anderen Planeten erklären ließ, war somit ein Hinweis auf Abweichungen vom Newton'schen Gravitationsgesetz, die im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie erklärt werden konnte.

# Kapitel 2

## Mechanik mit Zwangsbedingungen

### 2.1 Einführendes Beispiel

Wir betrachten eine Kugel der Masse  $m$ , die mit einem Faden der Länge  $l$  im Ursprung aufgehängt ist. Sie soll dabei in der  $x, z$ -Ebene schwingen können (ebenes Pendel). Damit schränkt der Faden die freie Bewegung der Kugel auf eine Kreisbahn

$$l^2 = x^2(t) + z^2(t)$$

ein. Dies bezeichnet man als *Zwangsbedingung*. Auf die Kugel wirken zwei Kräfte:

1. die Gewichtskraft  $\mathbf{K} = -mg\mathbf{e}_z$
2. die Fadenspannkraft  $\mathbf{Z}$ , die zunächst nicht bekannt ist. Sie bewirkt, dass die Kugel auf einer Kreisbahn um den Ursprung bleibt und wird deswegen als *Zwangskraft* bezeichnet. Dabei wirkt die Zwangskraft längs des Fadens, d.h.  $\mathbf{Z}(t) \parallel \mathbf{r}$ .

Aus dem zweiten Newton'schen Axiom folgt die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t) = \mathbf{K} + \mathbf{Z}(t)$$

für die in diesem Kapitel Lösungsverfahren entwickelt werden sollen.

#### 2.1.1 Lösung mit Zwangskräften

Da  $\mathbf{Z}(t) \parallel \mathbf{r}$  machen wir den Ansatz

$$\mathbf{Z}(t) = \lambda(t)\mathbf{r}(t)$$

und erhalten die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda(t)x(t) \\ m\ddot{z} &= \lambda(t)z(t) - mg \\ l^2 &= x^2 + z^2 \end{aligned} \tag{2.1}$$



für die drei Unbekannten  $x(t), z(t), \lambda(t)$ , die prinzipiell lösbar sind<sup>1</sup>. Dieses Verfahren wird als *Lagrange'sche Methode 1. Art* bezeichnet.

## 2.1.2 Lösung mit Polarkoordinaten

Wir führen Polarkoordinaten  $z = -r \cos \varphi$ ,  $x = -r \sin \varphi$  ein. Mit

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial \mathbf{r}(r, \varphi)}{\partial r} = -\cos \varphi \mathbf{e}_z - \sin \varphi \mathbf{e}_x \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{r}(r, \varphi)}{\partial \varphi} = \sin \varphi \mathbf{e}_z - \cos \varphi \mathbf{e}_x$$

erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$m(\ddot{r}\mathbf{e}_r + 2\dot{r}\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \ddot{\varphi}r\mathbf{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2 r\mathbf{e}_r) = -mg(-\cos \varphi \mathbf{e}_r + \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi) + \mathbf{Z}(t)$$

Nun besagt die Zwangsbedingung, dass  $r(t) = l$  und  $\mathbf{Z}(t) \parallel \mathbf{e}_r$  gilt. Multiplikation der Bewegungsgleichung mit  $\mathbf{e}_\varphi$  liefert also:

$$m\ddot{\varphi}l = -mg \sin \varphi \quad (2.2)$$

Damit haben wir eine einfache Differentialgleichung für  $\varphi(t)$  erhalten. Da hierdurch die Bewegung der Kugel eindeutig beschrieben wird, bezeichnet man  $\varphi(t)$  als *generalisierte Koordinate* des Problems.

Dies zeigt, dass eine geschickte Wahl der Koordinaten die Arbeit erheblich erleichtert. Die Aufgabe der Theorie ist es, Verfahren anzugeben, wie man die Differentialgleichung für die generalisierten Koordinaten allgemein herleiten kann ( $\rightarrow$  Lagrange'sche Gleichungen 2. Art).

## 2.2 Formulierung des Problems

### 2.2.1 Zwangsbedingungen

Wir betrachten ein System von  $N$  Teilchen im dreidimensionalen Raum. Zusammen bilden sie den  $3N$ -dimensionalen *Konfigurationsraum* der Vektor-Tupel  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ . *Zwangsbedingungen* schränken die freie Bewegung der Teilchen ein. Diese werden wie folgt klassifiziert:

- Die Zwangsbedingung nennt man *holonom* (gr. ganzgesetzlich), wenn sie sich in der Form  $B(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0$  schreiben lässt.
- Die Zwangsbedingung nennt man *skleronom* (gr. starrgesetzlich), wenn sie nicht explizit von der Zeit abhängt. Ansonsten nennt man sie *rheonom* (gr. fließgesetzlich).

Hat man  $s$  unabhängige Zwangsbedingung  $\alpha = 1, 2, \dots, s$ , so hat das System  $f = 3N - s$  *Freiheitsgrade*. Sind alle Zwangsbedingungen holonom, d.h. der Form  $B_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0$ , so ist die Bewegung auf eine  $f$ -dimensionale Mannigfaltigkeit im Konfigurationsraum beschränkt.

<sup>1</sup>Ein Lösungsverfahren besteht darin, die dritte Gleichung zweimal nach der Zeit abzuleiten und die zweiten Ableitungen durch die Bewegungsgleichungen zu ersetzen. Wir erhalten damit  $\lambda(t) = (gz - \dot{x}^2 - \dot{z}^2)m/l$  und das Problem ist auf zwei gekoppelte Differentialgleichungen reduziert.

**Beispiel 1:** Drei Teilchen sind durch drei Stangen wechselseitig miteinander verbunden. Dies sind 3 unabhängige holonome, skleronome Zwangsbedingung. Das System hat  $f = 3 \cdot 3 - 3 = 6$  Freiheitsgrade. Dies ist die Bewegung des Schwerpunktes (3 Freiheitsgrade) sowie die Rotationen um alle drei Raumachsen.

**Beispiel 2:** Man betrachte ein Pendel, bei dem die Fadenlänge  $l(t)$  mit der Zeit verkürzt wird. Die holonome, rheonome Zwangsbedingung lautet  $B(\mathbf{r}, t) = |\mathbf{r}| - l(t) = 0$ .

**Beispiel 3:** Die Position eines Fahrrades wird durch die beiden Aufsatzpunkte der Reifen  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  bestimmt. Wir haben folgende Nebenbedingungen:

1. Das Fahrrad fährt in der Ebene  $z_1 = z_2 = 0$  (zwei holonome, skleronome Zwangsbedingungen)
2. Der Achsenabstand  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = l$  ist konstant (eine holonome, skleronome Zwangsbedingung)
3. Das Hinterrad bewegt sich in Richtung auf das Vorderrad, d.h.  $\dot{\mathbf{r}}_2 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = 0$  (eine weitere *nichtholonome*, skleronome Zwangsbedingung)

Das Fahrrad hat also lokal zwei Freiheitsgrade der Bewegung: Die Geradeausfahrt und das Lenken. Dennoch kann man durch Rangieren das Fahrrad an alle Orte in der Ebene bringen, so lange  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = l$  gilt. Damit findet die Bewegung auf einer 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit statt.

Im Folgenden beschränken wir uns auf *holonome* Zwangsbedingungen, die sich in der Form  $B_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0$  schreiben lassen.

## 2.2.2 Das d'Alembert'sche Prinzip

In der Newtonschen Bewegungsgleichung spaltet man die Gesamtkraft  $\mathbf{F}_i = \mathbf{K}_i + \mathbf{Z}_i$  in die *dynamische Kraft*  $\mathbf{K}_i$ , die auch ohne Zwangsbedingungen wirkt, und die *Zwangskraft*  $\mathbf{Z}_i$ , die die Erhaltung der Zwangsbedingung sichert, auf.

Wir fordern nun, dass die Zwangskräfte das *Prinzip der virtuellen Arbeit*  $\sum_i \mathbf{Z}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$  erfüllen, wobei  $\delta \mathbf{r}_i$  ein beliebiger Satz virtueller (d.h. instantaner) Verrückungen darstellt, die mit allen Zwangsbedingungen verträglich sind<sup>2</sup>.

Dies machen wir uns mit einer Plausibilitäts-Begründung klar:

1. Für das Fadenpendel ist  $\mathbf{Z} \parallel \mathbf{r}$ . Ist die Gesamtlänge konstant, so erfolgen alle Bewegungen (sowohl real  $d\mathbf{r}$  als auch virtuell  $\delta \mathbf{r}$ ) tangential zum Kreis  $|\mathbf{r}| = l$ . Somit ist  $\mathbf{Z} \cdot \delta \mathbf{r} = \mathbf{Z} \cdot d\mathbf{r} = 0$ .
2. Für das Fadenpendel mit veränderlicher Länge  $l(t)$  zeigt zu jedem Zeitpunkt  $t$  die virtuelle Verrückung  $\delta \mathbf{r}$  tangential zum momentan zulässigen Kreis  $|\mathbf{r}| = l(t)$ . Dagegen hat  $d\mathbf{r}$  eine Komponente  $\dot{l}(t)\mathbf{e}_r dt$ . Somit gilt  $\mathbf{Z} \cdot \delta \mathbf{r} = 0$  und  $\mathbf{Z} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$ .

<sup>2</sup>Es gibt auch Arten von (nichtholonomen) Zwangsbedingungen, die das Prinzip der virtuellen Arbeit nicht erfüllen. Von diesen wollen wir hier absehen. Ein allgemeineres Prinzip ist z.B. das Gauß'sche Prinzip des kleinsten Zwanges, das auch geschwindigkeits-abhängige Zwangsbedingungen beschreibt (siehe z.B. Sommerfeld)

3. Zwei Teilchen sind durch eine Stange verbunden  $\rightarrow B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| - l = 0$ . Die Zwangskraft wirkt längs der Stange, also  $\mathbf{Z}_1 = \lambda(t)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = -\mathbf{Z}_2$  wegen Actio gleich Reactio. Damit haben wir die Arbeitleistung der Zwangskräfte:

$$\delta A = \mathbf{Z}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{Z}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2 = \lambda(t)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)(\delta \mathbf{r}_1 - \delta \mathbf{r}_2) = \lambda(t)\delta \left[ \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 \right] = \lambda(t)\delta \left[ \frac{1}{2}l^2 \right] = 0$$

Setzt man das Prinzip der virtuellen Arbeit in die Newton'sche Bewegungsgleichung ein, so folgt das

*d'Alembertsche Prinzip*

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{K}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

für alle zulässigen virtuellen Verrückungen  $\delta \mathbf{r}_i$

### 2.2.3 Lagrange'sche Methode 1. Art

Aus dem Prinzip der virtuellen Verrückung folgt für holonome Zwangsbedingungen<sup>3</sup>, dass sich die Zwangskräfte in der Form

$$\mathbf{Z}_i = \sum_{\alpha=1}^s \lambda_{\alpha}(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} B_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \quad (2.3)$$

mit den skalaren Funktionen  $\lambda_{\alpha}(t)$  darstellen lassen.

Dies folgt aus folgender Überlegung: Zum Zeitpunkt  $t$  sei das System am Ort  $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  des Konfigurationsraums, der mit allen Zwangsbedingungen  $B_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0$  verträglich ist. Die zulässigen virtuellen Verrückungen erfüllen

$$0 = \delta B_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = \sum \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} B_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \cdot \delta \mathbf{r}_i \quad \text{für alle } \alpha = 1, 2, \dots, s$$

Damit steht jede beliebige zulässige virtuelle Verrückung  $(\delta \mathbf{r}_1, \delta \mathbf{r}_2, \dots, \delta \mathbf{r}_N)$  im Konfigurationsraum senkrecht zu allen Vektoren  $(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} B_{\alpha}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} B_{\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_N} B_{\alpha})$ , die somit das orthogonale Komplement zu den virtuellen Verrückungen aufspannen. Da die Zwangskräfte gemäß des Prinzips der virtuellen Arbeit ebenfalls senkrecht zu allen zulässigen virtuellen Verrückung stehen, gehören sie zu deren orthogonalem Komplement und sind somit in dem von  $(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} B_{\alpha}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} B_{\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_N} B_{\alpha})$  aufgespannten Unterraum. Damit ergibt sich sofort die Darstellung (2.3).

Damit erhalten wir die  $3N$  Bewegungsgleichungen

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{K}_i + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_{\alpha}(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} B_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, N$$

die zusammen mit den  $s$  Zwangsbedingungen

$$B_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \quad \text{für } \alpha = 1, 2, \dots, s$$

$3N + s$  Gleichungen für die  $3N + s$  Variablen  $\mathbf{r}_i(t)$ ,  $\lambda_{\alpha}(t)$  bilden.

<sup>3</sup>Die Bedeutung der Lagrange'sche Methode 1. Art liegt darin, dass man sie ebenso für nichtholonome Zwangsbedingungen formulieren kann, siehe z.B. Sommerfeld.

## 2.2.4 Energiebilanz bei Bewegungen mit Zwangsbedingungen

Wir nehmen an, dass die dynamischen Kräfte durch ein nicht explizit zeitabhängiges Potential  $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$  beschrieben werden. Also gilt

$$\mathbf{K}_i(t) = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)}{\partial \mathbf{r}_i}$$

Mit Hilfe der Lagrange'schen Methode erster Art folgt:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{K}_i + \mathbf{Z}_i = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} B_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$$

Multiplikation mit  $\dot{\mathbf{r}}_i$  und  $\sum_i$  liefert:

$$\underbrace{\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i}_{=\frac{dT}{dt}} + \underbrace{\sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}}_{=\frac{dV}{dt}} = \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha(t) \underbrace{\sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} B_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)}_{=\frac{dB_\alpha}{dt} - \frac{\partial B_\alpha}{\partial t}}$$

Nun besagt die Nebenbedingung, dass  $dB_\alpha/dt = 0$  gilt und wir erhalten

$$\frac{d}{dt}(T + V) = -\sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha(t) \frac{\partial}{\partial t} B_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$$

Also gilt:

Für skleronome, holonome Zwangsbedingungen ist die Gesamtenergie  $T + V$  eine Erhaltungsgröße, wenn das Potential nicht explizit zeitabhängig ist. Dagegen findet bei rheonomen Zwangsbedingungen Energiezufuhr/abfuhr mit der Umgebung statt.

Dies liegt daran, dass die Zwangskräfte bei rheonomen Zwangsbedingungen nur bei virtuellen Verrückungen keine Arbeit leisten, wohl aber bei realen (zeitabhängigen) Bewegungen des Systems.

### Beispiel: Ebenes Pendel mit veränderlicher Länge

Die holonome, rheonome Zwangsbedingung lautet  $B(x, z, t) = l(t)^2 - x^2 - z^2$ . Damit lautet die Zwangskraft

$$\mathbf{Z} = -\lambda(t)2(x\mathbf{e}_x + z\mathbf{e}_z)$$

Dabei ist typischerweise  $\lambda(t) > 0$ , wenn die Zwangskraft zum Aufhängepunkt zeigt (z.B. für kleine Auslenkungen  $|\varphi| < \pi/2$ ). Damit ist

$$\frac{d}{dt}(T + V) = -\lambda(t)2l(t)\dot{l}(t).$$

Wir haben also bei  $\dot{l} < 0$  eine Energiezufuhr.

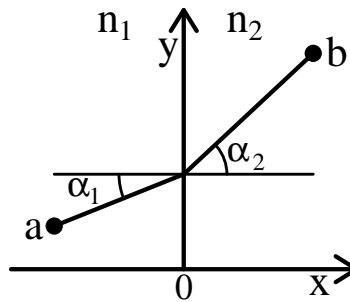


Abbildung 2.1: Skizze zur Herleitung des Brechungsgesetzes mit dem Fermat'schen Prinzip

## 2.3 Das Hamilton'sche Prinzip der stationären Wirkung

### 2.3.1 Exkurs: Das Fermat'sche Prinzip in der Optik\*

Ein zentrales Problem der geometrischen Optik ist die Brechung von Licht in Medien mit einem räumlich veränderlichen Brechungsindex  $n(\mathbf{r})$ . Die Lösung für isotrope Medien liefert das

*Fermat'sche Prinzip*: Ein Lichtstrahl folgt dem Weg  $\mathbf{r}(u)$  von Punkt  $\mathbf{a} = \mathbf{r}(0)$  zum Punkt  $\mathbf{b} = \mathbf{r}(1)$  auf dem der optische Weg (dem Produkt aus dem geometrischen Weg und der Brechzahl)

$$W_{\text{opt}} = \int_0^1 du \left| \frac{d\mathbf{r}(u)}{du} \right| n(\mathbf{r}(u))$$

extremal (meist minimal) ist<sup>4</sup>.  $u \in [0, 1]$  ist dabei der Bahnparameter.

Für Gebiete mit  $n = \text{const}$  erhält man somit eine gerade Linie.

Für die Brechung an einer Grenzfläche (in der Ebene  $x = 0$ , siehe Fig. 2.1) läuft das Licht in beiden Halbräumen auf einer geraden Linie, wobei aber der Durchstoßpunkt  $y$  durch die  $x = 0$ -Ebene variable ist. Wir erhalten

$$W_{\text{opt}} = n_1 \sqrt{a_x^2 + (a_y - y)^2} + n_2 \sqrt{b_x^2 + (b_y - y)^2}$$

Damit lautet die Bedingung für den Extremwert:

$$0 = \frac{dW_{\text{opt}}}{dy} = 2 \underbrace{\frac{(y - a_y)}{\sqrt{a_x^2 + (a_y - y)^2}}}_{\sin \alpha_1} n_1 - 2 \underbrace{\frac{(b_y - y)}{\sqrt{b_x^2 + (b_y - y)^2}}}_{\sin \alpha_2} n_2$$

und wir erhalten das Snellius'sche Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

### 2.3.2 Funktionale

Ein *Funktional* ist eine Abbildung, deren Definitionsbereich eine Menge von Funktionen ist.

**Beispiele:**

<sup>4</sup>Der Hintergrund liegt in der Phase  $\int \mathbf{k}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int ds n(\mathbf{r})\omega/c$  der elektromagnetischen Welle.

- Menge aller Funktionen  $f(x)$  auf dem Intervall  $[0, 1]$ . Dann ist

$$I\{f(x)\} = \int_0^1 dx f(x)$$

ein Funktional von  $f(x)$ . Z.B. ist  $I\{x^2\} = 1/3$ .

- Menge aller Bahnkurven  $\mathbf{r}(t)$  in  $t_a < t < t_e$ . Beispiele für Funktionale sind

$$\text{Mittelwert des Ortes} \quad \langle \mathbf{r} \rangle = \frac{1}{t_e - t_a} \int_{t_a}^{t_e} dt \mathbf{r}(t)$$

$$\text{Mittelwert des kinetischen Energie} \quad \langle T \rangle = \frac{1}{t_e - t_a} \int_{t_a}^{t_e} dt \frac{m}{2} (\dot{\mathbf{r}}(t))^2$$

Ist das Funktional  $F\{f(x)\}$  für eine bestimmte Funktion  $f_0(x)$  gegeben, so ist

$$\delta F\{f_0(x)\} = F\{f_0(x) + \delta f(x)\} - F\{f_0(x)\}$$

die *Variation* des Funktionals. Dabei ist  $\delta f(x)$  eine beliebige (infinitesimal kleine) Funktion des Definitionsbereiches. Insbesondere gilt für

- $F_1\{f(x)\} = \int_a^b dx g[f(x)]$

$$\delta F_1\{f_0(x)\} = \int_a^b dx g[f_0(x) + \delta f(x)] - g[f_0(x)] = \int_a^b dx g'[f_0(x)] \delta f(x)$$

- $F_2\{f(x)\} = \int_a^b dx g[f'(x)]$

$$\begin{aligned} \delta F_2\{f_0(x)\} &= \int_a^b dx g[f'_0(x) + \delta f'(x)] - g[f'_0(x)] = \int_a^b dx g'[f'_0(x)] \frac{d}{dx} \delta f(x) \\ &= g'[f'_0(x)] \delta f(x) \Big|_a^b - \int_a^b dx \delta f(x) \frac{d}{dx} g'[f'_0(x)] \end{aligned}$$

und allgemein

Für ein Funktional der Form  $F_g\{f(x)\} = \int_a^b dx g[f(x), f'(x)]$  lautet die Variation an der Stelle  $f_0(x)$ :

$$\begin{aligned} \delta F_g\{f_0(x)\} &= \int_a^b dx \left[ \frac{\partial g[f_0(x), f'_0(x)]}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g[f_0(x), f'_0(x)]}{\partial f'} \right) \right] \delta f(x) \\ &\quad + \frac{\partial g[f_0(x), f'_0(x)]}{\partial f'} \delta f(x) \Big|_a^b \end{aligned} \quad (2.4)$$

**Beispiel:** Für das Funktional des Mittelwertes der kinetischen Energie gilt:

$$\begin{aligned} \delta \langle T \rangle &= \frac{1}{t_e - t_a} \left[ - \int_{t_a}^{t_e} dt \frac{d m \dot{\mathbf{r}}(t)}{dt} \cdot \delta \mathbf{r}(t) + m \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \delta \mathbf{r}(t) \Big|_{t_a}^{t_e} \right] \\ &= \frac{1}{t_e - t_a} \left[ - \int_{t_a}^{t_e} dt m \ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \delta \mathbf{r}(t) + m \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \delta \mathbf{r}(t) \Big|_{t_a}^{t_e} \right] \end{aligned}$$

Damit können wir das Fermat'sche Prinzip über die Variation eines Funktionals ausdrücken: Der Lichtstrahl wählt den Weg  $\mathbf{r}_0(u)$  vom Punkt  $\mathbf{a} = \mathbf{r}(0)$  zum Punkt  $\mathbf{b} = \mathbf{r}(1)$  auf dem das Funktional

$$W_{\text{opt}}\{\mathbf{r}(u)\} = \int_0^1 du \left| \frac{d\mathbf{r}(u)}{du} \right| n(\mathbf{r}(u))$$

extremal wird, d.h. die Variation  $\delta W_{\text{opt}}\{\mathbf{r}_0(u)\} = 0$  verschwindet auf dem Weg des Lichtstrahls. Dabei muss  $\delta \mathbf{r}(0) = \delta \mathbf{r}(1) = 0$  gelten, da Anfangs- und Endpunkt fest sind.

