Elektrodynamik

TU Berlin, WS 2012/13

Prof. Dr. T. Brandes

16. Juli 2013

INHALTSVERZEICHNIS

1.	Elekt	trostatik	
	1.1	Einfüh	rung 2
		1.1.1	Coulomb-Gesetz $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 2$
		1.1.2	Elektrisches Feld
		1.1.3	Das Gaußsche Gesetz 4
		1.1.4	Anwendungen des Gaußschen Gesetzes
	1.2	Die Po	bisson-Gleichung
		1.2.1	Greensche Funktion
		1.2.2	Konstruktion der Greenschen Funktion
		1.2.3	Dirichlet-RB für Halbraum $z > 0$, Spiegelladungen 10
		1.2.4	Ladungen auf dem Rand
		1.2.5	Leiter und Influenzladungen
	1.3	Elektr	ostatische Energie
		1.3.1	Punktladungen
		1.3.2	Integralausdrücke
		1.3.3	Ladungsverteilung im <i>externen</i> Potential Φ_{ext}
		1.3.4	Kapazitätskoeffizienten 15
		1.3.5	Kondensator $\ldots \ldots 17$
		1.3.6	Der Satz von Thomson (Lord Kelvin) 17
	1.4	Multip	oolentwicklung
		1.4.1	Bemerkung zu Momenten einer Verteilung
		1.4.2	Der Dipol
		1.4.3	Höhere Multipole, Kugelflächenfunktionen
	1.5	Anwen	dungen der Elektrostatik
		1.5.1	Poisson-Schrödinger-Gleichung (Hartree-Gleichungen) 20
		1.5.2	Poisson-Boltzmann-Gleichung
2.	Mag	netostat	
	2.1	Einfüh	rung
		2.1.1	Stromdichte und Kontinuitätsgleichung
		2.1.2	Stationäre Stöme
		2.1.3	Stromfaden
		2.1.4	Das Gesetz von Ampere
		2.1.5	Magnetische Induktion

		2.1.6	Maxwellgleichungen und Vektorpotential	29
	2.2	Weiter	führung der Magnetostatik	31
		2.2.1	Multipolentwicklung	31
		2.2.2	Elektrisches versus magnetisches Dipolmoment	32
~	D .			95
3.	Die		schen Gleichungen	35
	3.1	Zeitabl	nangige elektrische und magnetische Phanomene	35
		3.1.1 9.1.0	Das Faradaysche Induktionsgesetz	35
		3.1.2	Ubertragung der Queil-Gleichungen	31
		3.1.3	Der verschiedungsstrom	38
		3.1.4	Problemstellen der Maxwellschen Gleichungen	40
	3.2	Elektro	omagnetische Wellen	41
		3.2.1	Potentiale und Eichungen	41
		3.2.2	Die Greensche Funktion \dots	43
		3.2.3	Wellen im Ortsraum \mathbb{R}^3	49
		3.2.4	Retardierte Potentiale im \mathbb{R}^3	51
		3.2.5	Der Hertzsche Dipol	52
	3.3	Poynti	ngscher Satz	55
		3.3.1	Einführung	55
		3.3.2	Maxwellsche Gleichungen und Energieerhaltung	56
		3.3.3	Statischer Grenzfall	58
		3.3.4	Induktivitäten von Stromverteilungen der Magnetostatik	58
		3.3.5	Poynting-Vektor beim Hertzschen Dipol	60
	3.4	Brauch	nt man Felder?	61
		3.4.1	Einführung	61
		3.4.2	Abraham-Lorentz-Strahlungskraft	62
		3.4.3	Feynman-Wheeler-Theorie	63
		3.4.4	Die Liénard-Wiechert-Potentiale	63
	3.5	Ebene	Wellen	64
		3.5.1	Homogene Wellengleichung	64
		3.5.2	Monochromatische ebene Wellen	65
		3.5.3	Kugelwellen und ebene Wellen	66
		3.5.4	Helmholtz-Gleichung	67
		3.5.5	Ebene elektromagnetische Wellen	68
		3.5.6	Polarisation	68
4	Flek	trodynar	nik in Materie	71
••	4.1	Elektro	ostatik	71
		411	Vorbereitung: Geladene Platte	71
		4.1.2	Leiter	71
		4.1.3	Isolatormodell	71
		414	Plattengeometrie	79
		415	Dielektrische Verschiebung	73
		416	Dielektrizitätskonstante	7/
		J.1.0		14