### Addendum:

Die *Funktional-Ableitung* am Ort  $x_0$  ist die Variation des Funktionals  $F\{f(x)\}$ , wenn die Änderung der Funktion  $\delta f(x)$  nur um  $x_0$  lokalisiert ist. D.h.  $\delta f(x) \approx \epsilon \delta(x - x_0)$  (Mathematisch korrekt muss man eine Regularisierung der  $\delta$ -Funktion mit endlicher Breite verwenden). Wir schreiben sie in der Form

$$\frac{\delta F\{f_0(x)\}}{\delta f(x_0)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F\{f_0(x) + \epsilon \delta(x - x_0)\} - F\{f_0(x)\}}{\epsilon}$$

Z.B. gilt für das Funktional aus Gl. (2.4)

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_g\{f_0(x)\}}{\delta f(x_0)} &= \frac{1}{\epsilon} \int_a^b dx \frac{\partial g[f_0(x), f'_0(x)]}{\partial f} \epsilon \delta(x - x_0) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g[f_0(x), f'_0(x)]}{\partial f'} \right) \epsilon \delta(x - x_0) \\ &\quad + \frac{\partial g[f_0(x), f'_0(x)]}{\partial f'} \epsilon \delta(x - x_0) \Big|_a^b \\ &= \frac{\partial g[f_0(x), f'_0(x)]}{\partial f} \Big|_{x=x_0} - \frac{d}{dx} \frac{\partial g[f_0(x), f'_0(x)]}{\partial f'} \Big|_{x=x_0} \end{aligned}$$

wenn  $x_0 \in (a, b)$  liegt.

### 2.3.3 Lagrange-Funktion und Wirkungsintegral

Betrachte ein mechanisches  $N$ -Teilchen-System mit den Bahnkurven  $\mathbf{r}_i(t)$  im Zeitintervall  $[t_a, t_e]$ . Das d'Alembert'sche Prinzip liefert uns die Bedingung

$$\int_{t_a}^{t_e} dt \sum_{i=1}^N (\mathbf{K}_i(t) - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i(t)) \cdot \delta \mathbf{r}_i(t) = 0 \quad (2.5)$$

für alle zulässigen virtuellen Verrückungen  $\delta \mathbf{r}_i(t)$  entlang der Bahnkurven. Dies ist in Abb. 2.2 dargestellt.

Nun liegt es nahe, die  $\delta \mathbf{r}_i(t)$  als Variationen der Bahnkurven zu deuten und analog zum Fermat'schen Prinzip ein Funktional  $S\{\mathbf{r}_j(t)\}$  zu suchen, dessen Variation  $\delta S$  gerade die Gl. (2.5) ergibt. Dann wird das Funktional  $S$  auf der Bahnkurve extremal.

Dies ist möglich, wenn die dynamischen Kräfte Potentialkräfte sind, also

$$\mathbf{K}_i(t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$$

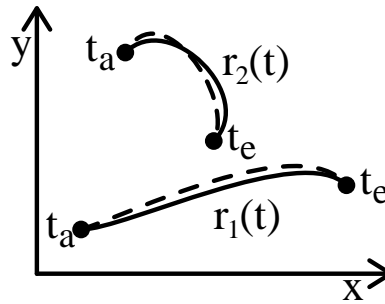


Abbildung 2.2: Bahnkurven für zwei Teilchen und ihre virtuellen Verrückungen. Dabei wurden die Bahnkurven am Anfangs- und End-Zeitpunkt festgehalten, d.h.  $\delta \mathbf{r}_i(t_a) = \delta \mathbf{r}_i(t_e) = 0$ .

gilt, und wir das Funktional

$$S\{\mathbf{r}_j(t)\} = \int_{t_a}^{t_e} dt \left[ \underbrace{\sum_i \frac{m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2}{2}}_{\text{kinetische Energie } T} - V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \right]$$

verwenden. Tatsächlich gilt mit (2.4)

$$\begin{aligned} \delta S\{\mathbf{r}_j(t)\} &= \int_{t_a}^{t_e} dt \left[ \sum_i -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \cdot \delta \mathbf{r}_i - \sum_i \frac{d m_i \dot{\mathbf{r}}_i}{dt} \cdot \delta \mathbf{r}_i \right] + \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \Big|_{t_a}^{t_e} \\ &= \int_{t_a}^{t_e} dt \left[ \sum_i (\mathbf{K}_i(t) - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i(t)) \cdot \delta \mathbf{r}_i \right] + \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \Big|_{t_a}^{t_e} \end{aligned}$$

Wenn wir nun fordern, dass die Variation  $\delta \mathbf{r}_i(t)$  zum Anfangs- und End-Zeitpunkt verschwinden soll, fällt der letzte Term fort und wir erhalten Gl. (2.5).

### Hamilton'sches Prinzip:

Für ein  $N$ -Teilchen-Problem, dessen dynamischen Kräfte  $\mathbf{K}_i(t) = -\partial V / \partial \mathbf{r}_i$  durch das Potential  $V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$  bestimmt sind, definieren wir die *Lagrange-Funktion*:

$$L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, t) = T(\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N) - V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \quad (2.6)$$

als Differenz von kinetischer und potentieller Energie. Dann sind die möglichen Bahnkurven  $\mathbf{r}_i(t)$  im Zeitintervall  $[t_a, t_e]$  mit vorgegebenen Anfangs- und Endpunkten  $\mathbf{r}_i(t_a)$ ,  $\mathbf{r}_i(t_e)$  dadurch bestimmt, dass die *Wirkung*

$$S\{\mathbf{r}_j(t)\} = \int_{t_a}^{t_e} dt L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, t) \quad (2.7)$$

für alle virtuellen Verrückungen  $\delta \mathbf{r}_i(t)$  der Bahnkurven extremal wird. Dabei ist  $\delta \mathbf{r}_i(t_a) = \delta \mathbf{r}_i(t_e) = 0$  und es dürfen nur solche Bahnkurven und Verrückungen betrachtet werden, die mit den Zwangsbedingungen verträglich sind.

Der große Vorteil des Hamilton'schen Prinzips liegt darin, dass es eine koordinaten-unabhängige Formulierung der Mechanik bietet. Dies wird im folgenden Abschnitt ausgenutzt.



Die Wirkung  $S$  hat die Dimension Js. Dies ist auch die Dimension von  $\hbar$ , weswegen Planck die Bezeichnung Wirkungsquantum wählte. Tatsächlich gibt es hier einen Zugang zur Quantenmechanik in dem man alle möglichen Bahnen  $\mathbf{r}(t)$  betrachtet und diese mit der Phase  $e^{iS/\hbar}$  wichtet (Feynman'sches Wegintegral).

## 2.4 Die Lagrange'sche Methode 2. Art

### 2.4.1 Generalisierte Koordinaten

*Holonome Zwangsbedingungen* schränken die Bewegung des  $N$ -Teilchen-Systems auf eine  $f = 3N - s$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ein. Diese kann durch  $f$  neue unabhängige *generalisierte Koordinaten*  $q_1, q_2, \dots, q_f$  über die Abhängigkeit

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{g}_i(q_1, q_2, \dots, q_f, t) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, N \quad (2.8)$$

parametrisiert werden.

#### Beispiele

**Ebenes Pendel:** mit Zwangsbedingungen  $y = 0$ ,  $x^2 + z^2 = l^2(t)$ . Verwende  $q = \varphi$ , den Polarwinkel (vergleiche Abschnitt 2.1.2), und setze

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l(t) \sin q \\ 0 \\ -l(t) \cos q \end{pmatrix} = \mathbf{g}(q, t)$$

wobei zugelassen wurde, dass die Pendellänge von außen verändert werden kann.

**Gezogenes Pendel:** Wir betrachten zwei Teilchen. Diese seien mit einer Schnur der Länge  $l$ , die durch eine Öse im Ursprung läuft, verbunden (siehe Abb. 2.3). Ferner sei die Bewegung des Teilchen 1 auf die  $x, z$ -Ebene, und die des Teilchens 2 auf die  $z$ -Achse beschränkt. Dies ergibt die 4 holonomen Zwangsbedingungen

$$y_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad y_2 = 0, \quad x_1^2 + z_1^2 = (l - z_2)^2$$

Damit werden  $f = 3 * 2 - 4 = 2$  generalisierte Koordinaten benötigt. Wir wählen  $q_1 = r = \sqrt{x_1^2 + z_1^2}$  und  $q_2 = \varphi$  und erhalten:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ 0 \\ -r \cos \varphi \end{pmatrix} = \mathbf{g}_1(r, \varphi) \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r - l \end{pmatrix} = \mathbf{g}_2(r, \varphi)$$

### 2.4.2 Lagrange'sche Gleichungen

Nun sollen die Bewegungsgleichungen auf die generalisierten Koordinaten transformiert werden. Dies gelingt entweder analog zu Abschnitt 2.1.2, indem man im d'Alembert'schen Prinzip die

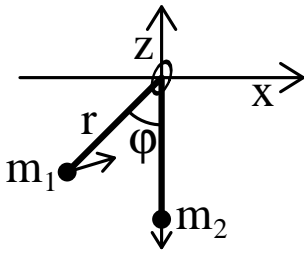


Abbildung 2.3: Skizze des gezogenen Pendels

neuen Variablen einsetzt (vergleiche Lehrbücher, mühsam), oder direkt über das Hamilton'sche Prinzip.

Der Kernpunkt ist dabei, dass alle zulässigen Variationen  $\delta \mathbf{r}_i$  durch

$$\delta \mathbf{r}_i = \delta \mathbf{g}_i(q_1, q_2, \dots, q_f, t) = \sum_{j=1}^f \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

ausgedrückt werden können. Dabei ist die Variation der generalisierten Koordinaten an keine Einschränkungen gebunden. (Die Zeit wird nicht variiert, da die virtuellen Verrückungen instantan sind.) Damit vereinfacht sich das Hamilton'sche Prinzip ungemein, wenn man es in generalisierten Koordinaten formuliert. Hierzu ersetzen wir in der Lagrange-Funktion die  $\mathbf{r}_i$  und  $\dot{\mathbf{r}}_i$  über Gl. (2.8) durch die generalisierten Koordinaten  $q_j, \dot{q}_j$  und erhalten so die Lagrange-Funktion  $L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$ .

Analog zu Gl. (2.4) ist nun die Variation des Wirkungsintegrals durch

$$\begin{aligned} \delta S\{q_j(t)\} &= \int_{t_a}^{t_e} dt \delta L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) = \int_{t_a}^{t_e} dt \sum_{j=1}^f \left[ \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j(t) \right] \\ &= \int_{t_a}^{t_e} dt \sum_{j=1}^f \left[ \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j(t) + \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j(t) \Big|_{t_a}^{t_e} \end{aligned}$$

gegeben. Das Hamilton'sche Prinzip besagt nun, dass die Bahn des Systems durch die Forderung  $\delta S$  für beliebige Verrückungen  $\delta q_j(t)$  bestimmt ist. Damit erhalten wir die

#### Lagrange'schen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)}{\partial q_j} \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, f \quad (2.9)$$

#### Bemerkungen

- Die Lagrange'schen Gleichungen liefern ein System von  $f$  Differentialgleichungen 2. Ordnung in  $q_i$ . Zusammen mit den  $2f$  Anfangsbedingungen  $q_i(t_0)$  und  $\dot{q}_i(t_0)$  sind dadurch die Bahnkurven des Systems bestimmt.
- Ohne Zwangsbedingungen kann man die normalen Koordinaten  $x_i, y_i, z_i$  für  $i = 1, 2, \dots, N$  als generalisierte Koordinaten verwenden. Wir erhalten mit  $L = \sum_i m_i/2(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) -$

$V(x_1, \dots, z_N)$  z.B.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(x_1, \dots, z_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{z}_N, t)}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{d}{dt} (m_i \dot{x}_i) = m_i \ddot{x}_i$$

und

$$\frac{\partial L(x_1, \dots, z_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{z}_N, t)}{\partial x_i} = - \frac{\partial V(x_1, \dots, z_N)}{\partial x_i} = F_{x_i}$$

Somit werden die Lagrange'schen Gleichungen dann zu den Newton'schen Bewegungsgleichungen.

### 2.4.3 Skizze des allgemeinen Vorgehens

Wir untersuchen ein mechanisches System aus  $N$ -Teilchen mit  $s$  holonomen Zwangsbedingungen, bei dem die dynamischen Kräfte durch das Potential  $\tilde{V}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t)$  bestimmt sind.

1. Identifiziere  $f = 3N - s$  generalisierte Koordinaten  $q_j$ , die über die Beziehungen

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{g}_i(q_1, q_2, \dots, q_f, t) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, N$$

den mit den Zwangsbedingungen verträglichen Teil des Konfigurationsraumes aufspannen.

2. Bestimme die kinetische Energie

$$T(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) = \sum_{i=1}^f \frac{m_i}{2} \left( \frac{d}{dt} \mathbf{g}_i(q_1, \dots, q_f, t) \right)^2$$

und das Potential

$$V(q_1, \dots, q_f, t) = \tilde{V}(\mathbf{g}_1(q_1, \dots, q_f, t), \dots, \mathbf{g}_N(q_1, \dots, q_f, t), t)$$

als Funktion der generalisierten Koordinaten

3. Bestimme die Lagrangefunktion  $L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) = T - V$
4. Bestimme die Bewegungsgleichungen der generalisierten Koordinaten aus den Lagrange'schen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)}{\partial q_j} \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, f$$

5. Löse die Bewegungsgleichungen  $q_j(t)$  zu den gegebenen Anfangsbedingungen und bestimme die Bahnkurven  $\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{g}_i(q_1(t), q_2(t), \dots, q_f(t), t)$  aller Teilchen.

Dies soll nun an den zwei Beispielen, die bereits in Abschnitt 2.4.1 angesprochen wurden, illustriert werden:

## Ebenes Pendel

1. Verwende die generalisierte Koordinate  $q = \varphi$ , den Polarwinkel, mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l(t) \sin \varphi \\ 0 \\ -l(t) \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{l}(t) \sin \varphi - l(t) \dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 \\ -\dot{l}(t) \cos \varphi + l(t) \dot{\varphi} \sin \varphi \end{pmatrix}$$

- 2.

$$\begin{aligned} T(\varphi, \dot{\varphi}, t) &= \frac{m}{2} \left[ \left( -\dot{l}(t) \sin \varphi - l(t) \dot{\varphi} \cos \varphi \right)^2 + \left( -\dot{l}(t) \cos \varphi + l(t) \dot{\varphi} \sin \varphi \right)^2 \right] \\ &= \frac{m}{2} \left[ \dot{l}^2(t) \dot{\varphi}^2 + \dot{l}^2(t) \right] \\ V(\varphi, t) &= m g z = -m g l(t) \cos \varphi \end{aligned}$$

3.  $L(\varphi, \dot{\varphi}, t) = T - V = \frac{m}{2} [\dot{l}^2(t) \dot{\varphi}^2 + \dot{l}^2(t)] + m g l(t) \cos \varphi$

- 4.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(\varphi, \dot{\varphi}, t)}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{d}{dt} (m \dot{l}^2(t) \dot{\varphi}) = m \dot{l}^2(t) \ddot{\varphi} + 2m \dot{l}(t) \dot{l} \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial L(\varphi, \dot{\varphi}, t)}{\partial \varphi} = -m g l(t) \sin \varphi$$

Daraus folgt:

$$l(t) \ddot{\varphi} + 2\dot{l} \dot{\varphi} = -g \sin \varphi \quad (2.10)$$

Für  $l(t) = l = const$  ist dies das alte Resultat (2.2)

5. Die Differentialgleichung geht für kleine Auslenkungen  $\varphi$  und  $l(t) \approx l_0$  mit  $\omega_0^2 = g/l_0$  in die Schwingungsgleichung

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = -2 \frac{\dot{l}}{l_0} \dot{\varphi} = h(t)$$

über. Gemäß der Diskussion in der Einführung II ist die dem System zugeführte Leistung  $\propto h(t) \dot{\varphi} = -2 \dot{l} \dot{\varphi}^2 / l_0$ . Es wird also Energie zugeführt, wenn  $\dot{l} < 0$ . Damit kann man die Schwingung verstärken, wenn man den Faden verkürzt, während  $\dot{\varphi}$  maximal ist (Pendel unten) und wieder verlängert, wenn  $\dot{\varphi} = 0$  gilt (maximaler Ausschlag). Dies ist das Prinzip der Schiffschaukel oder des Weihrauchfasses von Santiago de Compostela<sup>5</sup>. Die Möglichkeit dem System Energie zuzuführen liegt an der rheonomen Zwangsbedingung, siehe Abschnitt 2.2.4.

## Gezogenes Pendel

1. Verwende die generalisierten Koordinate  $q_1 = r$  und  $q_2 = \varphi$ .

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ 0 \\ -r \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{r} \sin \varphi - r \dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 \\ -\dot{r} \cos \varphi + r \dot{\varphi} \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r - l \end{pmatrix} \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{r} \end{pmatrix}$$

<sup>5</sup>nach Honerkamp/Römer

2.

$$\begin{aligned}
 T(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) &= \frac{m_1}{2} [(-\dot{r} \sin \varphi - r \dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + (-\dot{r} \cos \varphi + r \dot{\varphi} \sin \varphi)^2] + \frac{m_2}{2} \dot{r}^2 \\
 &= \frac{m_1}{2} r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{r}^2
 \end{aligned}$$

$$V(r, \varphi) = m_1 g z_1 + m_2 g z_2 = -m_1 g r \cos \varphi + m_2 g (r - l)$$

$$3. \quad L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{m_1}{2} r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{r}^2 + m_1 g r \cos \varphi - m_2 g (r - l)$$

4.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial r} \quad \rightarrow \quad (m_1 + m_2) \dot{r} = (m_1 \cos \varphi - m_2) g + m_1 r \dot{\varphi}^2 \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \varphi} \quad \rightarrow \quad m_1 r^2 \ddot{\varphi} + 2 m_1 r \dot{r} \dot{\varphi} = -m_1 g r \sin \varphi
 \end{aligned}$$

5. Zur numerischen Lösung führen wir die zusätzlichen Variablen  $v_r = \dot{r}$  und  $v_\varphi = \dot{\varphi}$  ein und erhalten die vier Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= v_r & \dot{v}_r &= \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 g \cos \varphi - m_2 g + m_1 r v_\varphi^2) \\
 \dot{\varphi} &= v_\varphi & \dot{v}_\varphi &= \frac{1}{r} (-2 v_r v_\varphi - g \sin \varphi)
 \end{aligned}$$

erster Ordnung. Diese lassen sich durch Diskretisierung in der Zeit z.B. mit dem Euler Verfahren lösen. Abbildung 2.4 zeigt das verwendete Programm und Abbildung 2.5 die Ergebnisse.

```

!*****
! Fortran90 Programm zur Berechnung der Bahnkurve eines gezogenen Pendels /
!*****
PROGRAM Pendel

! ** Definitionen der Variablen **

IMPLICIT NONE
INTEGER :: N
INTEGER, PARAMETER :: NMAX=50000
REAL(KIND(0.0E0)) :: dt,Ekin,EV,g,l,m1,m2,t,x1,x2,z1,z2
REAL(KIND(0.0E0)), DIMENSION(0:Nmax) :: phi,r,vphi,vr ! Felder

! ** Vorbereitung der Ausgabefiles **

OPEN(3,File='energie.dat')
WRITE(3,*) '#t[s], Eges[J], Ekin, EV'

OPEN(4,File='pendel.dat')
WRITE(4,*) '#t[s], b[m], phi, x1[m], z1[m], x2[m], z2[m]'

! ** Vorgabe der Parameter **

l=1.0 ! Laenge des Fadens in m
m1=0.05 ! in kg
m2=0.2 ! in Kg
g=9.81 ! in m/s^2
dt=0.0001 ! Zeitschritt für die Numerik in s

! ** Anfangsbedingungen **

phi(0)=-3.14/2.
vphi(0)=0.
r(0)=0.5
vr(0)=0.
t=0.

! ** Iteration **

DO 120 N=1,Nmax

! * Bestimmung der neuen Werte *
phi(N) =phi(N-1) +dt*vphi(N-1)
r(N) =r(N-1) +dt*vr(N-1)
vphi(N)=vphi(N-1)+dt*(-2.*vphi(N-1)*vr(N-1)-g*SIN(phi(N-1)))/r(N-1)
vr(N) =vr(N-1) +dt*(m1*g*COS(phi(N-1))-m2*g+m1*r(N-1)*vphi(N-1)**2)/(m1+m2)

IF(r(N).LT.0.01) GOTO 999 ! r zu klein, Abbruch
t=t+dt ! neue Zeit

! * Umrechnung auf kartesische Koordinaten *
x1 = -r(N)*SIN(phi(N))
z1 = -r(N)*COS(phi(N))
x2 = 0.
z2 = r(N)-l

WRITE(4,911) t, r(N), phi(N), x1, z1, x2, z2

! * Bestimmung der Energien zu Testzwecken *
! Wenn Ekin+EV nicht konstant ist, ist dt zu groß
Ekin = m1/2.*(vr(N)**2+r(N)**2*vphi(N)**2) + m2/2.*vr(N)**2
EV = m2*g*(r(N)-l) - m1*g*r(N)*COS(phi(N))
WRITE(3,911) t,Ekin+EV,Ekin,EV

120 CONTINUE

CLOSE(4)
911 FORMAT(7(ES10.3E2,1x)) ! Ausgabe von 3 Nachkomma-Stellen
999 STOP
END

```

Abbildung 2.4: Fortran Programm zur Bestimmung der Bahnkurve des gezogenen Pendels

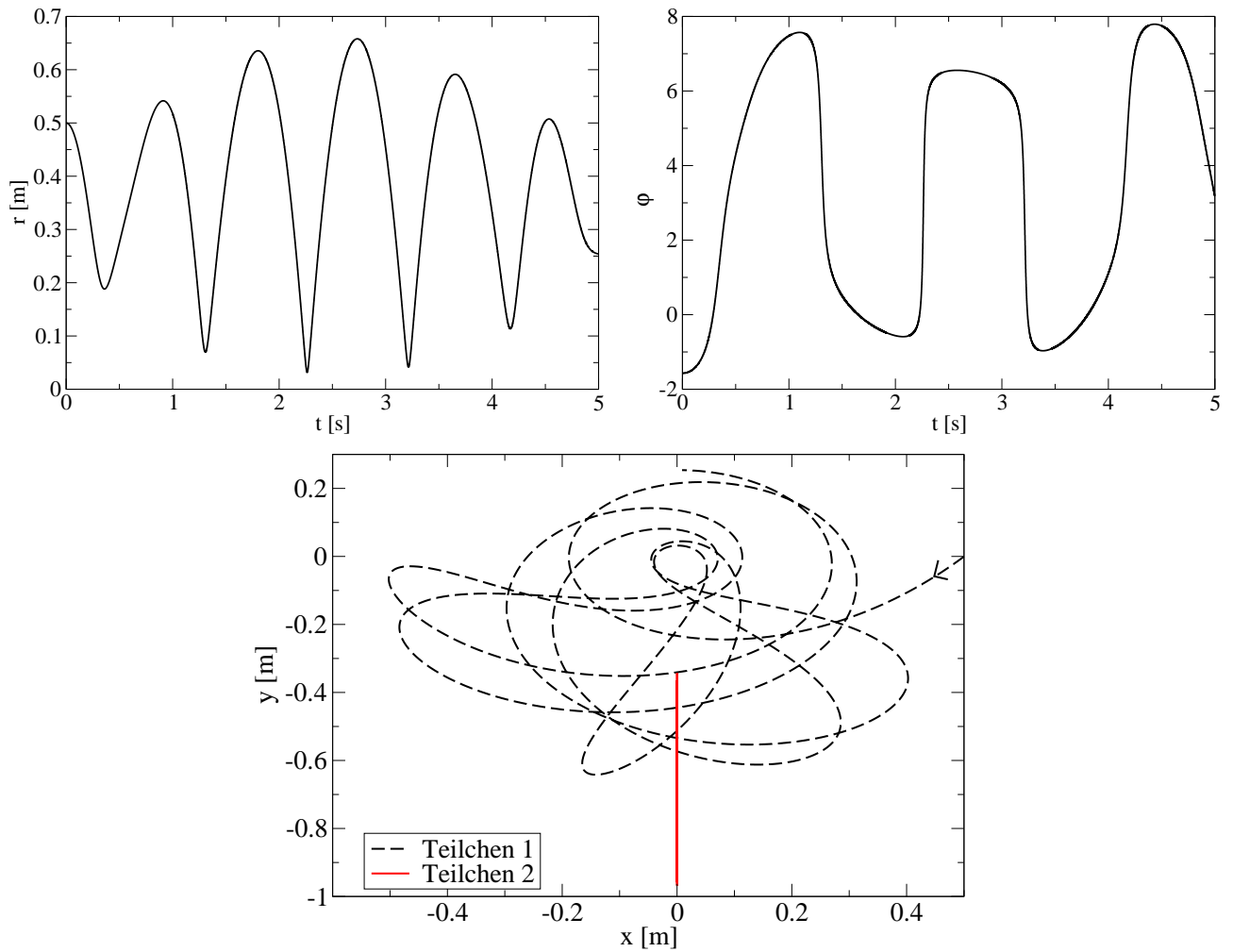


Abbildung 2.5: Ergebnisse des Programms aus Abb. 2.4 für das gezogene Pendel. Man erkennt ein kompliziertes Verhalten mit mehreren Überschlägen in unterschiedlichen Richtungen.

# Kapitel 3

## Hamilton'sche Dynamik

### 3.1 Hamilton'sche Gleichungen

Ausgangspunkt ist die Lagrangefunktion  $L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$  die über die Lagrange'schen Gleichungen auf  $f$  Differentialgleichungen zweiter Ordnung führt. Für eine numerische Lösung ist es zweckmäßig, Differentialgleichungen erster Ordnung zu betrachten. Hierzu hatten wir im Beispiel 2.4.3 die Geschwindigkeiten  $v_q = \dot{q}$  als neue Variablen betrachtet. In diesem Kapitel wollen wir die Mechanik so umformulieren, dass ein System aus Differentialgleichungen erster Ordnung für die generalisierten Variablen  $q_i$  und der zugehörigen kanonischen Impulse  $p_i$ , die Hamilton'sche Gleichungen, entsteht. Im Gegensatz zur Formulierung mit  $q$  und  $v_q$  hat diese *kanonische Formulierung* folgende Vorteile:

- Man erhält eine symmetrische Struktur in den Variablen  $p$  und  $q$ , die eine große Klasse von Variablentransformationen (kanonische Transformationen) erlauben
- Der Übergang zur Quantenmechanik ist möglich
- Der Phasenraum der Variablen  $p, q$  erlaubt eine statistische Formulierung der Thermodynamik

Die Idee ist dabei mit dem

$$\text{kanonischen Impuls } p_i = \frac{\partial L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{für } i = 1, \dots, f$$

neue zusätzliche Variablen einzuführen, die an die Stelle der Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$  treten. Dann wird das System durch die  $2f$  Variablen  $q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f$  beschrieben, die den *Phasenraum* aufspannen.



**Beispiel:** Wir betrachten ein freies Teilchen im Potential  $V(\mathbf{r})$ .

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = m \dot{r}_i$$

Dann ist  $\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}}{m}$

und  $\dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}$

Damit erhalten wir 6 Differentialgleichungen erster Ordnung für die 6 Variablen  $x, y, z, p_x, p_y, p_z$ . Setzen wir  $H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \mathbf{p}^2/2m + V(\mathbf{r})$  so können wir diese Gleichungen in der Form

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{p}}$$

**Fragestellungen:**

1. Man muss in der Lage sein, die Geschwindigkeiten durch die kanonischen Impulse auszudrücken. Mathematisch bedeutet das, dass man die Gleichungen

$$p_i = \frac{\partial L(q_1 \dots q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)}{\partial \dot{q}_i}$$

nach  $\dot{q}_i = h_i(p_1, \dots, p_f, q_1, \dots, q_f, t)$  auflösen kann. Wann ist das möglich?

2. Wie kann man eine *Hamiltonfunktion*  $H(p_1, \dots, p_f, q_1, \dots, q_f, t)$  konstruieren, dass

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \text{und} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

gilt.

### 3.1.1 Auflösbarkeit

Aus der Mathematik lernen wir:

**Eine eindimensionale Funktion**  $y = f(x)$  ist nach  $x = h(y)$  auflösbar, wenn  $f'(x) \neq 0$  gilt.

**Eine mehrdimensionale Funktion**  $y_i = f_i(x_1, \dots, x_f)$  mit  $i = 1, \dots, f$  ist in der Umgebung des Ortes  $(x_1^0, \dots, x_f^0)$  nach den  $x_i$  auflösbar, wenn die *Jacobimatrix*

$$J_{ij}(x_1, \dots, x_f) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

$\det\{J_{ij}(x_1^0, \dots, x_f^0)\} \neq 0$  erfüllt. In diesem Fall kann man lokale Funktionen  $x_i = h_i(y_1, \dots, y_f)$  konstruieren.

Damit erhalten wir die

$$\text{Auflösbarkeitsbedingung} \quad \det \left\{ \frac{\partial^2 L(q_1 \dots q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right\} \neq 0$$

Nun gilt bei mechanischen Systemen mit holonomen, skleronomen<sup>1</sup> Zwangsbedingungen der Zusammenhang  $\mathbf{r}_n = \mathbf{g}_n(q_1, \dots, q_f)$  und somit

$$T = \sum_n \frac{m_n}{2} \dot{\mathbf{r}}_n^2 = \frac{1}{2} \sum_{ij} \underbrace{\sum_n m_n \frac{\partial \mathbf{g}_n}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_n}{\partial q_j}}_{=M_{ij}(q_1, \dots, q_f)} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (3.1)$$

Da die kinetische Energie für beliebige Geschwindigkeiten positiv definit ist, folgt dies auch für ihre Darstellung über die verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$ . Damit ist die Matrix  $M_{ij}(q_1, \dots, q_f)$  positiv definit und es gilt insbesondere  $\det\{M_{ij}\} > 0$ .

Damit folgt

$$p_k = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} [T - V(q_1 \dots q_f, t)] = \frac{1}{2} \left( \sum_j M_{kj} \dot{q}_j + \sum_i M_{ik} \dot{q}_k \right) = \sum_j M_{kj} \dot{q}_j, \quad (3.2)$$

da  $M_{ij}$  symmetrisch ist, und die Jacobimatrix

$$\frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 L(q_1 \dots q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} = M_{kj}$$

erfüllt die Auflösbarkeitsbedingung. Man kann also Funktionen

$$\dot{q}_j = h_j(p_1 \dots p_f, q_1 \dots q_f, t)$$

konstruieren, die die Geschwindigkeiten durch die kanonischen Impulse ausdrücken.

### 3.1.2 Legendretransformation

Sei  $f(x, y)$  gegeben und  $\partial^2 f(x, y)/\partial x^2 > 0$  (oder  $< 0$ ). Wir setzen nun  $z = \partial f(x, y)/\partial x$  und diese Beziehung ist wegen  $\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = \partial^2 f(x, y)/\partial x^2 \neq 0$  nach  $x = h(z, y)$  auflösbar. Dann bezeichnet man die Funktion

$$g(z, y) = h(z, y)z - f(h(z, y), y) = xz - f$$

als *Legendre-Transformierte* von  $f(x, y)$  bezüglich der Variablen  $x$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(z, y)}{\partial z} &= \frac{\partial h(z, y)}{\partial z} z + h(z, y) - \underbrace{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}}_{=z} \frac{\partial h(z, y)}{\partial z} = h(z, y) = x \\ \frac{\partial g(z, y)}{\partial y} &= \frac{\partial h(z, y)}{\partial y} z - \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{\partial h(z, y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Anscheinend ist die Auflösbarkeitsbedingung auch für rheonome Zwangsbedingungen erfüllt. Ich kenne leider keinen Beweis.

D.h. die partielle Ableitung der Legendretransformierten nach der neuen Variablen  $z$  ergibt die wegtransformierte Größe  $x$ . Dagegen ändern die partiellen Ableitungen nach den anderen Variablen lediglich ihr Vorzeichen.

Eine einfachere Betrachtung gelingt mit Hilfe des vollständigen Differentials

$$dg = zdx + xdz - \underbrace{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}}_{=z} dx - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy = xdz - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$$

Hieraus identifizieren wir

$$\frac{\partial g(z, y)}{\partial z} = x \quad \text{und} \quad \frac{\partial g(z, y)}{\partial y} = -\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

und erhalten dasselbe Ergebnis.

### 3.1.3 Die Hamiltonfunktion

Wir definieren nun die

<p>Hamiltonfunktion</p> $  \begin{aligned}  H(p_1 \dots p_f, q_1 \dots q_f, t) &= \sum_{i=1}^f \dot{q}_i p_i - L \\  &= \sum_{i=1}^f h_i(p_1 \dots p_f, q_1 \dots q_f, t) p_i \\  &\quad - L\left(q_1 \dots q_f, \underbrace{h_1(p_1 \dots p_f, q_1 \dots q_f, t)}_{=\dot{q}_1}, \dots, \underbrace{h_f(p_1 \dots p_f, q_1 \dots q_f, t)}_{=\dot{q}_f}, t\right)  \end{aligned}  $ <p style="text-align: right;">(3.3)</p>
--

als Legendretransformierte der Lagrangefunktion bezüglich der Variablen  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f$ . Dann gilt

$$dH = \sum_{i=1}^f \left( p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{=\dot{p}_i} dq_i - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{=p_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt = \sum_{i=1}^f \left( \underbrace{\dot{q}_i}_{=\frac{\partial H}{\partial p_i}} dp_i - \underbrace{\dot{p}_i}_{=\frac{\partial H}{\partial q_i}} dq_i \right) - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_{=\frac{\partial H}{\partial t}} dt$$

und wir identifizieren

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H(p_1 \dots p_f, q_1 \dots q_f, t)}{\partial p_j} &= \dot{q}_j \\
 \frac{\partial H(p_1 \dots p_f, q_1 \dots q_f, t)}{\partial q_j} &= -\dot{p}_j \\
 \frac{\partial H(p_1 \dots p_f, q_1 \dots q_f, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial L(q_1 \dots q_f, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_f, t)}{\partial t}
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

Die Hamilton'schen Gleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(p_1, \dots, p_f, q_1, \dots, q_f, t)}{\partial p_i} \quad (3.4)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H(p_1, \dots, p_f, q_1, \dots, q_f, t)}{\partial q_i} \quad (3.5)$$

bestimmen die Dynamik des Systems im  $2f$  dimensionalen Phasenraum der Variablen  $(p_1 \dots p_f, q_1 \dots q_f)$

### 3.1.4 Hamiltonfunktion und Energie

Wir betrachten nun die zeitliche Änderung der Hamiltonfunktion. Es gilt:

$$\frac{d}{dt}H(p_1, \dots, p_f, q_1, \dots, q_f, t) = \sum_i \left( \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_i}}_{=\dot{q}_i} \dot{p}_i + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_i}}_{=-\dot{p}_i} \dot{q}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

D.h.

Die Hamiltonfunktion ist eine Erhaltungsgröße der Bewegung, wenn sie nicht explizit von der Zeit abhängt.

Für skleronome Zwangsbedingungen folgt mit den Gln. (3.1,3.2)

$$\sum_i \dot{q}_i p_i = \sum_{ij} M_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = 2T$$

und wir erhalten  $H = 2T - L = T + V$ . Damit gilt:

Für skleronome Zwangsbedingungen und Kräfte, die durch ein mechanisches Potential  $V(\mathbf{r}, t)$  darstellbar sind, ist die Hamiltonfunktion die Gesamtenergie des Systems.

### 3.1.5 Beispiel: Sphärisches Pendel

Betrachte ein Pendel mit fester Länge  $l$ , das im Ursprung aufgehängt ist, ansonsten aber frei schwingen kann. Die beiden verbleibenden Freiheitsgrade lassen sich über die generalisierten Koordinaten  $q_1 = \vartheta$  und  $q_2 = \varphi$  beschreiben. Es gilt

$$\mathbf{r} = l \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad \dot{\mathbf{r}} = l \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \cos \vartheta \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \varphi \\ \dot{\vartheta} \cos \vartheta \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \varphi \\ -\dot{\vartheta} \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

und wir erhalten

$$L(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) - m g l \cos \vartheta$$

Damit lauten die kanonischen Impulse

$$p_{\vartheta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = m l^2 \dot{\vartheta} \quad p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m l^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} \quad (3.6)$$

Man rechnet leicht nach, dass  $p_\varphi = L_z$  gilt. Der kanonische Impuls, der zum Azimutwinkel gehört, ist also gerade die  $z$ -Komponente des Drehimpulses.

Nun können wir die Gleichungen (3.6) nach den verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $\dot{\vartheta}, \dot{\varphi}$  auflösen und erhalten:

$$\dot{\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{ml^2} = h_\vartheta(p_\vartheta, p_\varphi, \vartheta, \varphi, t) \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2 \sin^2 \vartheta} = h_\varphi(p_\vartheta, p_\varphi, \vartheta, \varphi, t)$$

Damit lautet die Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned} H(p_\vartheta, p_\varphi, \vartheta, \varphi) &= \dot{\vartheta} p_\vartheta + \dot{\varphi} p_\varphi - L = \frac{p_\vartheta^2}{ml^2} + \frac{p_\varphi^2}{ml^2 \sin^2 \vartheta} - \frac{p_\vartheta^2}{2ml^2} - \frac{p_\varphi^2}{2ml^2 \sin^2 \vartheta} + mgl \cos \vartheta \\ &= \frac{p_\vartheta^2}{2ml^2} + \frac{p_\varphi^2}{2ml^2 \sin^2 \vartheta} + mgl \cos \vartheta \end{aligned} \quad (3.7)$$

und wir erhalten die Bewegungsgleichungen

$$\dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial p_\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{ml^2} \quad \dot{p}_\vartheta = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = \frac{p_\varphi^2 \cos \vartheta}{ml^2 \sin^3 \vartheta} + mgl \sin \vartheta \quad (3.8)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2 \sin^2 \vartheta} \quad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \quad (3.9)$$

Zu Diskussion führen wir die neuen effektiven Parameter

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad P = ml^2 \omega_0$$

ein. Zunächst finden wir, dass  $p_\varphi(t) = \text{const} = P\beta$  gilt, wobei die dimensionslose Konstante  $\beta$  durch die Anfangsbedingung  $p_\varphi(t_0)$  bestimmt wird. Dann folgt

$$\dot{\vartheta} = \omega_0 \frac{p_\vartheta}{P} \quad \dot{p}_\vartheta = \omega_0 P \left( \frac{\beta^2 \cos \vartheta}{\sin^3 \vartheta} + \sin \vartheta \right) \quad (3.10)$$

Dies sind zwei Differentialgleichungen erster Ordnung für die beiden Variablen  $p_\vartheta(t), \vartheta(t)$ , die numerisch recht einfach zu lösen sind. Aus deren Lösung kann man anschließend mit

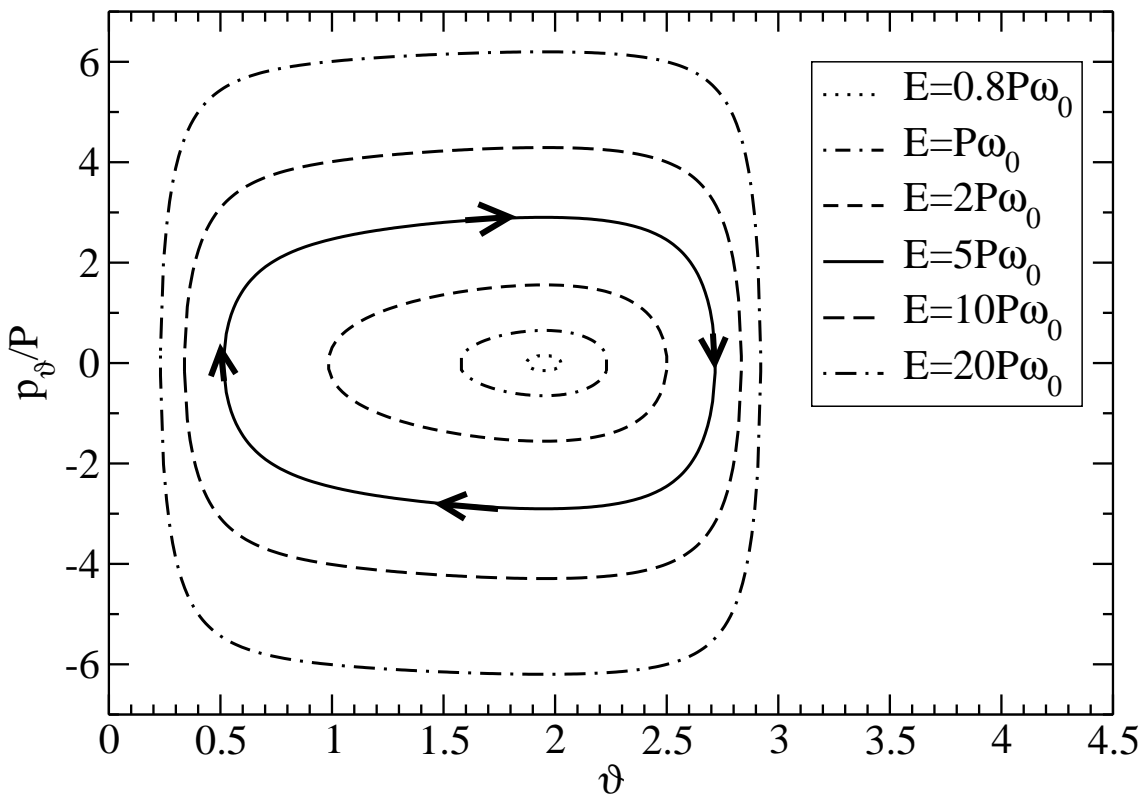
$$\dot{\varphi} = \omega_0 \frac{\beta}{\sin^2 \vartheta} \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t dt' \omega_0 \frac{\beta}{\sin^2 \vartheta(t')}$$

bestimmen.