		4.1.7 4.1.8 4.1.9	Theorie der linearen Antwort $\ldots \ldots \ldots$	75 77 78
	4.2	Maxwe	ellgleichungen in Materie	30
	4.3	Disper	sion	32
	-	4.3.1	Ebene Wellen	32
		4.3.2	Lorentz-Modell für $\varepsilon(\omega)$	34
		4.3.3	Komplexer Brechungsindex	35
		4.3.4	Frequenzabhängige Leitfähigkeit, Metalle	35
		4.3.5	Povntingscher Satz in Materie	37
		4.3.6	Wellenimpedanz	38
	4.4	Ausbli	ck: Neuere Entwicklungen	38
		4.4.1	Photonische Kristalle	39
		442	Metamaterialien negativer Brechungsindex	39
		1. 1.2		
5.	Stro	mkreise) 0
	5.1	Statio	näre Stromkreise) 0
		5.1.1	'Batterien'	<i>)</i> 1
	5.2	Wechs	elstromkreise	<i>)</i> 2
		5.2.1	Induktivitäten, Kapazitäten und ohmsche Widerstände	<i>)</i> 2
		5.2.2	Impedanz)3
	5.3	Wellen	leiter ('transmission lines')) 4
		5.3.1	Plattengeometrie	95
		5.3.2	Ersatzschaltbild	96
		5.3.3	Die Telegrafengleichung	<u>)</u> 6
6.	Spez	ielle Re	lativitätstheorie	99
	6.1	Einfüh	rung (MECHANIK-SKRIPT)	99
	6.2	Galilei	-Transformationen (MECHANIK-SKRIPT)	99
		6.2.1	Invarianz der Bewegungsgleichungen)0
		6.2.2	Mathematischer Einschub: Gruppen)()
	6.3	Die Lo	prentz-Transformation)1
		6.3.1	Einleitung)1
		6.3.2	Einsteinsches Relativitätsprinzip)2
		6.3.3	Konstruktion der Lorentz-Transformation)2
		6.3.4	Matrix-Form)5
	6.4	Folger	ungen aus der Lorentz-Transformation)5
		6.4.1	Minkowski-Diagramm)5
		6.4.2	Relativität der 'Gleichzeitigkeit')5
		6.4.3	Längenkontraktion)7
		6.4.4	Zeitdilatation)8
	6.5	Der M	inkowskiraum \ldots)8
		6.5.1	Vierdimensionaler Abstand)9
		6.5.2	Die Eigenzeit	10

	6.6	6.5.3 6.5.4 6.5.5 Relativ	Lorentztensoren 111 Ko- und kontravariante Komponenten 112 Tensorfelder und Ableitungen 113 vistische Dynamik 113
	0.0	6.6.1 6.6.2	Die Viererbeschleunigung
		6.6.3	Relativistische Energie
	6.7	Die Ko	warianz der Maxwellgleichungen
		6.7.1	Kontinuitätsgleichung und Ladung
	6.8	Potent	iale
		6.8.1	Feldstärketensor
		6.8.2	Transformation der Felder
7.	Elekt	trodynai	nik als Feldtheorie \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 123
	7.1	Euler-	Lagrange-Gleichungen
		7.1.1	Das Hamiltonsche Prinzip in der klassischen Mechanik 123
		7.1.2	Freies relativistisches Teilchen
		7.1.3	Teilchen im elektromagnetischen Feld
		7.1.4	Die Lorentz-Kraft
	7.2	Hamilt	onsches Prinzip und Lagrange-Dichte für Felder
		7.2.1	Wellengleichung eines elastischen Stabs
		7.2.2	Funktionale und Variationsableitungen
	7.3	Lagrar	ngedichte für das elektromagnetische Feld
		7.3.1	Elektrostatik
		7.3.2	Magnetostatik
		7.3.3	Elektrodynamik
		7.3.4	Lagrangedichte und Feldstärketensor
		7.3.5	Lagrangefunktion für Felder und Materie
	7.4	Das Pi	inzip der Eichinvarianz
		7.4.1	Schrödingergleichung mit Elektromagnetischen Potentialen 135
		7.4.2	Das Dirac-Feld
		7.4.3	Elektromagnetische Kopplung
		7.4.4	Globale und lokale Eichinvarianz
8.	Theo	orien mit	t Eichpotentialen \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 142
	8.1	Lokale	Eichinvarianz
		8.1.1	Wiederholung: Konstruktion des QED Lagrangians
	8.2	Yang-I	Mills-Theorien
		8.2.1	Physikalische Motivation
		8.2.2	Dirac-Gleichung
		8.2.3	Lagrangedichte des Eichfeldes
	8.3	Eichfel	der in der Born–Oppenheimer–Methode
		8.3.1	Wiederholung: Kombination von Spin- und Bahnzuständen (QM I) 147
		8.3.2	Die Methode der instantanen Basis