Zur Diskussion der Bewegung ist es zweckmäßig den Teil des Phasenraumes zu betrachten, der von den Variablen  $p_\vartheta(t), \vartheta(t)$  aufgespannt wird, siehe Abbildung 3.1. Die Vektoren zeigen die lokale Bewegungsrichtung, die durch die Gleichungen (3.10) bestimmt wird. Da die Hamiltonfunktion nicht explizit von der Zeit abhängt, ist

$$H = \omega_0 P \left( \frac{p_\vartheta^2}{2P^2} + \cos \vartheta + \frac{\beta^2}{2 \sin^2 \vartheta} \right) = E(p_\vartheta, \vartheta)$$

eine Erhaltungsgröße und die Bewegung verläuft auf den Kurven mit  $E(p_\vartheta, \vartheta) = \text{const}$ , die in Abb. 3.1 eingezeichnet sind. Für  $\beta \neq 0$  erhält man für alle Energien geschlossene Kurven, und  $\vartheta$  ist auf das Intervall  $0 < \vartheta < \pi$  beschränkt.

Abbildung 3.1: Teil des Phasenraumes des sphärischen Pendels für  $\beta = \sqrt{2}$ .

Da  $p_\vartheta^2 \geq 0$  gilt, ist die Energie durch

$$E_{\min} = \omega_0 P \operatorname{Min} \left\{ \cos \vartheta + \frac{\beta^2}{2 \sin^2 \vartheta} \right\}$$

nach unten beschränkt. Für  $E = E_{\min}$  (für  $\beta = \sqrt{2}$  ist  $E_{\min} \approx 0.79P\omega_0$ ) erhalten wir den Spezialfall  $p_\vartheta = 0$ . Daraus folgt  $\dot{\vartheta} = 0$  und  $\vartheta = \vartheta_0$ . Dies beschreibt eine konstante Auslenkung des Pendels und wir finden  $\beta^2 = -\sin^4 \vartheta_0 / \cos \vartheta_0$ . Da  $\beta$  eine reelle Zahl ist, folgt  $\vartheta_0 > \pi/2$ ; das Pendel hängt also nach unten. Mit  $\dot{\varphi} = \pm \omega_0 / \sqrt{-\cos \vartheta_0}$  erhalten wir eine gleichmäßige Rotation um die  $z$ -Achse.

### 3.1.6 Zyklische Variable

Eine Variable  $q_i$  heißt *zyklisch* wenn die Hamiltonfunktion  $H(p_1, \dots, p_f, q_1, \dots, q_f, t)$  nicht von  $q_i$  abhängt<sup>2</sup>. Zum Beispiel ist in der Hamiltonfunktion (3.7) des sphärischen Pendels die Variable  $\varphi$  zyklisch. Dann gilt

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_i(t) = p_i^0 = \text{const}$$

Sind alle Variablen  $q_1 \dots q_f$  zyklisch so folgt

1.  $H = H(p_1, \dots, p_f, t)$

<sup>2</sup>Dies ist äquivalent zu der Aussage, dass die Lagrangefunktion  $L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$  nicht von  $q_i$  abhängt.

2.  $p_i(t) = p_i^0 = \text{const}$  für alle  $i$

3.

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \omega_i(p_1^0, \dots, p_f^0, t) \quad \Rightarrow \quad q_i(t) = q_i(t_0) + \int_{t_0}^t dt' \omega_i(p_1^0, \dots, p_f^0, t')$$

und wir haben eine vollständige Lösung des Problems.

## 3.2 Der Phasenraum

Als *Phasenraum* bezeichnen wir den  $2f$ -dimensionalen Raum, der von den verallgemeinerten Koordinaten  $q_i$  und kanonischen Impulsen  $p_i$  aufgespannt wird. Die Hamilton'schen Gleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(p_1, \dots, p_f, q_1, \dots, q_f, t)}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(p_1, \dots, p_f, q_1, \dots, q_f, t)}{\partial q_i}$$

bestimmen das Richtungsfeld der Bewegung im Phasenraum, so dass man jedem Punkt im Phasenraum eine Bewegungsrichtung (z.B. durch einen Pfeil, vergleiche Abb. 3.1) zuordnen. Die Bahnkurve  $(p_1(t), \dots, p_f(t), q_1(t), \dots, q_f(t))$  des Systems im Phasenraum folgt stets der lokalen Bewegungsrichtung und wird als *Trajektorie* bezeichnet. Da die Richtung der Trajektorien an jedem Ort vorgegeben ist, schneiden sich die Trajektorien nicht.

Das Verhalten ist analog zu einer strömenden Flüssigkeit, bei der ein lokales Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  existiert, dem die Flusslinien folgen.

Die Trajektorie hängt von den Anfangsbedingungen  $(p_1(t_0), \dots, p_f(t_0), q_1(t_0), \dots, q_f(t_0))$  ab und verschiedene Anfangsbedingungen geben auch verschiedene Trajektorien im Phasenraum. Nun stellt sich die Frage wie sich das Verhalten ändert, wenn man (leicht) unterschiedliche Anfangsbedingungen wählt. Hierzu betrachten wir ein Ensemble verschiedener Anfangsbedingungen, wie es in Abbildung 3.2 skizziert ist, und untersuchen das Langzeitverhalten. In der strömenden Flüssigkeit entspricht dies dem Verhalten eines Farbtropfens, der mit der Flüssigkeit strömt (Diffusion soll hierbei vernachlässigbar sein).

### 3.2.1 Die Poissonklammer

Physikalische Größen wie z.B. der Gesamtdrehimpuls lassen sich durch *Phasenraumfunktionen*  $f(p_1, \dots, p_f, q_1, \dots, q_f, t)$  darstellen, die von den Variablen des Phasenraumes und eventuell auch explizit von der Zeit abhängen. Ihre zeitliche Entwicklung längs einer Trajektorie ist gegeben durch

$$\frac{d}{dt}f = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \underbrace{\dot{p}_i}_{=-\frac{\partial H}{\partial q_i}} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \underbrace{\dot{q}_i}_{=\frac{\partial H}{\partial p_i}} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \{H, f\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (3.11)$$

mit der

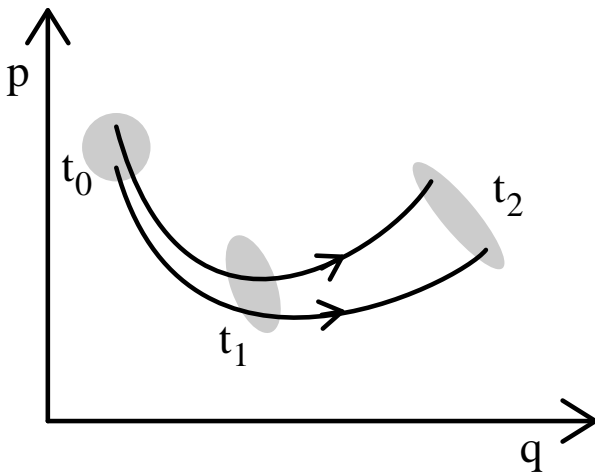


Abbildung 3.2: Skizze der zeitlichen Entwicklung eines Ensembles von Systemen die zu verschiedenen Zeitpunkten durch die grauen Bereiche im Phasenraum dargestellt sind. Dazu sind die Trajektorien zweier Systeme aus dem Ensemble eingezeichnet.

Poissonklammer

$$\{g, h\} = \sum_i \left( \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_i} \right)$$

zweier Phasenraumfunktionen  $g(p_1, \dots, p_f, q_1, \dots, q_f, t)$  und  $h(p_1, \dots, p_f, q_1, \dots, q_f, t)$ . Merkgel: Zuerst in alphabetischer Reihenfolge nach  $pq$  ableiten, dann mit Minuszeichen in umgekehrter Reihenfolge  $qp$ .

Es gilt:

$$\{g, g\} = 0, \quad \{f, g\} = -\{g, f\}, \quad \{f, g + h\} = \{f, g\} + \{f, h\}$$

Speziell gilt für die Phasenraumvariablen

$$\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0 \quad \text{und} \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij} \quad (3.12)$$

Damit finden wir:

Für die Phasenraumfunktion  $f(p_1, \dots, p_f, q_1, \dots, q_f)$  gilt längs einer Trajektorie  $p_1(t), \dots, p_f(t), q_1(t), \dots, q_f(t)$ :

- Die Zeitentwicklung lautet

$$\frac{d}{dt} f(p_1(t), \dots, p_f(t), q_1(t), \dots, q_f(t), t) = \{H, f\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

- Hängt  $f$  nicht explizit von der Zeit ab und gilt  $\{H, f\} = 0$ , so ist  $f(p_1(t), \dots, p_f(t), q_1(t), \dots, q_f(t)) = \text{const}$  und  $f$  ist eine Erhaltungsgröße.
- Speziell gilt: Die Hamiltonfunktion  $H$  ist eine Erhaltungsgröße, wenn sie nicht explizit von der Zeit abhängt.



### 3.2.2 Der Liouville'sche Satz

Wir definieren im Phasenraum die Vektoren

$$\underline{x}^H = \begin{pmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_f \\ q_1 \\ \dots \\ q_f \end{pmatrix} \quad \underline{v}^H = \begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \dots \\ \dot{p}_f \\ \dot{q}_1 \\ \dots \\ \dot{q}_f \end{pmatrix} \quad \underline{\nabla}^H = \begin{pmatrix} \partial/\partial p_1 \\ \dots \\ \partial/\partial p_f \\ \partial/\partial q_1 \\ \dots \\ \partial/\partial q_f \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$\underline{\nabla}^H \cdot \underline{v}^H = \sum_i \left( \frac{\partial}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) = \sum_i \left( \frac{\partial}{\partial p_i} \left( -\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) = 0$$

Damit verschwindet die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes im Phasenraum.

In der Hydrodynamik folgt für eine Flüssigkeit mit fester Dichte  $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 = \text{const}$  (man spricht von einer inkompressiblen Flüssigkeit) aus der Kontinuitätsgleichung

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t)}_{=0} + \underbrace{\text{div } \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}_{=\rho_0 \text{ div } \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)} = 0$$

gerade  $\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0$ . Demnach entspricht der Fluss im Phasenraum dem Fluss einer inkompressiblen Flüssigkeit.

Nun wollen wir die Dynamik eines Ensembles von gleichartigen Systemen untersuchen, die mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen starten. Hierzu definieren wir die Dichte im Phasenraum

$$\rho(p_1, \dots, p_f, q_1, \dots, q_f, t) = \frac{N}{\Delta p^f \Delta q^f}$$

über die Anzahl der Systeme, die sich zum Zeitpunkt  $t$  im Intervall  $\Delta p^f \Delta q^f$  um den Ort  $\underline{x}^H$  des Phasenraums befinden. Da sich die gesamte Anzahl der Systeme mit der Zeit nicht ändert gilt, die Kontinuitätsgleichung im Phasenraum

$$\frac{\partial \rho(\underline{x}^H, t)}{\partial t} + \underline{\nabla}^H \cdot (\rho(\underline{x}^H, t) \underline{v}^H(\underline{x}^H, t)) = 0$$

Mit

$$\underline{\nabla}^H \cdot (\rho \underline{v}^H) = \underline{v}^H \cdot \underline{\nabla}^H \rho + \rho \underbrace{\underline{\nabla}^H \cdot \underline{v}^H}_{=0} = \sum_i \left( \underbrace{\dot{p}_i}_{=-\frac{\partial H}{\partial q_i}} \frac{\partial}{\partial p_i} \rho + \underbrace{\dot{q}_i}_{=\frac{\partial H}{\partial p_i}} \frac{\partial}{\partial q_i} \rho \right) = \{H, \rho\}$$

erhalten wir folgende Differentialgleichung für die Dichte der Systeme im Phasenraum<sup>3</sup>

$$\frac{\partial \rho(p_1, \dots, p_f, q_1, \dots, q_f, t)}{\partial t} = -\{H, \rho\}. \quad (3.13)$$

<sup>3</sup>Beachte, dass im Gegensatz zu Gl. (3.11) diese Beziehung die *partielle* Zeitableitung betrifft und für die Phasenraumdichte  $\rho$  nicht aber für beliebige Phasenraumfunktionen gilt.

Bewegt man sich mit dem Ensemble so erhalten wir mit Gl. (3.11)

$$\frac{d}{dt}\rho(p_1(t), \dots, p_f(t), q_1(t), \dots, q_f(t), t) = \{H, \rho\} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Demnach gilt

Die Dichte  $\rho(p_1, \dots, p_f, q_1, \dots, q_f, t)$  der Ensembles im Phasenraum ist längs einer Trajektorie  $(p_1(t), \dots, p_f(t), q_1(t), \dots, q_f(t))$  konstant.

Betrachten wir nun ein Ensemble, das zum Anfangszeitpunkt  $t_0$  ein Teilvolumen  $V(t_0)$  (der Dimension  $\Delta p^f \Delta q^f$ ) des Phasenraumes mit konstanter Dichte  $\rho_0$  ausfüllt. Dann ist längs der Trajektorien  $\rho(p_1(t), \dots, p_f(t), q_1(t), \dots, q_f(t), t) = \rho_0$  während außerhalb des von den Trajektorien durchquerten Gebietes  $\rho(p_1, \dots, p_f, q_1, \dots, q_f, t) = 0$  gilt. Sei nun  $V(t)$  das Volumen im Phasenraum, das die Trajektorien zum Zeitpunkt  $t$  überdecken. Aus der Erhaltung der Anzahl der Systeme folgt  $N = \int d^f p d^f q \rho(p_1, \dots, p_f, q_1, \dots, q_f, t) = \rho_0 V(t) = \text{const.}$  Also gilt der

*Liouville'sche Satz:* Das Volumen, das das Ensemble im Phasenraum annimmt ist zeitlich konstant.

### 3.3 Kanonische Transformationen

Der Vollständigkeit halber soll hier ein kurzer Abriss zum Thema gegeben werden. Für eine weitergehende Darstellung wird auf den Theoriekurs der grundlagenorientierten Studienrichtung und die Literatur verwiesen.

Statt der Variablen  $p_1, \dots, p_f, q_1, \dots, q_f$  kann man das System auch durch andere Sätze von  $2f$  Variablen beschreiben. Diese erhält man durch eine (umkehrbare) Variablentransformation

$$P_i = P_i(p_1, \dots, p_f, q_1, \dots, q_f, t) \quad Q_i = Q_i(p_1, \dots, p_f, q_1, \dots, q_f, t) \quad \text{für } i = 1, f$$

Wenn es nun eine neue Hamiltonfunktion  $\tilde{H}(P_1, \dots, P_f, Q_1, \dots, Q_f, t)$  mit

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i} \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i}$$

gibt, so liegt eine *kanonische Transformation* vor. Dann gilt insbesondere

$$\begin{aligned} & \{f(p_1, \dots, p_f, q_1, \dots, q_f, t), g(p_1, \dots, p_f, q_1, \dots, q_f, t)\}_{pq} \\ &= \left\{ f\left(p_1(P, Q, t), \dots, q_f(P, Q, t), t\right), g\left(p_1(P, Q, t), \dots, q_f(P, Q, t), t\right) \right\}_{PQ} \end{aligned}$$

wobei in den Poissonklammern jeweils die Ableitungen nach den Variablen im angefügten Index ausgeführt werden. D.h. die Poissonklammern ergeben nach Variablentransformation denselben Wert (zum Beweis siehe z.B. Goldstein).

Solche kanonischen Transformationen lassen sich mit Hilfe einer beliebigen erzeugenden Funktion generieren, die von neuen und alten Koordinaten bzw. Impulsen abhängt. Ein Beispiel ist die erzeugende Funktion  $S(q_1, \dots, q_f, P_1, \dots, P_f, t)$  mit  $\det \partial^2 S / \partial q_i \partial P_j \neq 0$ .

Dann erhält man die kanonische Transformation in drei Schritten (für einen Beweis und weitere Möglichkeiten für erzeugende Funktionen siehe Scheck)

1. Löse  $Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}$  nach  $q_j = q_j(P_1, \dots, P_f, Q_1, \dots, Q_f, t)$  auf.
2. Bestimme  $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i(P_1, \dots, P_f, Q_1, \dots, Q_f, t)$
3. Setze

$$\tilde{H}(P_1, \dots, P_f, Q_1, \dots, Q_f, t) = H(p_1, \dots, p_f, q_1, \dots, q_f, t) + \frac{\partial S(q_1, \dots, q_f, P_1, \dots, P_f, t)}{\partial t}$$

wobei man die Variablen substituiert.

Ziel einer solchen Operation kann zum Beispiel sein, die Transformation so auszuführen, dass alle neuen Koordinaten  $Q_i$  zyklische Variablen sind. Dann ist nach Abschnitt 3.1.6 das Problem durch einfache Integration lösbar.

### 3.4 Elektromagnetische Felder

Wir betrachten ein freies Teilchen der Masse  $m$  und Ladung  $q$ , das sich im elektromagnetischen Feld bewegt. Seine Dynamik ist somit durch die Lorentzkraft

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{\text{Lorentz}} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) \quad (3.14)$$

gegeben. Wir wollen nun die Hamiltonfunktion für dieses Problem bestimmen. Hierzu unterscheiden wir zwei Fälle:

#### (a) $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \equiv 0$

Für  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \equiv 0$  ist das leicht möglich, da dann wegen  $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$  ein elektrisches Potential  $\phi(\mathbf{r}, t)$  existiert mit  $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ . Damit ist  $\mathbf{F} = -q\nabla \phi$  und die Kraft hat das mechanische Potential  $V(\mathbf{r}, t) = q\phi(\mathbf{r}, t)$ . In diesem Fall erhalten wir direkt die Lagrangefunktion

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = T - V = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - q\phi(\mathbf{r}, t)$$

und weiter

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}} \quad \text{sowie} \quad H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + q\phi(\mathbf{r}, t)$$

Das heißt, der kanonische Impuls ist der mechanische Impuls  $m\mathbf{v}$  des Teilchens.

#### (b) $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \neq 0$

In diesem Fall existiert für das Kraftfeld kein mechanisches Potential  $V(\mathbf{r}, t)$ , so dass wir die Lagrangefunktion nicht auf die übliche Weise  $L = T - V$  bestimmen können. Dennoch können wir eine Lagrangefunktion  $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$  so konstruieren, dass die Lagrange'schen Gleichungen die Dynamik (3.14) ergeben.

Hierzu betrachten wir die elektromagnetischen Potentiale  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\phi(\mathbf{r}, t)$ , die über

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{rot } \mathbf{A} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

die Felder bestimmen. Dann lautet Gl. (3.14) wenn wir  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$  und  $\mathbf{r}$  als unabhängige Variable betrachten:

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \underbrace{q \mathbf{v} \times \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A} \right)}_{=q \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - q (\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}) \mathbf{A}} - q \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - q \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} = q \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - q \frac{d}{dt} \mathbf{A}(\mathbf{r}(t), t) - q \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}}$$

und somit

$$\frac{d}{dt} (m \mathbf{v} + q \mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (q \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - q \phi)$$

Nun kann man die linke Seite mit  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}$  und die rechte Seite mit  $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}$  wenn man die

Lagrangefunktion eines freien Teilchens im elektromagnetische Feld

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{m \mathbf{v}^2}{2} + q \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - q \phi(\mathbf{r}, t)$$

definiert. Auf die übliche Art erhalten wir dann

Ein freies Teilchen hat im elektromagnetische Feld den kanonischen Impuls

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v} + q \mathbf{A}$$

und die Hamiltonfunktion

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m} [\mathbf{p} - q \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2 + q \phi(\mathbf{r}, t) \quad (3.15)$$

Beachte, dass nun der kanonische Impuls  $\mathbf{p}$  nicht gleich dem kinetischen Impuls  $m \mathbf{v}$  ist.

Die Wahl der elektromagnetischen Potentiale und somit auch die Hamiltonfunktion sind nicht eindeutig bestimmt (Stichwort Eichinvarianz). Die verdeutlicht das folgende Beispiel.

### 3.4.1 Beispiel: Teilchen im konstanten elektrischen Feld

Sei  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{E}_0$  und  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \equiv 0$ .

1. Lösung mit  $\mathbf{A} = 0$

Man kann  $\mathbf{A}_1(\mathbf{r}, t) = 0$  und  $\phi_1(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}$  wählen und erhält

$$\mathbf{p}_1 = m \mathbf{v} \quad \text{und} \quad H_1(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} - q \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}$$

Die Hamilton'schen Gleichungen liefern die Dynamik

$$\dot{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{E}_0 \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}_1}{m}$$

mit der Lösung

$$\mathbf{p}_1(t) = \mathbf{p}_0 + \mathbf{E}_0 t \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{p}_0}{m} t + \frac{1}{2m} \mathbf{E}_0 t^2$$

2. Lösung mit  $\phi = 0$ 

Wählt man stattdessen  $\mathbf{A}_2(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{E}_0 t$  und  $\phi_2(\mathbf{r}, t) = 0$ , so erhält man

$$\mathbf{p}_2 = m\mathbf{v} - q\mathbf{E}_0 t \quad \text{und} \quad H_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m}(\mathbf{p}_2 + q\mathbf{E}_0 t)^2$$

Nun ist  $\mathbf{r}$  eine zyklische Variable und wir erhalten

$$\dot{\mathbf{p}}_2 = 0 \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m}(\mathbf{p}_2 + q\mathbf{E}_0 t)$$

mit der Lösung

$$\mathbf{p}_2(t) = \mathbf{p}_0 \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{p}_0}{m}t + \frac{1}{2m}\mathbf{E}_0 t^2$$

Damit ist die Observable  $\mathbf{r}$  in beiden Fällen identisch, nicht aber der kanonische Impuls  $\mathbf{p}(t)$ , der somit nicht eichinvariant ist.

Bemerkung

Man kann den Übergang von den Variablen  $\mathbf{p}_1, \mathbf{r}_1$  auf  $\mathbf{p}_2, \mathbf{r}_2$  auch als kanonische Transformation mit der Erzeugenden  $S(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_2) = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{p}_2 + q\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}_1 t$  auffassen.

**3.4.2 Energiebilanz**

Es gilt:

Hängen die elektrodynamische Potentiale  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  und  $\phi(\mathbf{r})$  nicht explizit von der Zeit ab, dann ist

$$E_{\text{ges}} = \underbrace{\frac{m}{2}\mathbf{v}^2}_{= \frac{1}{2m}[\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r})]^2} + q\phi(\mathbf{r}) = H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \text{const}$$

eine Erhaltungsgröße

1. Beweis

Die Lorentzkraft ist durch

$$\mathbf{F} = \underbrace{q\mathbf{v} \times \mathbf{B}}_{=\mathbf{F}^{(a)}} - \nabla V(\mathbf{r})$$

mit  $V(\mathbf{r}) = q\phi(\mathbf{r})$  gegeben. Entsprechend zu Gl. (1.5) gilt

$$\frac{d}{dt}E_{\text{ges}} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}^{(a)} = 0$$

da  $\mathbf{F}^{(a)} \perp \mathbf{v}$  keine Arbeit am System leistet.

2. Beweis

Die Hamiltonfunktion hängt nicht explizit von der Zeit ab. Damit ist

$$\frac{d}{dt}H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

### 3.5 Übergang zur Quantenmechanik

Ein wesentlicher Nutzen der Hamilton'schen Formulierung der Mechanik ist der Übergang zur Quantenmechanik. Diesen erhält man durch folgendes Vorgehen:

- Ersetze die kanonischen Variablen  $p_i, q_i$  durch Operatoren  $\hat{p}_i, \hat{q}_i$  mit den Kommutator-Relationen

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = [\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0 \quad \text{und} \quad [\hat{p}_i, \hat{q}_j] = \frac{\hbar}{i} \delta_{ij}$$

Dies sind, bis auf den Faktor  $\hbar/i$ , gerade die Poisson-Klammern aus Gl. (3.12).

- Die Hamiltonfunktion  $H(p, q, t)$  geht in den Hamilton-Operator  $\hat{H}(\hat{p}, \hat{q}, t)$  über, indem man die Phasenraum-Variablen durch die entsprechenden Operatoren ersetzt.

Für ein freies Teilchen ohne Spin kann man den quantenmechanischen Zustand durch eine komplexe Wellenfunktion  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  beschreiben. Wir haben dann die Zuordnung  $\hat{\mathbf{r}} \rightarrow \mathbf{r}$  und  $\hat{\mathbf{p}} \rightarrow \hbar/i \nabla$ . Im elektromagnetischen Feld erhalten wir den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left[ \frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right]^2 + q\phi(\mathbf{r}, t) \quad (3.16)$$

# Kapitel 4

## Symmetrien und Erhaltungsgrößen

### 4.1 Symmetrietransformationen

Betrachte ein mechanisches System mit den Koordinaten  $q_1, \dots, q_f$  und der Lagrangefunktion  $L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$ . Nun soll eine Transformation  $\hat{h}$  mit  $q_i \rightarrow h_i(q_1, \dots, q_f)$  im Koordinatenraum durchgeführt werden. Dies könnte z.B. eine Drehung des Systems sein. Wir bestimmen nun die neue Funktion

$$\bar{L}(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) = L(h_1(q_1, \dots, q_f), \dots, h_f(q_1, \dots, q_f), \dot{h}_1(q_1, \dots, q_f), \dots, \dot{h}_f(q_1, \dots, q_f), t)$$

Falls nun  $\bar{L}(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) = L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$  gilt, nennt man  $\hat{h}$  eine *Symmetrietransformation* des Systems.

Als *kontinuierliche* Transformation bezeichnet man eine Transformation  $\hat{h}^\alpha$ , die so von einem reellen Parameter  $\alpha$  abhängt, dass die Bilder  $h_i^\alpha(q_1, \dots, q_f)$  stetige Funktionen in  $\alpha$  sind und wenn  $\hat{h}^\alpha$  für  $\alpha = 0$  die Identität  $h_i^0(q_1, \dots, q_f) = q_i$  ist.

#### Beispiel:

Wir betrachten einen zweidimensionalen harmonischen Oszillator

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

Die kontinuierliche Transformation  $\hat{T}^a$  mit  $T_x^a(x, y) = x + a$ ,  $T_y^a(x, y) = y$  ist eine Verschiebung in  $x$  Richtung um die Länge  $a$ . Es gilt

$$\bar{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2} \left( \left( \frac{d(x+a)}{dt} \right)^2 + \dot{y}^2 \right) - \frac{m\omega^2}{2} ((x+a)^2 + y^2) = L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) - m\omega^2 xa - \frac{m\omega^2}{2} a^2$$

und die Translation  $\hat{T}^a$  ist keine Symmetrietransformation.

Die kontinuierliche Transformation  $\hat{D}^\varphi$

$$\begin{pmatrix} D_x^\varphi(x, y) \\ D_y^\varphi(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ist eine Drehung des Systems. Es gilt

$$\begin{aligned}\bar{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) &= \frac{m}{2} [(\cos \varphi \dot{x} - \sin \varphi \dot{y})^2 + (\sin \varphi \dot{x} + \cos \varphi \dot{y})^2] \\ &\quad - \frac{m\omega^2}{2} [(\cos \varphi x - \sin \varphi y)^2 + (\sin \varphi x + \cos \varphi y)^2] = L(x, y, \dot{x}, \dot{y})\end{aligned}$$

und die Drehung ist eine Symmetrietransformation.

Die Spiegelung  $\hat{S}$  mit  $S_x(x, y) = x$  und  $S_x(x, y) = -y$  ist ebenfalls eine Symmetrietransformation des Systems aber keine kontinuierliche Transformation.

## 4.2 Noether'sches Theorem

Sei  $\hat{h}^\alpha$  eine kontinuierliche Symmetrietransformation eines Systems mit der zeitunabhängigen Lagrangefunktion  $L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$ . Dann ist

$$I(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{d\alpha} h_i^\alpha(q_1, \dots, q_f)|_{\alpha=0} \quad (4.1)$$

eine Erhaltungsgröße der Bewegung. (Emmy Noether, 1918)

**Beweis:**

$$\begin{aligned}& \frac{d}{dt} I(q_1(t), \dots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_f(t)) \\ &= \sum_i \underbrace{\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right]}_{= \frac{\partial L}{\partial q_i}} \frac{d}{d\alpha} h_i^\alpha(q_1, \dots, q_f)|_{\alpha=0} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{d}{d\alpha} h_i^\alpha(q_1, \dots, q_f)|_{\alpha=0}}_{= \frac{d}{d\alpha} \dot{h}_i^\alpha(q_1, \dots, q_f)|_{\alpha=0}} \\ &= \frac{d}{d\alpha} L(h_1^\alpha(q_1, \dots, q_f), \dots, h_f^\alpha(q_1, \dots, q_f), \dot{h}_1^\alpha(q_1, \dots, q_f), \dots, \dot{h}_f^\alpha(q_1, \dots, q_f))|_{\alpha=0} = 0\end{aligned}$$

da  $L$  sich bei der Symmetrietransformation  $\hat{h}^\alpha$  eine  $\alpha$ -Abhängigkeit zeigt.

**Beispiele:**

**Rotationssymmetrisches System:** Betrachte ein Teilchen im Potential  $V(\mathbf{r})$ , das um die  $z$ -Achse rotationssymmetrisch ist. Die Symmetrietransformation ist

$$\mathbf{h}^\varphi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$\frac{d}{d\varphi} \mathbf{h}^\varphi(\mathbf{r})|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}$$

Damit haben wir als Erhaltungsgröße

$$I(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = m \dot{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) = \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{r} \times m \dot{\mathbf{r}}) = L_z$$

die  $z$ -Komponente des Drehimpulses.



**Translationssymmetrisches System:** Betrachte ein System aus  $N$  Teilchen mit den Massen  $m_n$  und dem Wechselwirkungspotential  $V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ , welches bei einer Translation aller Teilchen um die Strecke  $a$  in  $x$ -Richtung

$$\mathbf{h}_n^a(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \mathbf{r}_n + a\mathbf{e}_x$$

invariant sein soll. D.h.  $V(\mathbf{r}_1 + a\mathbf{e}_x, \dots, \mathbf{r}_N + a\mathbf{e}_x) = V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ . Dies ist z.B. der Fall, wenn die Zwei-Teilchen-Kräfte nur von den Abstandsdifferenzen der Teilchen abhängen. Damit haben wir als Erhaltungsgröße

$$I(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N) = \sum_n m_n \dot{\mathbf{r}}_n \cdot \mathbf{e}_x = P_x^{\text{ges}}$$

die  $x$ -Komponente des Gesamtimpulses.

Erhaltungsgrößen hängen mit Symmetrien des Systems zusammen:  
 Drehimpulserhaltung  $\Leftrightarrow$  Rotationssymmetrie  
 Impulserhaltung  $\Leftrightarrow$  Translationsinvarianz

### 4.3 Infinitesimale kanonische Transformationen\*

Wir wollen nun einen Zusammenhang zu den allgemeinen Variablentransformationen der Hamilton'schen Dynamik herstellen. Hierzu betrachten wir eine kontinuierliche kanonische Transformation  $P(p, q, \alpha), Q(p, q, \alpha)$  mit dem Parameter  $\alpha$ , die gemäß Abschnitt 3.3 über eine erzeugende Funktion  $S^\alpha(q_1, \dots, q_f, P_1, \dots, P_f, t)$  vermittelt werden soll, wobei  $S^0(q_1, \dots, q_f, P_1, \dots, P_f, t) = \sum_i q_i P_i$ . Für  $\alpha = 0$  gilt dann

$$Q_j = \frac{\partial S^0}{\partial P_j} = q_j \quad \text{und} \quad p_j = \frac{\partial S^0}{\partial q_j} = P_j$$

und die Transformation ist für  $\alpha = 0$ , wie gefordert, die Identität.

Nun betrachten wir im Grenzfall kleiner  $\alpha$  *infinitesimale Transformationen*, wobei wir die Änderungen der Variablen nur in niedrigster Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha)$  berücksichtigen. Wir setzen

$$S^\alpha(q_1, \dots, q_f, P_1, \dots, P_f, t) = \sum_i q_i P_i + \alpha \sigma(P_1, \dots, P_f, q_1, \dots, q_f, t) + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

Man nennt  $\sigma(p, q, t)$  die *Erzeugende der infinitesimalen Transformation*<sup>1</sup> wobei wir die Abkürzung  $q = (q_1, \dots, q_f)$  verwenden.

$$Q_j = \frac{\partial S^\alpha}{\partial P_j} = q_j + \alpha \frac{\partial \sigma(P, q, t)}{\partial P_j} + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad p_j = \frac{\partial S^\alpha}{\partial q_j} = P_j + \alpha \frac{\partial \sigma(P, q, t)}{\partial q_j} + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

<sup>1</sup>In der Regel bilden die kontinuierlichen Transformationen  $\hat{T}^\alpha = p, q \rightarrow P(p, q, \alpha), Q(p, q, \alpha)$  eine Gruppe. Gilt zusätzlich  $\hat{T}^\beta \circ \hat{T}^\alpha = \hat{T}^{g(\beta, \alpha)}$  mit einer stetig-differenzierbaren Funktion  $g(\beta, \alpha)$  [z.B.  $g(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$  für die Drehung um eine Achse] so nennt man die Gruppe eine Lie'sche Gruppe. Dann kann man jede endliche Transformation aus einer Sequenz infinitesimaler Transformationen aufbauen, die somit die gesamte Information über alle Transformationen enthalten.

Somit gilt in Ordnung  $\alpha$

$$\delta q_j = Q_j - q_j = \alpha \frac{\partial \sigma(p, q, t)}{\partial p_j} + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad \delta p_j = P_j - p_j = -\alpha \frac{\partial \sigma(p, q, t)}{\partial q_j} + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (4.2)$$

wobei wir in der Funktion  $\sigma(P, q, t)$  die Variable  $P_j$  durch  $p_j$  ersetzen konnten, da die Differenz einen Term höherer Ordnung in  $\alpha$  liefert.

Bei der kanonischen Transformation lautet die Hamiltonfunktion für die transformierten Koordinaten:

$$\tilde{H}(P, Q, t) = H(p(P, Q, t), q(P, Q, t), t) + \frac{\partial S^\alpha(q(P, Q), P, t)}{\partial t}$$

und der Unterschied zwischen den Funktionen  $\tilde{H}$  und  $H$  ist durch

$$\begin{aligned} \delta H(p, q, t) &= \tilde{H}(p, q, t) - H(p, q, t) = H(p - \delta p, q - \delta q, t) - H(p, q, t) + \frac{\partial S^\alpha(q - \delta q, p, t)}{\partial t} \\ &= - \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right) + \alpha \frac{\partial \sigma(q - \delta q, p, t)}{\partial t} \\ &= \alpha \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial \sigma(p, q, t)}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial \sigma(p, q, t)}{\partial p_j} \right) + \alpha \frac{\partial \sigma(q, p, t)}{\partial t} + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &= \alpha \left( \{H, \sigma\} + \frac{\partial \sigma(q, p, t)}{\partial t} \right) = \alpha \frac{d}{dt} \sigma(q, p, t) \end{aligned}$$

gegeben. Nun bedeutet  $\delta H(p, q, t) = 0$ , dass sich die Hamiltonfunktion bei der kanonischen Transformation nicht ändert und die Transformation somit eine Symmetrietransformation des Systems ist. Auf der anderen Seite folgt aus  $d\sigma/dt = 0$ , dass die Funktion  $\sigma(p, q, t)$  eine Erhaltungsgröße ist.

Die Erzeugende  $\sigma(p, q, t)$  einer infinitesimalen Symmetrietransformation des Systems ist eine Erhaltungsgröße.

### Beispiele:

Wir wissen, dass die *Hamiltonfunktion*  $H(p, q)$  eine Erhaltungsgröße ist, wenn sie nicht explizit von der Zeit abhängt. Dann entspricht sie gerade der Gesamtenergie. Nun wollen wir untersuchen, mit welcher Symmetrietransformation sie zusammen hängt. Hierzu setzen wir  $\sigma(p, q) = H(p, q)$  und erhalten mit Gl. (4.2) in niedrigster Ordnung

$$\delta q_j = \alpha \frac{\partial H(p, q)}{\partial p_j} = \alpha \dot{q}_j = q_j(t + \alpha) - q_j(t) \quad \text{und} \quad \delta p_j = -\alpha \frac{\partial H(p, q)}{\partial q_j} = -\alpha \dot{p}_j = p_j(t + \alpha) - p_j(t)$$

Damit verschiebt die kanonische Transformation, die von der Hamiltonfunktion erzeugt wird, das System in der Zeit.

Für ein System aus  $N$  freien Teilchen in kartesischen Koordinaten mit Erhaltung des Impulses  $\sum_i \mathbf{p}_i = \mathbf{P}_{ges} = const$  kann man die *gleichmäßige Schwerpunktsbewegung* in der Form  $\sum_i (m_i \mathbf{r}_i - \mathbf{p}_i t) = const$  schreiben, siehe Abschnitt 1.3.2. Nun untersuchen wir die Symmetrietransformation, die von  $\sigma = \mathbf{u} \cdot \sum_i (m_i \mathbf{r}_i - \mathbf{p}_i t)$ , dies entspricht der gleichmäßigen Schwerpunktsbewegung in Richtung von  $\mathbf{u}$ , erzeugt wird. Die erzeugende Funktion lautet

$$S(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{r}, t) = \sum_i \mathbf{r}_i \tilde{\mathbf{p}}_i + \alpha \mathbf{u} \cdot \sum_i (m_i \mathbf{r}_i - \tilde{\mathbf{p}}_i t)$$

(die neuen Variablen sind hier durch eine Tilde gekennzeichnet) und wir finden

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{r}}_i &= \frac{\partial S^\alpha}{\partial \tilde{\mathbf{p}}_i} = \mathbf{r}_i - \alpha \mathbf{u} t \\ \mathbf{p}_i &= \frac{\partial S^\alpha}{\partial \mathbf{r}_i} = \tilde{\mathbf{p}}_i + \alpha m_i \mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{p}}_i = \mathbf{p}_i - m_i \mathbf{u}\end{aligned}$$

Dies entspricht also einer Galileitransformation der Koordinaten mit der Relativgeschwindigkeit  $\mathbf{u}$ . Die neue Hamiltonfunktion lautet

$$\begin{aligned}\tilde{H}(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{r}}, t) &= H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) + \frac{\partial S^\alpha}{\partial t} = \sum_i \frac{1}{2m_i} (\tilde{\mathbf{p}}_i + \alpha m_i \mathbf{u})^2 + V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) - \alpha \sum_i \tilde{\mathbf{p}}_i \mathbf{u} \\ &= \sum_i \frac{1}{2m_i} \tilde{\mathbf{p}}_i^2 + V(\tilde{\mathbf{r}}_1 + \alpha \mathbf{u} t, \dots, \tilde{\mathbf{r}}_N + \alpha \mathbf{u} t) + \alpha^2 \sum_i \frac{m_i}{2} \mathbf{u}^2\end{aligned}$$

Wenn nun  $V(\tilde{\mathbf{r}}_1 + \alpha \mathbf{u} t, \dots, \tilde{\mathbf{r}}_N + \alpha \mathbf{u} t) = V(\tilde{\mathbf{r}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{r}}_N)$  gilt [(z.B. für innere Zweiteilchenkräfte der Form (1.1)], so ist die Hamiltonfunktion (bis auf eine triviale Konstante der Ordnung  $\alpha^2$ ) invariant und die kanonische Transformation ist eine Symmetrietransformation. Somit ist die Galileitransformation in diesem Fall eine Symmetrietransformation.

Erhaltungsgrößen hängen mit Symmetrien des Systems zusammen:
Energieerhaltung $\Leftrightarrow$ Invarianz des Systems bezüglich einer Zeitverschiebung
Schwerpunktsatz $\Leftrightarrow$ Invarianz bezüglich Galileitransformation

# Kapitel 5

## Der starre Körper

### 5.1 Bewegung des starren Körpers

Unter einem starren Körper versteht man eine Ansammlung von Massenpunkten  $\mathbf{r}_i$  mit festen Relativabständen  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j = d_{ij}$ . Diese reduzieren das System auf 6 Freiheitsgrade:

- Ein vorgegebener Punkt  $P_0$  des Körpers kann an einem beliebigen Ort  $\mathbf{r}_0(t)$  im dreidimensionalen Ortraum liegen. Dies sind 3 *Freiheitsgrade der Translation*.
- Der Körper kann beliebig um den Punkt  $P_0$  gedreht sein. Definiert man eine Ausgangslage, so kann man dies als eine Drehung  $\hat{D}(t)$  beschreiben, die eine lineare orthogonale Abbildung des Vektorraumes auf sich selber ist. Die Drehung ist durch die Angabe einer Drehachse, die z.B. durch einen Polar- und einen Azimutwinkel definiert ist, und eines Drehwinkels eindeutig festgelegt. Dies ergibt 3 *Rotationsfreiheitsgrade*<sup>1</sup>.

Zusammen erhält man

Der starre Körper hat 6 *Freiheitsgrade*; 3 der Translation und 3 der Rotation.

#### 5.1.1 Vektorielle Beschreibung

Zur Beschreibung des starren Körpers zeichnen wir einen Punkt  $P_0$  des Körpers mit dem Ortsvektor  $\mathbf{r}_0(t)$  aus. Die anderen Punkte  $P_i$  werden dann gemäß

$$\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{s}_i(t)$$

über den Relativvektor  $\mathbf{s}_i(t) = \overrightarrow{P_0 P_i}$  definiert. Wegen der festen Relativabstände ist  $|\mathbf{s}_i(t)| = \text{const}$  und es gilt

$$\mathbf{s}_i(t) = \hat{D}(t)\mathbf{s}_i^0$$

mit dem zeitabhängigen orthonormalen Drehoperator  $\hat{D}(t)$ , der für alle Punkte  $i$  identisch ist.

Zur Beschreibung des starren Körpers ist es zweckmäßig, zwei verschiedene Basen des Vektorraumes zu verwenden. Dies sind die

<sup>1</sup>Eine Alternative ist die Angabe der drei Euler'schen Winkel.

**Inertialbasis**  $\mathcal{I} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , in der die Newton'schen Gesetze einfach formulierbar sind.  $\mathcal{I}$  wird als positiv orientierte Orthonormalbasis (PON-Basis) gewählt.

**körperfeste Basis**  $\mathcal{K} = \{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ , die sich gemäß  $\mathbf{n}_i(t) = \hat{D}(t)\mathbf{e}_i$  mit dem Körper dreht. Wegen der Eigenschaften der Abbildung  $\hat{D}(t)$  (Orthonormalität und Beibehaltung der Orientierung) ist  $\mathcal{K}$  zu jedem Zeitpunkt eine PON-Basis.

Im Folgenden werden beide Basissysteme verwendet. Hierbei ist es zweckmäßig genau zwischen den Vektoren und ihren Komponenten bezüglich einer Basis (einer Spalte) zu unterscheiden (das tun Physiker aus Praktikabilitätsgründen selten ...). Deswegen wird die im Anhang A dargestellte Notation verwendet, wir schreiben explizit  $S(\mathcal{B}, \mathbf{r})$  für die Spalte der Komponenten des Vektors  $\mathbf{r}$  bezüglich der Basis  $\mathcal{B}$ .