		8.3.3	Systeme von Schrödinger–Gleichungen
		8.3.4	Das Mead–Berry–Eichpotential
		8.3.5	Jenseits der Born–Oppenheimer–Näherung
	8.4	Die ge	ometrische Phase
		8.4.1	Die Berry–Phase
		8.4.2	Beispiel: Spin $-\frac{1}{2}$
	8.5	Topolo	gische Phasen
		8.5.1	Der Aharonov-Bohm-Effekt
		8.5.2	Aharonov–Bohm–Phase
An	hang		162
A.	Vekt	oranalvs	sis
	A.1	Vektor	felder
	A 2	Gradie	nt 163
	11.2	A 2 1	Definition 163
		A 2 2	Der Gradient in krummlinigen Koordinaten 164
	Δ3	ANWI	ENDUNG MECHANIK: Kraft Gradient und Potential
	11.0		Konservative Kraftfelder 166
		A 2 9	Kurwonintegrale Arbeit Leistung
		A.3.2	$\mathbf{K}_{\text{uverninegrade}}, \mathbf{A}_{\text{i}} \text{ Dent, Leistung} \dots \dots$
		A.3.3	Konservative Krafte und vom Weg unabhangige Arbeit 107
	A.4	Kotati	on und Integralsatz von Stokes

		A.4.1	Rotation
		A.4.2	Integralsatz von Stokes
		A.4.3	ANWENDUNG ELEKTRODYNAMIK: Induktionsgesetz 169
		A.4.4	ANWENDUNG MAGNETOSTATIK
	A.5	Diverg	enz und Integralsatz von Gauß
		A.5.1	Divergenz
		A.5.2	Integralsatz von Gauß
		A.5.3	ANWENDUNG ELEKTROSTATIK: Gauß'sches Gesetz 171
		A.5.4	Zusammenfassung: Maxwell'sche Gleichungen
_	_		
В.	Four	ier-Tran	sformation und Delta-Funktion
	B.1	Motiva	tion und Definitionen
	B.2	Orts- 1	und Impulsraum (k-Raum), Zeit-Domäne und Frequenzraum 174
	B.3	Fourie	rtransformation: Beispiel Gauß-Funktion
	B.4	Die De	elta-Distribution
	B.5	Einige	Eigenschaften der Fourier-Transformation $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 177$
_		_	
C.	Lie–(Grupper	und Lie–Algebren
	C.1	Definit	bionen
	C.2	Beispie	ele
		C.2.1	SO(3)

	C.2.2	U(N)		•																179
	C.2.3	SU(2)																		179
	C.2.4	SU(3)																		180
C.3	Darste	ellungen																		180

OT. Brandes 2010-2013

Wiederum verwende ich für dieses Vorlesungsskript eine Reihe von Textbüchern. Im Folgenden sind, wie im Skript selbst, meist nur die AUTORENNAMEN angegeben. T. Brandes, Berlin 2010.

1. ELEKTROSTATIK

1.1 Einführung

1.1.1 Coulomb-Gesetz

(z.B. NOLTING) Ausgangspunkt der Elektrostatik ist die Tatsache, dass es zwei Sorten von Ladungen (negativ und positiv) gibt und dass geladene Körper Kräfte aufeinander ausüben.

Die Kraft zwischen zwei punktförmigen Ladungen q_1 , q_2 , die an den Orten \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 ruhen, ist

$$\mathbf{F} = kq_1 q_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3}, \quad \text{Coulomb-Kraft}$$
(1.1)

 mit

$$k = 1$$
, Gauß-System (cgs-System) (1.2)

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \quad \varepsilon_0 = 8,8543 \times 10^{-12} As/Vm, \quad \text{Influenzkonstante, SI-System}$$
(1.3)

Mit den Systemen (cgs, SI) wird es im Skript manchmal hin und her gehen: daran muss man sich gewöhnen, da viele gute Lehrbücher immer noch cgs benutzen. Für konkrete Zahlenwerte und Experimente braucht man natürlich SI.

Definition Die Ladungsdichte eines Systems von N Punktladungen q_i an den festen Orten \mathbf{r}_i

$$\rho(\mathbf{r}) \equiv \sum_{i=1}^{N} q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$
(1.4)

mit der dreidimensionalen Delta-Funktion. Die Gesamtladung Q_N dieses Systems ist

$$Q_N = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N q_i.$$
(1.5)

Häufig approximiert man die 'pathologische' Summe über Delta-Distributionen durch eine glatte Funktion, die die Ladungsdichte approximiert, z.B. $\rho = \text{const}$ in einem bestimmten endlichen Raumbereich für eine homogene Ladungsdichte.