Da  $\mathbf{n}_i(t) = \hat{D}(t)\mathbf{e}_i$  folgt durch Vergleich der Gln. (A.3) und (A.8):

$$M(\mathcal{I}, \mathcal{K}) = M(\mathcal{I}, D(t), \mathcal{I})$$

Damit folgt für den Relativvektor  $\mathbf{s}_i(t)$

$$S(\mathcal{K}, \mathbf{s}_i(t)) = S(\mathcal{K}, D(t)\mathbf{s}_i^0) = M(\mathcal{K}, \mathcal{I})S(\mathcal{I}, D(t)\mathbf{s}_i^0) = M(\mathcal{K}, \mathcal{I}) \underbrace{M(\mathcal{I}, D(t), \mathcal{I})}_{=M(\mathcal{I}, \mathcal{K})} S(\mathcal{I}, \mathbf{s}_i^0) = S(\mathcal{I}, \mathbf{s}_i^0)$$

Die Komponenten  $S(\mathcal{K}, \mathbf{s}_i(t))$  des Relativvektors  $\mathbf{s}_i(t)$  bezüglich der körperfesten Basis sind konstant.

Dies liegt daran, dass die körperfeste Basis mit den Relativvektoren rotiert.

### 5.1.2 Die Winkelgeschwindigkeit

Für die Relativvektoren gilt:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{s}(t) = \frac{d}{dt}D(t)\mathbf{s}_i^0 = \dot{D}(t)D^{-1}(t)\mathbf{s}_i(t) = \Omega(t)\mathbf{s}_i(t)$$

**Nun gilt:**  $M(\mathcal{I}, \Omega(t), \mathcal{I})^{tr} = -M(\mathcal{I}, \Omega(t), \mathcal{I})$

**Beweis:**

$$0 = \frac{d}{dt}(D(t)D^{-1}(t)) = \dot{D}(t)D^{-1}(t) + D(t)\frac{d}{dt}D^{-1}(t)$$

In der zeitunabhängigen Inertialbasis  $\mathcal{I}$  gilt:  $M(\mathcal{I}, \dot{D}(t), \mathcal{I}) = \frac{d}{dt}M(\mathcal{I}, D(t), \mathcal{I})$ . und  $M(\mathcal{I}, D^{-1}(t), \mathcal{I}) = M(\mathcal{I}, D(t), \mathcal{I})^{tr}$  wegen Gl. (A.5). Damit erhalten wir

$$0 = M(\mathcal{I}, \Omega(t), \mathcal{I}) + \underbrace{M(\mathbf{I}, D(t), \mathbf{I})\frac{d}{dt}M(\mathbf{I}, D(t), \mathbf{I})^{tr}}_{=M(\mathcal{I}, \Omega(t), \mathcal{I})^{tr}}$$

womit die Behauptung bewiesen ist.  $\square$

Damit kann man

$$M(\mathcal{I}, \Omega(t), \mathcal{I}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \omega_i \in \mathbb{R}$$

schreiben. Wir definieren nun den Vektor  $\boldsymbol{\omega}(t)$  der *momentanen Winkelgeschwindigkeit* über

$$S(\mathcal{I}, \boldsymbol{\omega}(t)) = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

und erhalten wegen Gl. (A.6) für beliebige Vektoren  $\mathbf{a}$

$$M(\mathcal{I}, \Omega(t), \mathcal{I})S(\mathcal{I}, \mathbf{a}) = S(\mathcal{I}, \boldsymbol{\omega}(t)) \times S(\mathcal{I}, \mathbf{a})$$

Da  $\mathcal{I}$  eine PON-Basis ist, folgt:  $\Omega(t)\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{a}$ . Insbesondere erhalten wir:

Für die Relativvektoren des starren Körpers gilt:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{s}(t) = \dot{D}(t)[D(t)]^{-1}\mathbf{s}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{s}(t) \quad \text{und insbesondere} \quad \frac{d}{dt}\mathbf{n}_i(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{n}_i(t) \quad (5.1)$$

wobei  $\boldsymbol{\omega}(t)$  der Vektor der momentanen Winkelgeschwindigkeit ist. Beachte, dass die Beziehung für die Vektoren gilt und somit unabhängig von der Wahl der Basis ist.

### 5.1.3 Zeitabhängigkeit beliebiger Vektoren

Wir wollen nun die zeitliche Änderung des Vektors  $\mathbf{a}$  im körperfesten rotierenden Bezugssystem  $\mathcal{K}$  darstellen. D.h. wir suchen

$S(\mathcal{K}, \dot{\mathbf{a}})$ . Hierzu betrachten wir

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{d}{dt} [a^i(t)\mathbf{n}_i(t)] = \dot{a}^i \mathbf{n}_i + a^i \dot{\mathbf{n}}_i = \dot{a}^i \mathbf{n}_i + a^i \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{n}_i = \dot{a}^i \mathbf{n}_i + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{a}$$

und erhalten

In der körperfesten Basis gilt:

$$S(\mathcal{K}, \dot{\mathbf{a}}) = \frac{d}{dt}S(\mathcal{K}, \mathbf{a}) + S(\mathcal{K}, \boldsymbol{\omega}(t)) \times S(\mathcal{K}, \mathbf{a}) \quad (5.2)$$

In der Literatur bezeichnet man häufig  $S(\mathcal{K}, \mathbf{a})$  durch  $\mathbf{a}'$ . Hierbei wird aber oft nicht hinreichend klar, dass es sich bei  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{a}'$  um denselben Vektor handelt, der lediglich in verschiedenen Basen dargestellt wird. Deswegen ziehe ich es in diesem Kapitel vor, streng zwischen der Spalte  $S(\mathcal{B}, \mathbf{a})$  und dem Vektor  $\mathbf{a}$  zu trennen.

## 5.2 Der Trägheitstensor

### 5.2.1 Kinetische Energie des starren Körpers

Nach dem vorangegangenen Abschnitt gilt  $\dot{\mathbf{r}}_i(t) = \dot{\mathbf{r}}_0(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{s}_i(t)$ . Damit folgt für die gesamte kinetische Energie des starren Körpers

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\mathbf{r}}_i)^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_i m_i (\dot{\mathbf{r}}_0)^2}_{=M} + \dot{\mathbf{r}}_0(t) \cdot \left( \boldsymbol{\omega}(t) \times \sum_i m_i \mathbf{s}_i(t) \right) + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{s}_i(t))^2}_{=E_{\text{rot}}}$$

wobei  $M$  die Gesamtmasse ist. Der mittlere Term verschwindet in zwei verschiedenen wichtigen Fällen: (i) Wenn  $\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{R}(t) = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i$  der Schwerpunkt des starren Körpers ist, so folgt  $\sum_i m_i \mathbf{s}_i = 0$ . (ii) Der Punkt  $\mathcal{P}_0$  liegt im Ursprung fest (dies kann z.B. der Aufsatzpunkt eines Kreisels sein), d.h.  $\mathbf{r}_0(t) \equiv 0$ .

Mit

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}_i) = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{s}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}_i) = \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{s}_i^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{s}_i)^2$$

erhalten wir in einer beliebigen ON-Basis  $\mathcal{B}$

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}_i)^2 = [S(\mathcal{B}, \boldsymbol{\omega})^{tr} S(\mathcal{B}, \boldsymbol{\omega})] [S(\mathcal{B}, \mathbf{s}_i)^{tr} S(\mathcal{B}, \mathbf{s}_i)] - [S(\mathcal{B}, \boldsymbol{\omega})^{tr} S(\mathcal{B}, \mathbf{s}_i)] [S(\mathcal{B}, \mathbf{s}_i)^{tr} S(\mathcal{B}, \boldsymbol{\omega})]$$

und erhalten:

Ist der ausgezeichnete Punkt  $P_0$  des Körpers entweder der Schwerpunkt oder liegt er fest im Ursprung, so lautet die kinetische Energie des starren Körpers

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_0^2 + \frac{1}{2} [S(\mathcal{B}, \boldsymbol{\omega}(t))]^{tr} M(\mathcal{B}, E_{\text{rot}}, \mathcal{B}) S(\mathcal{B}, \boldsymbol{\omega}(t)) \quad (5.3)$$

Dabei ist  $M(\mathcal{B}, E_{\text{rot}}, \mathcal{B})$  die Matrix einer Bilinearform  $E_{\text{rot}}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})$ , die den Rotationsanteil der kinetischen Energie beschreibt.

Bezüglich einer ON-Basis  $\mathcal{B}^{ON}$  nimmt sie die Form

$$\underline{\underline{J}} = M(\mathcal{B}^{ON}, E_{\text{rot}}, \mathcal{B}^{ON}) = \sum_i m_i \left\{ S(\mathcal{B}^{ON}, \mathbf{s}_i)^2 \underline{\underline{1}} - S(\mathcal{B}^{ON}, \mathbf{s}_i) [S(\mathcal{B}^{ON}, \mathbf{s}_i)]^{tr} \right\} \quad (5.4)$$

die man als *Trägheitstensor* bezeichnet. Wählt man  $\mathcal{B} = \mathcal{K}$  als körperfeste Basis, so ist  $\underline{\underline{J}}$  zeitlich konstant.

#### Bemerkungen:

$M(\mathcal{B}, E_{\text{rot}}, \mathcal{B})$  ist eine symmetrische Matrix und transformiert sich gemäß

$$M(\tilde{\mathcal{B}}, E_{\text{rot}}, \tilde{\mathcal{B}}) = M(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})^\dagger M(\mathcal{B}, E_{\text{rot}}, \mathcal{B}) M(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})$$

In Komponenten-Schreibweise mit  $S(\mathcal{B}^{ON}, \mathbf{s}_i) = (s_i^1, s_i^2, s_i^3)^{tr}$  gilt:

$$J_{kl} = \sum_i m_i \left\{ \sum_{j=1}^3 (s_i^j)^2 \delta_{kl} - s_i^k s_i^l \right\}$$

Für kontinuierliche Massenverteilungen mit der Massendichte  $\rho(\mathbf{s})$  folgt entsprechend:

$$J_{kl} = \int d^3s \rho(\mathbf{s}) \left\{ \sum_j (s^j)^2 \delta_{kl} - s^k s^l \right\}$$

### Beispiel:

Für einen Quader  $-a < x < a$ ,  $-b < y < b$ ,  $-c < z < c$  (wir haben hier  $s^1 = x$ ,  $s^2 = y$ ,  $s^3 = z$  gesetzt) mit homogener Massendichte  $\rho$  folgt

$$J_{xx} = \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b dy \int_{-c}^c dz \rho \{x^2 + y^2 + z^2 - x^2\} = \frac{8}{3} abc \rho (b^2 + c^2) = \frac{M}{3} (b^2 + c^2)$$

$$J_{yy} = \frac{M}{3} (a^2 + c^2) \quad J_{zz} = \frac{M}{3} (a^2 + b^2) \quad J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$$

Die Diagonalelemente sind also in Richtung der längsten Achse am kleinsten.

## 5.2.2 Hauptachsen

Da  $M(\mathcal{K}, E_{\text{rot}}, \mathcal{K})$  eine symmetrische Matrix ist, gibt es ein orthonormales System aus Eigenspalten  $S(\mathcal{K}, \mathbf{n}_i^0)$  mit reellen Eigenwerten  $J_i$ . Die zugehörigen Vektoren  $\mathbf{n}_i^0$ , die man als *Hauptachsen des starren Körpers* bezeichnet, bilden ein ausgezeichnetes körperfestes Basissystem  $\mathcal{K}^{HA}$ . Dann ist  $M(\mathcal{K}^{HA}, E_{\text{rot}}, \mathcal{K}^{HA})$  eine diagonale Matrix, mit den Diagonalelementen  $J_1, J_2, J_3$  (vergleiche Abschnitt A.2).

## 5.2.3 Satz von Steiner

Der Trägheitstensor hängt von der Wahl von  $\mathbf{r}_0$  ab. Kennt man den Trägheitstensor  $\underline{J}$  für die Wahl  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{R}$ , so lautet der Trägheitstensor  $\underline{\tilde{J}}$  für eine andere Wahl von  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{R} + \mathbf{a}$ :

$$\tilde{J}_{kl} = J_{kl} + M [(a^k)^2 \delta_{kl} - a^k a^l]$$

Zum Beweis setzen wir  $\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{s}_i = \mathbf{r}_0 + \tilde{\mathbf{s}}_i$ , d.h.  $\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{s} - \mathbf{a}$

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{kl} &= \sum_i m_i \left\{ \sum_j (\tilde{s}_i^j)^2 \delta_{kl} - \tilde{s}_i^k \tilde{s}_i^l \right\} = \sum_i m_i \left\{ \sum_j (s_i^j - a^j)^2 \delta_{kl} - (s_i^k - a^k)(s_i^l - a^l) \right\} \\ &= J_{kl} + \sum_i m_i \left\{ -2 \sum_j s_i^j a^j \delta_{kl} + (a^k s_i^l + s_i^k a^l) + \sum_j (a^j)^2 \delta_{kl} - a^k a^l \right\} \end{aligned}$$

Da im Schwerpunktsystem  $\sum_i m_i \mathbf{s}_i = 0$  gilt, folgt die Behauptung.

## 5.2.4 Der Drehimpuls des starren Körpers

Mit  $\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{s}_i(t)$  und  $\dot{\mathbf{r}}_i(t) = \dot{\mathbf{r}}_0(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{s}_i(t)$  folgt für den Drehimpuls des starren Körpers:

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i m_i [\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{r}_0 \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}_i) + \mathbf{s}_i \times \dot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{s}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}_i)]$$



Falls nun wieder der Punkt  $P_0(t)$  entweder der Schwerpunkt ist oder fest im Ursprung liegt, fallen die beiden mittleren Terme weg und wir erhalten:

$$\mathbf{L} = M\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{r}}_0 + \sum_i m_i [\boldsymbol{\omega} \mathbf{s}_i^2 - \mathbf{s}_i(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{s}_i)] = \mathbf{L}_0 + \mathbf{L}_{\text{rot}}(\boldsymbol{\omega})$$

Der Rotationsanteil ist eine lineare Abbildung im Vektorraum. Verwendet man eine ON-Basis  $\mathcal{B}^{ON}$  (wie z.B.  $\mathcal{K}$  oder  $\mathcal{I}$ ), so kann man die Abbildung in der Form:

$$M(\mathcal{B}^{ON}, \mathbf{L}_{\text{rot}}) = \sum_i m_i [S(\mathcal{B}^{ON}, \mathbf{s}_i)^2 \underline{\underline{1}} - S(\mathcal{B}^{ON}, \mathbf{s}_i)(\mathcal{B}^{ON}, \mathbf{s}_i)^{tr}] S(\mathcal{B}^{ON}, \boldsymbol{\omega})$$

schreiben. Wir erhalten:

Ist der ausgezeichnete Punkt  $P_0$  des Körpers entweder der Schwerpunkt oder liegt er fest im Ursprung, so lautet der Drehimpuls des des starren Körpers

$$\mathbf{L} = M\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{L}_{\text{rot}}(\boldsymbol{\omega}) \quad (5.5)$$

wobei der Rotationsanteil eine lineare Abbildung in  $\boldsymbol{\omega}$  ist, die in Matrixschreibweise

$$S(\mathcal{B}, \mathbf{L}_{\text{rot}}) = M(\mathcal{B}, \mathbf{L}_{\text{rot}}, \mathcal{B}) S(\mathcal{B}, \boldsymbol{\omega}) \quad (5.6)$$

lautet. Bezüglich einer ON-Basis  $\mathcal{B}^{ON}$  ist

$$\underline{\underline{J}} = M(\mathcal{B}^{ON}, \mathbf{L}_{\text{rot}}, \mathcal{B}^{ON}) = \sum_i m_i \{ S(\mathcal{B}^{ON}, \mathbf{s}_i)^2 \underline{\underline{1}} - S(\mathcal{B}^{ON}, \mathbf{s}_i) [S(\mathcal{B}^{ON}, \mathbf{s}_i)]^{tr} \} \quad (5.7)$$

der Trägheitstensor aus Gl. (5.4).

Man beachte, dass das Transformationsverhalten der Matrix der linearen Abbildung nach Gl. (A.9)  $M(\tilde{\mathcal{B}}, \mathbf{L}_{\text{rot}}, \tilde{\mathcal{B}}) = M(\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}) M(\mathcal{B}, \mathbf{L}_{\text{rot}}, \mathcal{B}) M(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})$  lautet. Nur für ON-Basen  $\tilde{\mathcal{B}}^{ON}, \mathcal{B}^{ON}$  transformieren sich  $M(\mathcal{B}, \mathbf{L}_{\text{rot}}, \mathcal{B})$  und  $M(\mathcal{B}, \mathbf{L}_{\text{rot}}, \mathcal{B})$  wegen Gl. (A.11) gleich und nehmen jeweils die Form des Trägheitstensors an.

### 5.2.5 Drehimpulsbilanz und Euler'sche Gleichungen

Nach Gl. (1.4) lautet die Drehimpulsbilanz, wenn die inneren Zwangskräfte Zentralkräfte sind:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}(t) = \mathbf{D}_{\text{ges}}(t) = \mathbf{r}_0 \times \left[ \sum_i \mathbf{F}_i^{(a)}(t) \right] + \sum_i \mathbf{s}_i \times \mathbf{F}_i^{(a)}(t)$$

Nun gilt

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_0(t) = M\mathbf{r}_0 \times \ddot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{r}_0 \times \left[ \sum_i \mathbf{F}_i^{(a)}(t) \right]$$

wenn  $\mathbf{r}_0(t) \equiv 0$  oder  $\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{R}(t)$  ist, vergleiche die Schwerpunktbewegung (1.3). Daraus folgt in beiden Fällen (und auch allgemein, wenn man die anderen Terme berücksichtigt)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_{\text{rot}}(t) = \sum_i \mathbf{s}_i \times \mathbf{F}_i^{(a)}(t) = \mathbf{N}(t) \quad (5.8)$$

Diese Gleichung lautet im körperfesten Hauptachsensystem

$$S(\mathcal{K}^{HA}, \dot{\mathbf{L}}_{\text{rot}}) = \frac{d}{dt} S(\mathcal{K}^{HA}, \mathbf{L}_{\text{rot}}) + S(\mathcal{K}^{HA}, \boldsymbol{\omega}) \times S(\mathcal{K}^{HA}, \mathbf{L}_{\text{rot}}) = S(\mathcal{K}^{HA}, \mathbf{N})$$

und mit

$$S(\mathcal{K}^{HA}, \mathbf{L}_{\text{rot}}) = \underbrace{M(\mathcal{K}^{HA}, \mathbf{L}_{\text{rot}}, \mathcal{K}^{HA})}_{\begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}} \underbrace{S(\mathcal{K}^{HA}, \boldsymbol{\omega})}_{\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}}$$

folgen die

Euler'schen Gleichungen

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 &= N_1 + (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 \\ J_2 \dot{\omega}_2 &= N_2 + (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1 \\ J_3 \dot{\omega}_3 &= N_3 + (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 \end{aligned} \quad (5.9)$$

die nur im körperfesten Hauptachsensystem gelten.

## 5.3 Anwendungen

### 5.3.1 Kräfte auf eine rotierende Achse

Wir betrachten eine Achse, die durch Lager in einer bestimmten Richtung gehalten wird, und eine konstante Drehgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  zeigt, siehe Abbildung 5.1. Die Lager üben Zwangskräfte  $\mathbf{Z}_l, \mathbf{Z}_r$  auf die Achse aus, die wir bestimmen wollen.

Zur einfachen Betrachtung legen wir den körperfesten Punkt  $P_0$  im Ursprung, der in der Mitte der Achse liegen soll. Es gilt also  $\mathbf{r}_0 = 0$  und der Schwerpunkt der Achse  $\mathbf{R} = \mathbf{s}_R$  ist ein reiner Relativvektor.

#### Kraftbilanz:

Wir haben mit den Gl. (1.3,5.1)

$$\mathbf{F}_{\text{ges}}^{(a)} = M \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{s}_R(t) = M \frac{d}{dt} [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}_R(t)] = M \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}_R(t))$$

Die Kraft verschwindet nur dann, wenn  $\mathbf{s}_R(t) \parallel \boldsymbol{\omega}$  gilt, d.h. der Schwerpunkt auf der Mitte der Achse liegt. Ansonsten wirken Kräfte auf die Lager, die proportional zu  $\omega^2$  sind und somit bei schneller Drehung die Lager beschädigen können.

Man kann leicht testen, ob der Schwerpunkt auf der Achse liegt, da im Schwerfeld der Erde die potentielle Energie der Achse  $M \mathbf{s}_R(t) \cdot \mathbf{e}_{zg}$  lautet und somit ihr Minimum (Ruhelage!) annimmt, wenn  $\mathbf{s}_R$  nach unten zeigt.

Wir halten fest: Liegt der Schwerpunkt der Achse nicht auf der Achsenmitte, so treten bei der Rotation Kräfte auf die Lager auf (*statische Unwucht*).

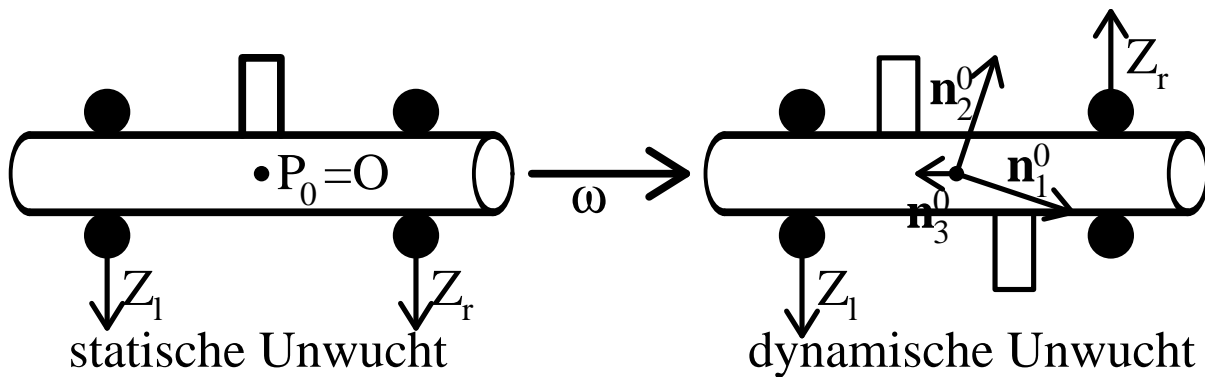


Abbildung 5.1: Momentaufnahme zweier rotierender Achsen mit statischer und dynamischer Unwucht. Die Zwangskräfte  $\mathbf{Z}_l, \mathbf{Z}_r$  üben die beiden Lager auf die Achse aus. Bei der statischen Unwucht wirkt eine endliche Gesamtkraft  $\mathbf{F}_{\text{ges}}^{(a)} = \mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_r$  auf das System, während bei der dynamische Unwucht  $\mathbf{F}_{\text{ges}}^{(a)}$ , nicht aber  $\mathbf{N} = \mathbf{s}_l \times \mathbf{Z}_l + \mathbf{s}_r \times \mathbf{Z}_r = N_3 \mathbf{n}_3^0$  verschwindet.

### Drehimpulsbilanz

Im körperfesten Hauptachsensystem ist  $S(\mathcal{K}^{HA}, \boldsymbol{\omega}) = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^{tr}$  konstant. Aus den Euler'schen Kreiselgleichungen (5.9) folgt, dass ein endliches Drehmoment  $N_3 = -(J_1 - J_2)\omega_1\omega_2$  vorliegt, falls (i)  $J_1 \neq J_2$  und (ii)  $\omega_1\omega_2 \neq 0$  gilt. Dies ist in der Regel der Fall, falls die Richtung der Achse nicht mit einer Hauptträgheitsachse zusammen fällt. Letzteres kann auftreten, wenn die Achse nicht rotationssymmetrisch ist. Das Drehmoment muss von den Lagern auf die Achse ausgeübt werden, wodurch bei hohen Drehzahlen starke Belastungen auftreten. Dies nennt man *dynamische Unwucht*.

### 5.3.2 Der kräftefreie Kreisel

Wir betrachten einen starren Körper auf den kein Drehmoment  $\mathbf{N}$  wirkt. Dann ist  $\mathbf{L}_{\text{rot}} = \text{const.}$  Gilt  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{L}_{\text{rot}}/J_i$ , das heißt  $\mathbf{L}_{\text{rot}}$  zeigt in Richtung einer Hauptträgheitsachse  $\mathbf{n}_i^0$ , so ist auch  $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$  und der Körper dreht sich um die körperfeste Achse  $\mathbf{n}_i^0$ . Falls alle Trägheitsmomente  $J_1 = J_2 = J_3$  gleich sind (d.h.  $\underline{J} \equiv J\underline{1}$ ), sind alle Richtungen im Raum Hauptträgheitsachse und man spricht von einem *Kugelkreisel*<sup>2</sup>. In diesem Fall dreht sich der Kreisel für alle Richtungen von  $\boldsymbol{\omega}$  mit konstanter Winkelgeschwindigkeit.

Ein wichtiger Fall ist der *symmetrische Kreisel*, bei dem  $J_1 = J_2 \neq J_3$  gilt. Dies ist zum Beispiel eine um die  $\mathbf{n}_3^0$ -Achse rotationssymmetrische Struktur (Kegel, Zylinder, Rugbyball, etc.). Aus den Euler'schen Kreiselgleichungen (5.9) folgt im Hauptachsensystem

$$J_3\dot{\omega}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_3 = \text{const}$$

und

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= -\omega_0\omega_2 \\ \dot{\omega}_2 &= \omega_0\omega_1 \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \frac{J_3 - J_1}{J_1}\omega_3$$

<sup>2</sup>Der Körper braucht nicht kugelsymmetrisch zu sein. Eine Kugel (oder ein Würfel) konstanter Dichte ist lediglich der Prototyp für das Verhalten.

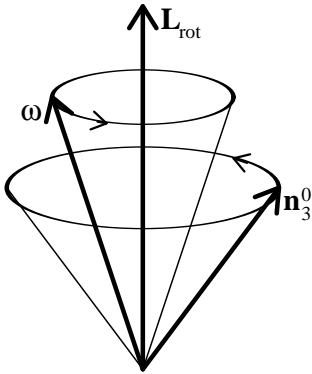


Abbildung 5.2: Reguläre Präzession der Symmetrieachse  $\mathbf{n}_3^0(t)$  und der Rotationsachse  $\boldsymbol{\omega}(t)$  beim kräftefreien symmetrischen Kreisel.

mit der Lösung

$$S(\mathcal{K}^{HA}, \boldsymbol{\omega}) = \begin{pmatrix} \omega_{\perp} \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ \omega_{\perp} \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad \text{d.h.} \quad |\boldsymbol{\omega}| = \sqrt{\omega_{\perp}^2 + \omega_3^2} = \text{const}$$

Die Rotationsachse ändert also ihre Lage relativ zum Körper und wandert mit der Frequenz  $\omega_0$  um die Symmetrieachse  $\mathbf{n}_3^0$ . Nun gilt für den Drehimpuls

$$\begin{aligned} S(\mathcal{K}^{HA}, \mathbf{L}_{\text{rot}}) &= M(\mathcal{K}^{HA}, \mathbf{L}_{\text{rot}}, \mathcal{K}^{HA}) S(\mathcal{K}^{HA}, \boldsymbol{\omega}) = \begin{pmatrix} J_1 \omega_{\perp} \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ J_1 \omega_{\perp} \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ J_3 \omega_3 \end{pmatrix} \\ &= J_1 S(\mathcal{K}^{HA}, \boldsymbol{\omega}) + (J_3 - J_1) \omega_3 S(\mathcal{K}^{HA}, \mathbf{n}_3^0) \end{aligned}$$

d.h. es gilt die vektorielle Beziehung

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{J_1} \mathbf{L}_{\text{rot}} - \underbrace{\frac{J_3 - J_1}{J_1} \omega_3}_{=\omega_0} \mathbf{n}_3^0 \quad (5.10)$$

Damit liegen  $\mathbf{n}_3^0$ ,  $\mathbf{L}_{\text{rot}}$  und  $\boldsymbol{\omega}$  in einer Ebene. Für die Bewegung von  $\mathbf{n}_3^0$  folgt

$$\dot{\mathbf{n}}_3^0 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}_3^0 = \frac{1}{J_1} \mathbf{L}_{\text{rot}} \times \mathbf{n}_3^0$$

und  $\mathbf{n}_3^0(t)$  rotiert mit der Kreisfrequenz  $\omega_{pr} = |\mathbf{L}_{\text{rot}}|/J_1$  um die Richtung von  $\mathbf{L}_{\text{rot}}$ . Ebenso rotiert wegen Gl. (5.10)  $\boldsymbol{\omega}(t)$  mit derselben Frequenz um die Richtung von  $\mathbf{L}_{\text{rot}}$ , siehe Abb. 5.2. Die Rotation der Drehachse  $\boldsymbol{\omega}$  um eine feste Richtung im Raum wird als *reguläre Präzession* bezeichnet.

Die anderen Hauptachse üben kompliziertere Bewegungen aus. Es gilt wegen Gl. (5.10)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{n}}_1^0 &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}_1^0 = \frac{1}{J_1} \mathbf{L}_{\text{rot}} \times \mathbf{n}_1^0 - \omega_0 \mathbf{n}_3^0 \times \mathbf{n}_1^0 = \frac{1}{J_1} \mathbf{L}_{\text{rot}} \times \mathbf{n}_1^0 - \omega_0 \mathbf{n}_2^0 \\ \dot{\mathbf{n}}_2^0 &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}_2^0 = \frac{1}{J_1} \mathbf{L}_{\text{rot}} \times \mathbf{n}_2^0 - \omega_0 \mathbf{n}_3^0 \times \mathbf{n}_2^0 = \frac{1}{J_1} \mathbf{L}_{\text{rot}} \times \mathbf{n}_2^0 + \omega_0 \mathbf{n}_1^0 \end{aligned}$$

Sie rotieren also sowohl um  $\mathbf{L}_{\text{rot}}$  als auch um  $\mathbf{n}_3^0$ .

### 5.3.3 Kreisel mit Drehmoment

Wir betrachten nun einen Kreisel, auf den ein äußeres Drehmoment der Form  $\mathbf{N} = N\mathbf{n}_3^0 \times \mathbf{e}_z$  wirkt. Dies ist z.B. bei einem auf der Spitze rotierenden Kegel der Fall; wir finden  $\mathbf{N} = s\mathbf{n}_3^0 \times (-Mg\mathbf{e}_z)$ , wobei  $s$  der Abstand des Schwerpunktes von der Spitze ist.

Im Folgenden beschränken wir uns der Einfachheit auf Kugelkreisel mit  $J_1 = J_2 = J_3 = J$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} J\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \dot{\mathbf{L}}_{\text{rot}} = N\mathbf{n}_3^0 \times \mathbf{e}_z \\ \dot{\mathbf{n}}_3^0 &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}_3^0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

Dies sind sechs Differentialgleichungen erster Ordnung für die sechs Komponenten der Vektoren  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{n}_3^0$ , und somit ist das zeitliche Verhalten bestimmt.

Man kann recht einfach eine spezielle Lösung der Form

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_3\mathbf{n}_3^0(t) + \omega_z\mathbf{e}_z$$

erhalten. Der Ansatz liefert

$$\dot{\mathbf{n}}_3^0 = \omega_z\mathbf{e}_z \times \mathbf{n}_3^0$$

Gleichzeitig liefert Gl. (5.11)

$$N\mathbf{n}_3^0 \times \mathbf{e}_z = J\dot{\boldsymbol{\omega}} = J\omega_3\dot{\mathbf{n}}_3^0(t) = J\omega_3\omega_z\mathbf{e}_z \times \mathbf{n}_3^0$$

und wir haben die Konsistenzbedingung

$$\omega_z = -\frac{N}{J\omega_3}$$

Als Ergebnis erhalten wir:

Wirkt auf einen Kugelkreisel mit dem Trägheitsmoment  $J$  ein Drehmoment der Form  $\mathbf{N} = N\mathbf{n}_3^0 \times \mathbf{e}_z$ , so führen die Figurenachse  $\mathbf{n}_3^0$  und die Drehachse  $\boldsymbol{\omega}$  eine *Präzession* mit der Frequenz  $\omega_z = -N/(J\omega_3)$  um die  $\mathbf{e}_z$ -Richtung aus.

Dies ist aber nur eine spezielle Lösung, die nur für bestimmte Anfangsbedingungen auftritt. Die allgemeine Lösung zeigt eine zusätzliche oszillatorische Bewegung der Achse  $\mathbf{n}_3^0$  um die Präzessionsbahn. Diese Bewegung bezeichnet man als *Nutation*.

Die allgemeine Lösung des Problems, z.B. für symmetrische Kreisel, erhält man am besten mit Hilfe der Lagrange'schen Gleichungen, wobei man die Euler'schen Winkel als verallgemeinerte Koordinaten für die Ausrichtung des Kreisels verwendet, siehe z.B. Scheck.

Bei einem realen Kreisel spielt die Reibung eine wichtige Rolle, da sie das Verhalten oft stabilisiert.

### 5.3.4 Die Erde als Kreisel

Die Erde hat die geometrische Gestalt eines Rotationsellipsoides, da sie aufgrund der Zentrifugalkräfte an den Polen abgeplattet ist. Die Hauptachse  $\mathbf{n}_3^0$  liegt auf der Linie zwischen dem

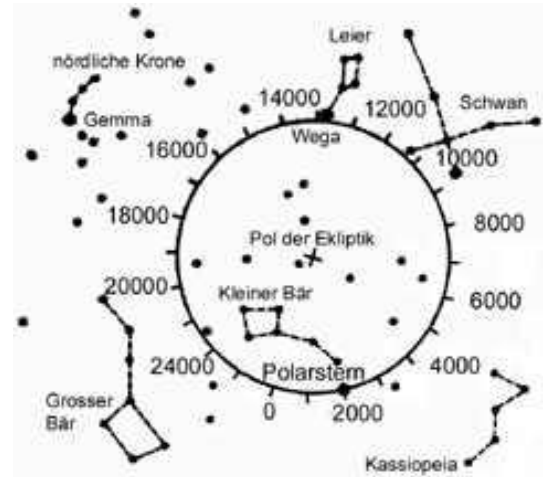
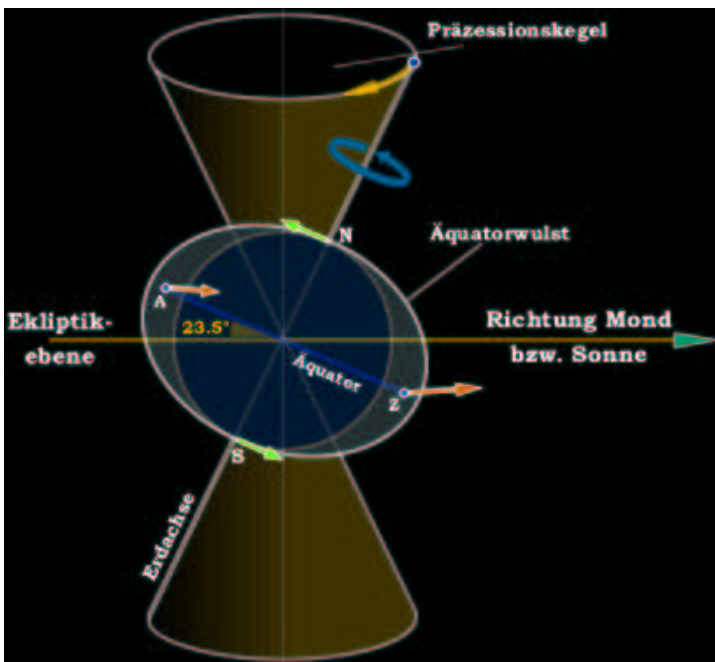


Abbildung 5.3: Zur Präzession der Erdatmosphäre, aus <http://www.greier-greiner.at/hc/praezession.htm> und <http://www.timeart.ch/praez.d.htm>.

geographischen Süd- und Nordpol. Es gilt  $J_3 > J_2 = J_1$  mit  $(J_3 - J_1)/J_1 \approx 1/300$ . Stimmt die Drehachse  $\omega$  nicht genau mit der Symmetrieachse  $\mathbf{n}_3^0$  überein, so tritt nach Abschnitt 5.3.2 eine Präzessionsbewegung auf; die Rotationsachse kreist um die Symmetrieachse  $\mathbf{n}_3^0$  mit der Frequenz

$$\omega_0 = \frac{J_3 - J_1}{J_1} \omega_3 \approx \frac{1}{300} \frac{2\pi}{1 \text{ Tag}} = \frac{2\pi}{10 \text{ Monate}}$$

Tatsächlich beobachtet man ein komplizierteres Verhalten mit einer Periode von ca 430 Tagen. Dies liegt anscheinend daran, dass die Erde kein idealer starrer Körper ist. Gleichzeitig präzedieren die Symmetrieachse und die Drehachse mit  $\omega_{pr}$  um die feste Richtung des Drehimpulses.

Die Erde ist um  $23^\circ.27'$  gegenüber der Ekliptik  $\mathbf{e}_z$  geneigt. Wegen der Abplattung der Erde in Kombination mit der  $1/r$ -Abhängigkeit der Gravitationskraft üben Mond und Sonne ein aufrichtendes Drehmoment  $\mathbf{N} \propto \mathbf{n}_3^0 \times \mathbf{e}_z$  auf die Erde aus. Die führt nach Abschnitt 5.3.3 zu einer Präzession der Erdachse um die Ekliptik. Der Nordpol dreht sich dabei innerhalb von 25850 Jahren. Deswegen wird z.B. in 12000 Jahren Wega die Rolle des Polarsternes annehmen. Zusätzlich findet eine (kleine) Nutationsbewegung um diese Bahn statt, siehe Abb. 5.3.

# Kapitel 6

## Dynamische Systeme

### 6.1 Definition

Ein dynamisches System wird durch einen Satz von Variablen  $a_1(t), a_2(t), \dots, a_N(t)$  mit einer Dynamik

$$\dot{a}_i = f_i(a_1, a_2, \dots, a_N, t, \mu)$$

beschrieben. Der *Kontrollparameter*  $\mu$  hat keine eigene Dynamik sondern beschreibt Änderungen des dynamischen Systems durch äußere Einflüsse (z.B. Temperatur, angelegte Felder, etc.) Im folgenden schreiben wir  $\mathbf{a}$  für  $a_1, a_2, \dots, a_N$ .

**Beispiele:**

- Hamilton'sche Dynamik  $\mathbf{a} = (p_1, \dots, p_f, q_1, \dots, q_f)$ .  $f_i$  ergibt sich aus den partiellen Ableitungen der Hamiltonfunktion.
- Euler'sche Gleichungen für die Komponenten  $\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)$  der Winkelgeschwindigkeit im Hauptachsensystem des starren Körpers. Ohne Drehmoment gilt:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= \frac{J_2 - J_3}{J_1} \omega_2 \omega_3 \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{J_3 - J_1}{J_2} \omega_3 \omega_1 \\ \dot{\omega}_3 &= \frac{J_1 - J_2}{J_3} \omega_1 \omega_2\end{aligned}$$

- Harmonischer Oszillator mit Reibungskraft  $F_{\text{diss}} = -\gamma m \dot{x}$ . Wähle  $\mathbf{a} = (x, v)$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\gamma v - \omega_0^2 x \end{pmatrix}$$

Die Dynamik  $\mathbf{f}(\mathbf{a}, t, \mu)$  beschreibt in Analogie zur Hydrodynamik den Fluss des Systems im Raum der Variablen. Die Funktion  $\mathbf{a}(t)$  bezeichnet man als *Trajektorie*. Häufig betrachtet man *autonome Systeme* bei denen der Fluss  $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mu)$  nicht von der Zeit abhängt.

## 6.2 Fixpunkte und Stabilität

Im folgenden beschränken wir uns auf autonome Systeme. Als *Fixpunkt* bezeichnet man einen Punkt  $\mathbf{a}^0$  bei dem alle zeitlichen Ableitungen verschwinden, d.h.  $\mathbf{f}(\mathbf{a}^0, \mu)$ . Nun wollen wir das Verhalten für kleine Abweichungen  $\delta\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(t) - \mathbf{a}^0$  untersuchen. Wir finden

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{a}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{a}^0 + \delta\mathbf{a}(t), \mu) = \mathbf{f}(\mathbf{a}^0, \mu) + \sum_i \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial a_i} \delta a_i(t) = \underline{\underline{J}}\delta\mathbf{a}(t) \quad (6.1)$$

mit der Jakobimatrix

$$J_{ij} = \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, \mu)}{\partial a_j} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}^0} \quad \text{für } i, j = 1, 2, \dots, N$$

Die Jakobimatrix hat nun Eigenwerte  $\lambda_i$  und zugehörige Eigenvektoren  $\mathbf{u}_i$ . Dabei gilt für Auslenkungen der Form  $\delta\mathbf{a}(t) = \mathbf{u}g(t)$  in Richtung der Eigenvektoren für:

**reelle  $\lambda$ :**

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u}g(t) = \underline{\underline{J}}\mathbf{u}g(t) = \lambda\mathbf{u}g(t) \quad \Rightarrow \quad g(t) = e^{\lambda t}g(0)$$

Wir haben für  $\lambda > 0$  eine *abstoßende Richtung* und für  $\lambda < 0$  eine *anziehende Richtung*

**komplexes  $\tilde{\lambda}$ :** Da die Jakobimatrix reell ist, treten paarweise komplex konjugierte Eigenwerte  $\tilde{\lambda}_{\pm} = \lambda \pm i\omega$  und Eigenvektoren  $\tilde{\mathbf{u}}_{\pm} = \mathbf{u} \mp i\mathbf{v}$  auf, wobei die reellen Vektoren  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  linear unabhängig sind. Im Komplexen hat die Differentialgleichung (6.1) nun die Lösungen

$$\delta\tilde{\mathbf{a}}_{\pm}(t) = \tilde{\mathbf{u}}_{\pm}\tilde{g}(0)e^{\tilde{\lambda}_{\pm}t}.$$

Da die Differentialgleichung (6.1) reell und linear ist, sind auch der Real- und Imaginärteil von  $\delta\tilde{\mathbf{a}}(t)$  Lösungen. Wir erhalten mit  $\tilde{g}(0) = g_0e^{i\varphi}$

$$\delta\mathbf{a}(t) = \text{Re}\{\delta\tilde{\mathbf{a}}_+(t)\} = e^{\lambda t} [\mathbf{u} \cos(\omega t + \varphi) + \mathbf{v} \sin(\omega t + \varphi)]$$

(der Realteil von  $\delta\tilde{\mathbf{a}}_-(t)$  sowie die Imaginärteile liefern keine weiteren Lösungen.) Damit spiralisiert  $\mathbf{a}(t)$  um den Fixpunkt. Für  $\text{Re}\{\tilde{\lambda}\} > 0$  hat man einen *abstoßenden Fokus* und für  $\text{Re}\{\tilde{\lambda}\} < 0$  einen *anziehenden Fokus*.