Die Coulombkraft ist additiv, es gilt das Superpositionsprinzip; die Kraft auf eine Ladung q am Ort \mathbf{r} ist

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3}.$$
 (1.6)

Das Superpositionsprinzip ist ein wichtiger Bestandteil der Theorie des Elektromagnetismus. Es gilt für die mikroskopischen Punktladungen, nicht jedoch für makroskopische Körper (z.B. REBHAN).

1.1.2 Elektrisches Feld

Definition Das durch eine statische Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}) \equiv \sum_{i=1}^{N} q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ erzeugte elektrische Feld wird definiert durch

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3}.$$
 (1.7)

Das ist also die Kraft pro Punktladung am Ort ${\bf r}.$

Durch die Einführung des Feldbegriffs hat man von der das Feld erzeugenden Ladungsdichte abstrahiert (z.B. Skript FREDENHAGEN, Hamburg 2005). Dieser Schritt ist in der Tat tiefgehender, als es hier zunächst erscheint. In der Elektro*dynamik* bekommt dann das Feld eine eigene Dynamik. Wichtig ist die Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit. Die Quelle des Feldes braucht z.B. gar nicht mehr zu existieren, trotzdem laufen z.B. vorher ausgestrahlte Photonen noch jahrelang durch das Weltall.

Der Ausdruck Gl. (1.7) ist durch seine Herleitung aus dem Coulombgesetz gültig, falls die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}')$ durch Punktladungen an festen, bekannten Orten \mathbf{r}_i erzeugt wird. Diese Orte sind in Anwendungen aber i.A. gar nicht genau bekannt, weshalb der Ausdruck Gl. (1.7) etwas unzweckmäßig ist. In Anwendungen ist es wichtiger, mit glatten Ladungsverteilungen arbeiten zu können. Weiterhin müssen wir über die Rolle von *Rändern* sprechen, die Ladungsverteilungen begrenzen.

AUFGABE: Können verschiedene Ladungsverteilungen dasselbe Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ erzeugen?

Graphisch darstellen läßt sich das Feld mit **Feldlinien** (Faraday). BEISPIELE. Bei der Messung eines Feldes $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ mit Hilfe einer Probeladung q muß man beachten, dass sich durch die Probeladung das Gesamtfeld verändert (z.B. REBHAN, BILD). Idealerweise wählt man deshalb für eine solche Messung den Grenzfall $q \to 0$.

Wir nehmen jetzt Gl. (1.7) als Ausgangspunkt der Elektrostatik für beliebige Ladungsverteilungen $\rho(\mathbf{r})$. Dann läßt sich wegen

$$\nabla \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \tag{1.8}$$

(der Gradient wirkt hier auf \mathbf{r}) das elektrische Feld durch ein Potential ausdrücken;

$\mathbf{E}(\mathbf{r})$	=	$- abla \Phi({f r})$		(1.9)
$\Phi(\mathbf{r})$	≡	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\frac{1}{ \mathbf{r}-\mathbf{r}' },$	elektrostatisches Potential.	(1.10)

Der Gradient gibt die Richtung des steilsten Anstiegs von $\Phi(\mathbf{r})$: die elektrischen Feldlinien stehen also senkrecht auf den Äquipotentiallinien.

1.1.3 Das Gaußsche Gesetz

Man kann die zwei Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$
 (1.11)

direkt aus Gl. (1.7) mittels der Operator-Identität $rot \times \nabla = \nabla \times \nabla = 0$, sowie mit

$$\operatorname{div}\nabla = \nabla\nabla = \Delta$$
, Laplace-Operator (1.12)

und der Gleichung

$$\operatorname{div} E(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \Delta \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|},\tag{1.13}$$

(wobei der Laplace-Operator auf \mathbf{r} wirkt und Integration und Differentiation vertauscht wurden) herleiten. Dabei muß in der letzten Gleichung die Identität (AUFGABE)

$$\Delta \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{1.14}$$

mit der dreidimensionalen Delta-Funktion benutzt werden.

Ein besseres physikalisches Verständnis der obigen Maxwell-Gleichungen folgt aus folgenden Überlegungen: Die Gleichung rot $\mathbf{E} = 0$ folgt zunächst einfach daraus, dass das statische elektrische Feld ein Potential hat, mit den aus der Mechanik bekannten Konsequenzen (Wegunabhängigkeit der Arbeit, SKRIPT MECHANIK).

Die Gleichung div $\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$ hat eine etwas tiefere Bedeutung. Wir leiten sie über das Gaußsche Gesetz des elektrischen Flusses ab.

Definition Der **Fluss** eines Vektorfeldes $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ durch ein Flächenelement mit nach außen zeigendem Normalenvektor $d\mathbf{A}$ an der Stelle \mathbf{r} ist durch das Skalarprodukt $\mathbf{E}(\mathbf{r})d\mathbf{A} = |\mathbf{E}(\mathbf{r})||d\mathbf{A}|\cos\theta$ definiert, wobei θ der Winkel zwischen $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ und $d\mathbf{A}$ ist (SKIZZE).

Wir betrachten eine Punktladung q im Ursprung. Der entsprechende Fluss durch einen Teil dA der Oberfläche einer Kugel mit Radius r_0 um den Ursprung ist dann

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})d\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r_0^2} dA,\tag{1.15}$$

der Gesamtfluß durch diese Kugeloberfläche ist also $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r_0^2} 4\pi r_0^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$. Die Radius-Abhängigkeit hat sich durch das $1/r^2$ -Verhalten der Coulombkraft herausgekürzt (E. M. PURCELL, 'Elektrizität und Magnetismus'. J. SCHWINGER, 'Classical Electrodynamics'). Jetzt betrachten wir ein Gebiet mit beliebig geformter Oberfläche O um die Punktladung (z.B. birnenförmig), wobei alle Geraden von der Ladung zur Oberfläche im Gebiet enthalten sein sollten (diese Einschränkung kann später wegfallen, ist aber für die folgende Herleitung zweckmäßig). Dann läßt sich jedes Flächenelement $d\mathbf{A}$ auf O einem Flächenelement $d\mathbf{a}$ auf einer kleinen Kugel mit Radius r_0 um q wie folgt zuordnen:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})d\mathbf{A} = |\mathbf{E}(\mathbf{r})||d\mathbf{A}|\cos\theta, \quad \text{Fluss durch Teil von } O$$
(1.16)

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} |d\mathbf{a}| \frac{r^2}{r_0^2}, \quad \text{Wegen } \frac{|d\mathbf{A}|\cos\theta}{|d\mathbf{a}|} = \frac{r^2}{r_0^2}, \text{SKIZZE}$$
(1.17)

$$= \mathbf{E}(\mathbf{r}_0)d\mathbf{a}$$
, Fluss durch Teil der kleinen Kugel um q . (1.18)

Durch Integration ergibt sich daraus

$$\int \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}, \quad \text{Gaußsches Gesetz.}$$
(1.19)

Das Integral über den elektrischen Fluß durch eine die Ladung q einschließende Oberfläche O ergibt die eingeschlossene Ladung q, geteilt durch ε_0 . Durch Summation über mehrere Punktladungen erhält man dasselbe Ergebnis auch für eine beliebige Ladungsverteilung, q ist dann die eingeschlossene Gesamtladung. Wichtig ist, dass Ladungen außerhalb des betrachteten Gebietes nichts beitragen.

Mit Hilfe des $Gau\betaschen$ Integralsatzes folgt jetzt die entsprechende differentielle Form der Maxwell-Gleichung:

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int dV \rho = \frac{q}{\varepsilon_0} = \int_O \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{A}, \quad \text{Gaußsches Gesetz.}$$
(1.20)

$$= \int dV \mathrm{div} \mathbf{E}, \quad \mathrm{Gau} \beta \mathrm{scher Integralsatz.}$$
(1.21)

Der Vergleich beider Seiten erfordert nämlich wegen der Beliebigkeit des Integrationsgebietes, dass die Integranden übereinstimmen müssen, d.h.

$$\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \tag{1.22}$$

Dieses ist im Gegensatz zum Gaußschen Gesetz eine lokale Formulierung: das Feld wird an jedem Ort mit seinen Quellen in Beziehung gesetzt.

1.1.4 Anwendungen des Gaußschen Gesetzes

In wenigen, einfachen Fällen läßt sich mit dem Gaußschen Gesetz das elektrische Feld einer Ladungsverteilung sehr einfach bestimmen.

AUFGABE: a) Kugelförmige Ladungsverteilung; b) unendlich ausgedehnte Platte mit konstanter Flächen-Ladungsdichte σ .

1.2 Die Poisson-Gleichung

Aus div $\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ und $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ folgt sofort die eigentlich wichtigste Gleichung der Elektrostatik;

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}, \quad \text{Poisson-Gleichung}$$
(1.23)

Der Spezialfall für $\rho = 0$ (keine Ladungen) hat einen eigenen Namen;

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}) = 0$$
, Laplace-Gleichung. (1.24)

Die Poisson-Gleichung kann im Prinzip sofort trivial gelöst werden, falls im gesamten Raum \mathbb{R}^3 die Ladungverteilung $\rho(\mathbf{r})$ bekannt ist: wir haben dann nämlich sofort unsere bereits in Gl. (1.9) hergeleitete Integraldarstellung

$$\Phi(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}, \qquad (1.25)$$

aus der wir auch nochmals durch Anwenden des Laplaceoperators

$$\Delta_{\mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \Delta_{\mathbf{r}} \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$$
(1.26)

die wichtige Beziehung

$$\Delta_{\mathbf{r}} \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{1.27}$$

ablesen.