Bilden die Eigenvektoren ein vollständiges Basis-System<sup>1</sup>, so kann man eine beliebige anfängliche Abweichung  $\delta\mathbf{a}(0)$  nach den Eigenvektoren entwickeln und erhält somit in allen Richtungen ein exponentielles Verhalten  $e^{\lambda_i t}$  in der Zeit. Damit folgt

Sind die Realteile aller Eigenwerte der Jakobimatrix negativ, so klingt jede kleine Abweichung von dem Fixpunkt exponentiell in der Zeit ab und man hat einen *stabilen Fixpunkt*.

<sup>1</sup>Da die Jakobimatrix nicht symmetrisch ist, gibt es bei mehrfach entarteten Eigenwerten häufig nur einen Eigenvektor, sodass die Eigenvektoren kein vollständiges System bilden. Diese kann man dann aber mit Hauptvektoren zu einem vollständigen System ergänzen. Dabei zeigen die Hauptvektoren dieselbe exponentielle Zeitabhängigkeit mit dem jeweiligen entarteten Eigenwert als Exponenten. Allerdings haben sie eine zusätzliche polynomiale Zeitabhängigkeit.



### 6.2.1 Beispiel: Harmonischer Oszillator mit Reibung

Der Fixpunkt ist  $\mathbf{a}^0 = (x^0, v^0) = (0, 0)$ . Dies ist die Ruhelage des Systems. Die Jakobimatrix lautet:

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\gamma \end{pmatrix}$$

mit dem charakteristischen Polynom  $P(\lambda) = \det(\underline{J} - \lambda) = \lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2$ . Aus  $P(\lambda) = 0$  erhalten wir die Eigenwerte

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

Im überdämpften Fall  $\gamma > 2\omega_0$  haben wir zwei anziehende Richtungen und im Schwingfall  $\gamma < 2\omega_0$  einen anziehenden Fokus. Der Fixpunkt ist also immer stabil, sofern  $\gamma > 0$  ist.

### 6.2.2 Beispiel: Freier rotierender Körper

Die Euler'schen Gleichungen bilden ein dynamisches System. Für den Fall, dass alle Hauptträgheitsmomente  $J_i$  unterschiedlich sind, sind die Fixpunkte dadurch gegeben, dass mindestens zwei Komponenten  $\omega_i$  verschwinden. Das heißt, die Fixpunkte entsprechen Drehungen um die Hauptträgheitsachsen. Nun wollen wir deren Stabilität untersuchen. O.B.d.A betrachten wir hierzu den Fixpunkt  $\mathbf{a}^0 = (\omega_1^0, 0, 0)$  einer Drehung um die erste Achse. Die Jakobimatrix lautet

$$\underline{J} = \frac{\partial}{\partial \omega_j} \begin{pmatrix} \frac{J_2 - J_3}{J_1} \omega_2 \omega_3 \\ \frac{J_3 - J_1}{J_2} \omega_3 \omega_1 \\ \frac{J_1 - J_2}{J_3} \omega_1 \omega_2 \end{pmatrix} \Big|_{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\omega_1^0, 0, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J_3 - J_1}{J_2} \omega_1^0 \\ 0 & \frac{J_1 - J_2}{J_3} \omega_1^0 & 0 \end{pmatrix}$$

und wir haben das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda \frac{(J_3 - J_1)(J_1 - J_2)}{J_2 J_3} (\omega_1^0)^2$$

mit den Eigenwerten

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_{2/3} = \pm \omega_1^0 \sqrt{\frac{(J_3 - J_1)(J_1 - J_2)}{J_2 J_3}}$$

Nun liegt der Eigenvektor zu Eigenwert  $\lambda_1 = 0$  auf der ersten Hauptachse. Eine solche Störung ist eine Änderung der Rotationsgeschwindigkeit  $\omega_1^0 \rightarrow \omega_1^0 + g(0)$  um die erste Achse, die ja zu einem neuen Fixpunkt führt.

Für die Eigenwerte  $\lambda_{2/3}$  gilt: Wenn das Argument der Wurzel positiv ist, ist einer der beiden anderen Eigenwerte positiv, der andere negativ, und der Fixpunkt ist instabil. Dies ist genau dann der Fall, wenn  $J_3 < J_1 < J_2$  oder  $J_3 > J_1 > J_2$  gilt,  $J_1$  also das mittlere Hauptträgheitsmomente ist. Umgekehrt wird das Argument der Wurzel negativ, wenn  $J_1$  das größte oder kleinste Hauptträgheitsmoment ist, und wir haben rein imaginäre Eigenwerte. Dann führt die Rotationsachse im Hauptträgheitssystem eine Drehbewegung um die erste Hauptträgheitsachse durch, die weder exponentiell anwächst noch abklingt. Für  $J_2 = J_3$  ist dies gerade die reguläre Präzession aus Abschnitt (5.3.2).

Die Rotation eines starren Körpers um die Hauptträgheitsachse mit dem mittleren Trägheitsmoment ist stets instabil.

### 6.2.3 Fixpunkte eines Hamilton'schen Systems

Die Jakobimatrix eines Hamilton'schen Systems hat die Form

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} & -\frac{\partial^2 H}{\partial q \partial q} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial p} & \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} \end{pmatrix}$$

Damit gilt

$$\text{Spur}\{\underline{J}\} = \sum_i \left[ -\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} \right] = 0$$

Da die Spur einer Matrix die Summe aller Eigenwerte ist, können somit nicht die Realteile aller Eigenwerte negativ sein und es gibt keine stabilen Fixpunkte. Neben instabilen Fixpunkten mit einigen abstoßenden Richtungen / Fokus gibt es nur die Möglichkeit, dass alle Realteile Null sind, und das gestörte System in der Nähe des Fixpunktes bleibt.

Dieser Sachverhalt folgt auch aus dem Liouville'schen Satz: Bei einem stabilen Fixpunkt würden alle Trajektorien zusammenlaufen und sich somit das Phasenraumvolumen verringern.

## 6.3 Bifurkationen

Nun wollen wir untersuchen, was passiert, wenn der Kontrollparameter  $\mu$  variiert wird. Dabei gehen wir davon aus, dass die Funktion  $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mu)$  stetig differenzierbar von  $\mu$  abhängt. Im Regelfall werden sich dann die Lagen der Fixpunkte  $\mathbf{a}^0$  sowie die Eigenwerte der Jakobimatrix stetig mit  $\mu$  verändern. Eine *Bifurkation* liegt bei einem kritischen Wert  $\mu_c$  vor, wenn sich entweder die Anzahl der Fixpunkte oder ihre Stabilität ändert.

Da sich der Fluss im Raum der Variablen nicht global ändern darf, kann man zeigen, dass Bifurkationen nur dann auftreten, wenn der Realteil eines Eigenwertes der Jakobimatrix Null wird. In der Regel wird dies entweder bei einem Eigenvektor mit reellem Eigenwert oder bei einem Paar komplex konjugierter Eigenwerte der Fall sein. Solche Bifurkationen lassen sich leicht klassifizieren, wenn man sich auf den eindimensionalen (bzw. zweidimensionalen bei dem komplexen Eigenwert) Unterraum des zugehörigen Eigenvektors beschränkt. Dann sind unten aufgeführten Bifurkationen möglich. Hierzu geben wir jeweils ein generisches Beispiel an, wobei der Kontrollparameter so gewählt ist, dass die Bifurkation bei  $\mu = 0$  stattfindet und für  $\mu < 0$  ein stabiler Fixpunkt vorliegt.

#### Für einen reellen Eigenwert, der Null wird:

**Sattel-Knoten-Bifurkation:** Ein stabiler und ein instabiler Fixpunkt kollidieren und löschen sich aus, siehe Abb. 6.1(a).

$$\dot{a} = \mu + a^2$$

**Transkritische Verzweigung:** Ein stabiler und ein instabiler Fixpunkt schneiden sich und wechseln ihre Stabilität, siehe Abb. 6.1(b).

$$\dot{a} = \mu a - a^2$$

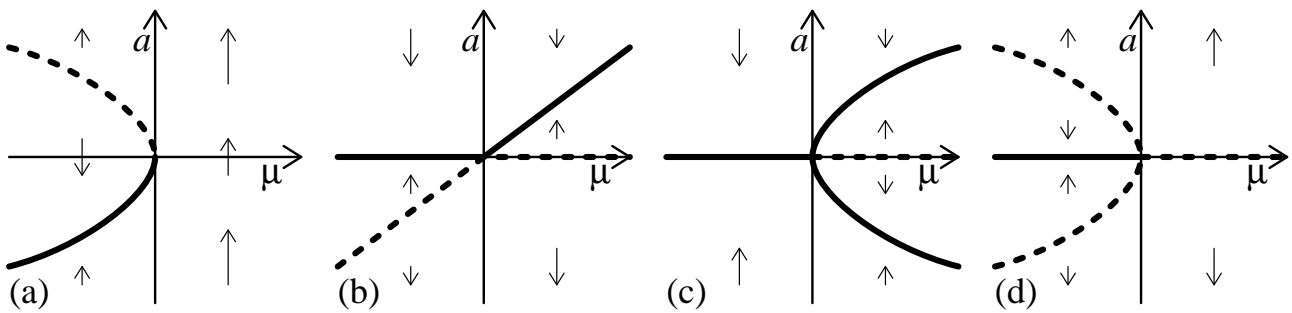


Abbildung 6.1: Skizze der möglichen Bifurkationstypen, wenn ein reeller Eigenwert der Jakobi-matrix zum Fixpunkt  $a^0$  bei  $\mu = 0$  Null wird. Die stabilen/instabilen Fixpunkte sind mit einer dicken durchgezogenen/gestrichelten Linie gekennzeichnet. Die Pfeile zeigen die Flussrichtung  $\dot{a}$ .

**Superkritische Heugabel-Bifurkation (engl. Pitchfork):** Aus einem stabilen Fixpunkt entstehen zwei stabile und ein instabiler Fixpunkt, siehe Abb. 6.1(c).

$$\dot{a} = \mu a - a^3$$

**Subkritische Heugabel-Bifurkation:** Ebenso kann ein stabiler Fixpunkt mit zwei instabilen Fixpunkten zusammenstoßen, wobei ein instabiler Fixpunkt übrig bleibt, siehe Abb. 6.1(d).

$$\dot{a} = \mu a + a^3$$

### Für einen komplexen Eigenwert, dessen Realteil Null wird:

**superkritische Hopf-Bifurkation:** Ein stabiler Fixpunkt wird instabil. Dabei löst sich ein stabiler Grenzzyklus ab. Siehe Abb. 6.2.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - y - (x^2 + y^2)x \\ \dot{y} &= \mu y + x - (x^2 + y^2)y\end{aligned}$$

Mit  $x = r \cos \varphi$  und  $y = r \sin \varphi$  wird daraus  $\dot{r} = \mu r - r^3$  und  $\dot{\varphi} = 1$ . Dies entspricht einer Heugabel-Bifurkation in  $r$ , wobei sich die beiden neuen stabilen Zustände mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um den instabilen Ast drehen. Dieser Bifurkationstyp ist charakteristisch, wenn ein System anfängt von selbst zu schwingen.

**subkritische Hopf-Bifurkation:** Ein stabiler Fixpunkt kollidiert mit einem instabilen Grenzzyklus und wird instabil. Dies entspricht der subkritischen Heugabel-Bifurkation.

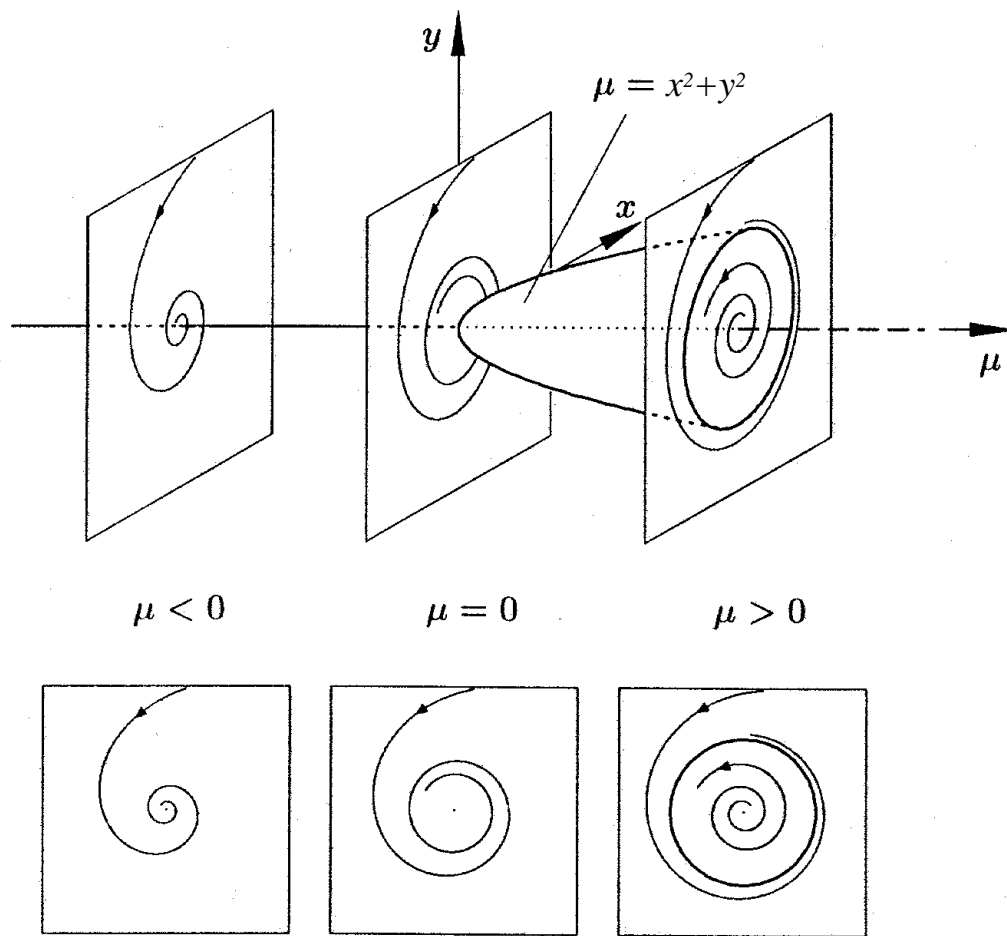


Abbildung 6.2: Skizze einer superkritischen Hopf-Bifurkation

# Anhang A

## Vektoren und Matrizen

Betrachte einen  $d$ -dimensionalen Vektorraum  $V$  über dem Körper  $K$  (z.B. reelle oder komplexe Zahlen). Dabei sei  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d\}$  eine Basis. Es gelte die *Summenkonvention*, dass über gleiche Indizes summiert wird.

Vektorbeziehung	Matrixschreibweise
Vektor $\mathbf{a} = \mathbf{e}_i a^i$	Spalte $S(\mathcal{B}, \mathbf{a}) = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^d \end{pmatrix}$
Bilinearform $\phi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in K$ $\phi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a^i)^* \phi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) b^j$	$\phi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = [S(\mathcal{B}, \mathbf{a})]^\dagger M(\mathcal{B}, \phi, \mathcal{B}) S(\mathcal{B}, \mathbf{b})$ (A.1) mit der Matrix $M_{i,j}(\mathcal{B}, \phi, \mathcal{B}) = \phi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$
Skalarprodukt $\phi_{SP}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (positiv definite Bilinearform)	Metrik $g_{ij} = \phi_{SP}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ ; für ON-Basis $\mathcal{B}$ gilt: $g_{ij} = \delta_{ij}$ und $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [S(\mathcal{B}, \mathbf{a})]^\dagger S(\mathcal{B}, \mathbf{b})$
Lineare Abbildung $\mathbf{T}(\mathbf{a}) \in V$ mit $\mathbf{T}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_j T^j_i$	$S(\mathcal{B}, \mathbf{T}(\mathbf{a})) = M(\mathcal{B}, T, \mathcal{B}) S(\mathcal{B}, \mathbf{a})$ (A.2) mit $M^j_i(\mathcal{B}, T, \mathcal{B}) = T^j_i$ bzw. $M(\mathcal{B}, T, \mathcal{B}) = (S(\mathcal{B}, \mathbf{T}(\mathbf{e}_1)), \dots, S(\mathcal{B}, \mathbf{T}(\mathbf{e}_d)))$ (A.3)
Hintereinander-Ausführung $T_1 \circ T_2(\mathbf{a}) = \mathbf{T}_1(\mathbf{T}_2(\mathbf{a}))$	$M(\mathcal{B}, T_1 \circ T_2, \mathcal{B}) = M(\mathcal{B}, T_1, \mathcal{B}) M(\mathcal{B}, T_2, \mathcal{B})$ (A.4)
Abb. ist orthogonal/unitär wenn: $\mathbf{U}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{U}(\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}$	$M^{-1}(\mathcal{B}, U, \mathcal{B}) = M^\dagger(\mathcal{B}, U, \mathcal{B})$ (A.5)
Speziell für $d = 3$ : Kreuzprodukt $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}, \mathbf{b}$ mit positiver Orientierung und $ \mathbf{c} ^2 =  \mathbf{a} ^2  \mathbf{b} ^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$ Das Kreuzprodukt ist weder kommutativ noch assoziativ	bzgl. positiv orientierter ON-Basis $\mathcal{B}$ gilt $S(\mathcal{B}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}) = S(\mathcal{B}, \mathbf{a}) \times S(\mathcal{B}, \mathbf{b})$ wobei $\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 b^3 - a^3 b^2 \\ a^3 b^1 - a^1 b^3 \\ a^1 b^2 - a^2 b^1 \end{pmatrix}$ (A.6)

## A.1 Basiswechsel auf neue Basis $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_d\}$

Entwickle  $\mathbf{e}_i = \tilde{\mathbf{e}}_j M^j{}_i \rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{e}_i a^i = \tilde{\mathbf{e}}_j M^j{}_i a^i = \tilde{\mathbf{e}}_j \tilde{a}^j$

In Matrixdarstellung:

$$S(\tilde{\mathcal{B}}, \mathbf{a}) = M(\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}) S(\mathcal{B}, \mathbf{a}) \quad (\text{A.7})$$

$$\text{mit } M^j{}_i(\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}) = M^j{}_i, \quad \text{bzw. } M(\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}) = (S(\tilde{\mathcal{B}}, \mathbf{e}_1), \dots, S(\tilde{\mathcal{B}}, \mathbf{e}_d)) \quad (\text{A.8})$$

D.h.  $M(\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B})$  besteht aus den Spalten der Elemente der Basis  $\mathcal{B}$  bezüglich der Basis  $\tilde{\mathcal{B}}$ . Es gilt:

$$M(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}) = M(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) M(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}) \quad \text{und} \quad M(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}) = M(\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B})^{-1}$$

Für den Tensor einer Abbildung gilt die Transformationsvorschrift

$$M(\tilde{\mathcal{B}}, T, \tilde{\mathcal{B}}) = M(\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}) M(\mathcal{B}, T, \mathcal{B}) M(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}) \quad (\text{A.9})$$

Für den Tensor einer Bilinearform gilt die Transformationsvorschrift

$$M(\tilde{\mathcal{B}}, \phi, \tilde{\mathcal{B}}) = M(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})^\dagger M(\mathcal{B}, \phi, \mathcal{B}) M(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}) \quad (\text{A.10})$$

Falls  $\tilde{\mathcal{B}}$  und  $\mathcal{B}$  ON-Basen sind, gilt:

$$M(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}) = M(\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B})^\dagger = M(\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B})^{-1} \quad (\text{A.11})$$

und die Tensoren von Abbildungen und Bilinearformen transformieren sich gleich.

Falls  $\tilde{\mathcal{B}}$  und  $\mathcal{B}$  positiv orientierte ON-Basen sind, gilt  $\det M(\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}) = 1$  und:

$$\left[ M(\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}) S(\mathcal{B}, \mathbf{a}) \right] \times \left[ M(\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}) S(\mathcal{B}, \mathbf{b}) \right] = M(\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}) \left[ S(\mathcal{B}, \mathbf{a}) \times S(\mathcal{B}, \mathbf{b}) \right]$$

d.h. das Kreuzprodukt zweier Vektoren transformiert sich wie ein Vektor. Dies zeigt, dass die Matrixdarstellung (A.6) basisunabhängig ist. Bei Basen mit umgekehrter Orientierung kommt ein Faktor  $-1$  hinzu.

## A.2 Diagonalisierung von Tensoren

Sei  $M(\mathcal{B}, A, \mathcal{B})$  ein symmetrischer (hermitescher) Tensor. Dann existiert ein (orthonormales) System von Spalten  $S_1, \dots, S_d$  mit  $M(\mathcal{B}, A, \mathcal{B}) S_i = A_i S_i$

Interpretiere  $S_i = S(\mathcal{B}, \mathbf{u}_i)$  und wähle nun die neue Basis  $\tilde{\mathcal{B}} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\}$ . Dann gilt  $M(\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B})^\dagger = M(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}) = (S_1, \dots, S_d)$  und

$$M(\tilde{\mathcal{B}}, A, \tilde{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_d \end{pmatrix}$$