Allerdings ist es unrealistisch, die Kenntnis von $\rho(\mathbf{r})$ im gesamten Raum \mathbb{R}^3 anzunehmen. In der Praxis hat man es meist mit allgemeinen Raumgebieten G zu tun. Weiterhin sind diese Gebiete häufig berandet, und man kann z.B. den Wert des Potentials auf dem Rand ∂G des Gebiets vorgeben und untersuchen, wie das Potential im Inneren von Gdann aussieht. Die Poisson-Gleichung soll also als **Randwertaufgabe** gelöst werden.

BEISPIEL (häufig benutzt in der Theorie der Elektrolyte): zwei parallele, unendlich ausgedehnte Platten, jede auf einem konstanten Potential gehalten. Wie sieht das Potential (und damit über $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$ das Feld) zwischen den Platten bei Anwesenheit einer Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ aus?

1.2.1 Greensche Funktion

(z.B. JACKSON, NOLTING) Die Poisson-Gleichung ist eine Laplace-Gleichung mit einem inhomogenen Term $-\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$ auf der rechten Seite. Die Lösung beinhaltet also zwei Schwierigkeiten: a) die Erfüllung der Randbedingungen, und b) gleichzeitig die Gleichung für die vorgegebene Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ zu erfüllen, die ja beliebig kompliziert sein

kann. Der Trick besteht darin, die Linearität der Poisson-Gleichung auszunutzen und sie in zwei Schritten zu lösen; i. W. erst a) und dann b). Er besteht darin, zunächst die Lösung (d.h. das Potential) für eine Punktladung der Stärke q = 1 zu bestimmen, unter Berücksichtigung der korrekten Randbedingungen:

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \text{Greensche Funktion } G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \tag{1.28}$$

Hierbei ist der Vorfaktor 4π Konvention. Man findet sofort eine Lösung für die Greensche Funktion, nämlich

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},\tag{1.29}$$

denn wir wissen ja bereits, dass $\Delta \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ gilt. AUFGABE: Verifizieren Sie $\Delta \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ nochmals durch Fouriertransformation von

$$V(\mathbf{r}) \equiv \frac{e^{-\alpha r}}{r}, \quad a > 0, \quad \text{Yukawa-Potential}$$
(1.30)

im Limes $\alpha \to 0$.

Die Greensche Funktion $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ in Gl. (1.28) ist allerdings ohne weitere Einschränkungen nicht eindeutig. Wir zeigen jetzt, wie man die Lösung der Poisson-Gleichung zunächst formal mittels der Greenschen Funktion darstellt. Dann werden wir Randbedingungen festlegen, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r'})$ und damit die Lösung der Poisson-Gleichung $\Delta \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$ eindeutig machen, und schließlich die Berechnung von $G(\mathbf{r}, \mathbf{r'})$ auf das aus der Quantenmechanik bekannte Eigenwertproblem (z.B. 'Teilchen im Kasten') zurückführen.

Satz 1. Die Lösung der Poisson-Gleichung $\Delta \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$ auf einem Gebiet V mit Rand ∂V kann mit Hilfe der Greenschen Funktion $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, Gl. (1.28) geschrieben werden als

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d\mathbf{r}' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} d\mathbf{r}' \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \right].$$
(1.31)

Die Lösung wird eindeutig für **Dirichlet-Randbedingungen** (Potential $\Phi(\mathbf{r}')$ auf dem $Rand \ \partial V \ vorgegeben) \ und \ f\"{u}r \ von-Neumann-Randbedingungen \ (elektrische \ Feld-V) \ (elektrische \ Feld-V)$ Normale $\frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n'}$ auf dem Rand ∂V vorgegeben), mit entsprechenden Bedingungen für die Greensche Funktion;

$$\begin{array}{lll} G(\mathbf{r},\mathbf{r}') &=& 0, \quad \mathbf{r}' \in \partial V, \quad \text{Dirichlet-RB} \\ \frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'} &=& -\frac{4\pi}{S}, \quad \mathbf{r}' \in \partial V, \quad S \text{ Gesamtfläche des Rands bei von-Neumann-RB.} \end{array}$$

Wir zeigen zunächst die allgemeine Darstellung Gl. (1.31), die aus einer kurzen Rechnung mit Hilfe des sogenannten Greenschen Theorems folgt: Seien ϕ und ψ zwei skalare Funktionen, dann gilt für die Divergenz von $\mathbf{A} \equiv \phi \nabla \psi$

$$\nabla(\phi\nabla\psi) = \phi\Delta\psi + \nabla\phi\nabla\psi \tag{1.32}$$

mit dem Laplace-Operator Δ . Dann folgt aus dem Gaußschen Integralsatz $\int_V \text{div} \mathbf{A} = \int_{\partial V} \mathbf{A} \mathbf{n}$ (mit dem Normalenvektor \mathbf{n})

$$\int_{V} \operatorname{div} \mathbf{A} \equiv \int_{V} \nabla(\phi \nabla \psi) = \int_{V} \left[\phi \Delta \psi + \nabla \phi \nabla \psi \right] = \int_{\partial V} \phi \nabla \psi \mathbf{n} = \int_{\partial V} \phi \frac{\partial \psi}{\partial n}, \quad (1.33)$$

wobe
i $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ einfach die Ableitung in Normalenrichtung (senkrecht zu
 ∂V) ist, die durch das Skalarprodukt des Normalenvektors **n** mit dem Gradienten entsteht. Diese Gleichung schreiben wir zweimal auf, einmal mit ϕ und ψ vertauscht, und subtrahieren;

$$\int_{V} \left[\phi \Delta \psi + \nabla \phi \nabla \psi \right] = \int_{\partial V} \phi \frac{\partial \psi}{\partial n}$$
(1.34)

$$\int_{V} \left[\psi \Delta \phi + \nabla \psi \nabla \phi \right] = \int_{\partial V} \psi \frac{\partial \phi}{\partial n}$$
(1.35)

$$\rightarrow \int_{V} \left[\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi \right] = \int_{\partial V} \left[\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right], \quad \text{Greensches Theorem.}$$
(1.36)

Jetzt setzen wir darin $\phi(\mathbf{r}') = \Phi(\mathbf{r}')$ (Potential) und $\psi(\mathbf{r}') = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ (Greensche Funktion, **r** ist hier bloß ein Parameter);

$$\int_{V} \left[\Phi \Delta G - G \Delta \Phi \right] = \int_{\partial V} \left[\Phi \frac{\partial G}{\partial n'} - G \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right]$$
(1.37)

$$\longrightarrow \int_{V} \left[\Phi(-4\pi)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - G\frac{-\rho}{\varepsilon_{0}} \right] = \int_{\partial V} \left[\Phi \frac{\partial G}{\partial n'} - G\frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right]$$
(1.38)

$$\rightsquigarrow \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d\mathbf{r}' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \right],$$

womit Gl. (1.31) gezeigt ist.

Die Eindeutigkeit lassen wir als AUFGABE (s.a. Lehrbücher).

Für Dirichlet-Randbedingungen und die Wahl $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ mit $\mathbf{r}' \in \partial V$ verschwindet der erste Term im Flächenintegral in Gl. (1.31), und es wird alles durch das Potential auf dem Rand ∂V und die Ladungsdichte in V festgelegt;

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d\mathbf{r}' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} d\mathbf{r}' \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'}, \quad \text{Dirichlet RB} .$$
(1.39)

Wenn man $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ hat, ist das Potential $\Phi(\mathbf{r})$ damit also einfach durch eine Integration über die Quellen des Feldes, d.h. die Ladungen $\rho(\mathbf{r})$, und eine Integration über den Rand eindeutig festgelegt.

Für von-Neumann-RB mit $\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'} = -\frac{4\pi}{S}$ für $\mathbf{r}' \in \partial V$ ist es fast ganz analog (vgl. JACKSON, NOLTING).

1.2.2 Konstruktion der Greenschen Funktion

Wir verwenden orthogonale Funktionssysteme, wie wir sie in der Quantenmechanik kennengelernt haben: Sei $\{\phi_n(\mathbf{r})\}$ eine Basis von Eigenfunktionen einer Operatorgleichung

von Typ

$$\mathcal{H}\phi_n(\mathbf{r}) = E_n \phi_n(\mathbf{r}) \tag{1.40}$$

mit reellen Eigenwerten E_n . Die $\phi_n(\mathbf{r})$ sollen Randbedingungen erfüllen, z.B. $\phi_n(\mathbf{r}) = 0$ für $\mathbf{r} \in \partial V$, wobei ∂V z.B. der Rand eines Kastens (Gebietes V) ist. Die $\{\phi_n(\mathbf{r})\}$ sollen in V ein vollständiges Orthogonalsystem bilden, d.h.

$$\sum_{n} \phi_n^*(\mathbf{r})\phi_n(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \int d\mathbf{r} \phi_n^*(\mathbf{r})\phi_m(\mathbf{r}) = \delta_{nm}.$$
 (1.41)

Daraus folgt durch Anwenden von \mathcal{H}^1

$$\mathcal{H}\sum_{n}\phi_{n}^{*}(\mathbf{r})\phi_{n}(\mathbf{r}')=\sum_{n}E_{n}\phi_{n}^{*}(\mathbf{r})\phi_{n}(\mathbf{r}').$$
(1.42)

Wenn wir also definieren

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv \sum_{n} \frac{1}{E_n} \phi_n^*(\mathbf{r}) \phi_n(\mathbf{r}'), \qquad (1.43)$$

kürzt sich bei Anwenden von \mathcal{H} der Eigenwert E_n heraus, d.h.

$$\mathcal{H}G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{1.44}$$

Das ist aber genau die Definitionsgleichung der Greenschen Funktion zur Poisson-Gleichung, wenn wir \mathcal{H} mit $\frac{-1}{4\pi}\Delta$ identifizieren, wobei Δ der Laplace-Operator ist. In der Quantenmechanik war

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\tag{1.45}$$

gerade der Hamilton-Operator eines freien Teilchens der Masse m. Bis auf die Konstanten $\hbar, 4\pi, m$ haben wir also exakt das gleiche mathematische Problem vorliegen, und wir können unser quantenmechanisches Wissen auf die Elektrodynamik übertragen! Es genügt also die Kenntnis eines jeweils vollständigen Basissystems mit den korrekten Randbedingungen, um die Greensche Funktion und damit die Lösung der Poisson-Gleichung zu konstruieren (jedenfalls für die Fälle, wo eine eindeutige Lösung möglich ist: Dirichlet und von-Neumann).

BEISPIEL: ebene Wellen, $V = \mathbb{R}^3$, die 'Quantenzahl' *n* ist jetzt der kontinuierliche **k**-Vektor, die Summe über *n* wird ein Integral über **k**, die Basis ist

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}},\tag{1.46}$$

¹ Der Operator \mathcal{H} wirkt nur auf die **r**-Koordinate. In Dirac-Notation kann man schreiben $\mathcal{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$. Dann wird $G = \sum_n \frac{1}{E_n} |n\rangle \langle n|$ und $\mathcal{H}G = \sum_n |n\rangle \langle n| = 1$ als Operatorgleichung mit dem Einheitsoperator 1. Der 'Green-Operator' G ist also nichts anderes als die Inverse des Operators \mathcal{H} .

Wir haben mit $\mathcal{H} \equiv -\frac{1}{4\pi}\Delta$ und

$$-\frac{1}{4\pi}\Delta\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}k^{2}\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$$
(1.47)

$$\rightsquigarrow G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int d\mathbf{k} \frac{4\pi}{k^2} \phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{4\pi}{k^2} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}'-\mathbf{r})} = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$
(1.48)

Im letzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass die Fourier-Rücktransformierte von $\frac{4\pi}{k^2}$ gerade das Coulomb-Potential ist bzw. die Fourier-Transformierte von 1/r in drei Dimensionen gerade $\frac{4\pi}{k^2}$, vgl. die Aufgabe oben.

mensionen gerade $\frac{4\pi}{k^2}$, vgl. die Aufgabe oben. Wir erhalten also für dieses (triviale) Beispiel die bereits bekannte Greensche Funktion der Poisson-Gleichung im \mathbb{R}^3 'ohne Randbedingungen', d.h.

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (1.49)$$

wie es sein muss, vgl. Gl. (1.9).

Für zeitabhängige Probleme wird die Greensche Funktion auch als **Propagator** bezeichnet ². Das elektrostatische Beispiel Gl. (1.49) interpretieren wir so: Der Einfluß der Ladungen am Ort \mathbf{r}' wird durch die Greensche Funktion $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ an den Ort \mathbf{r} 'propagiert', um dort das mit den Randbedingungen kompatible Potential $\Phi(\mathbf{r})$ zu erzeugen.

1.2.3 Dirichlet-RB für Halbraum z > 0, Spiegelladungen

Die Ebene z = 0 sei eine geerdete Äquipotentialfläche mit Potential $\Phi = 0$. Hier sind die Basisfunktionen, die für z = 0 verschwinden,

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{2^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}_{\parallel}\mathbf{x}} \sin(kz), \quad \mathbf{x} \equiv (x, y), \quad \mathbf{k}_{\parallel} \equiv (k_x, k_y).$$
(1.50)

Es ist

$$\int dk \sin(kz) \sin(kz') = \frac{1}{2} \int dk \left[\cos(k(z-z')) - \cos(k(z+z')) \right] \\ = \frac{2\pi}{2} \left[\delta(z-z') - \delta(z+z') \right] = \frac{2\pi}{2} \delta(z-z'), \quad (1.51)$$

denn z und z' sind beide positiv, und der sin-Anteil muss mit $\frac{2^{1/2}}{(2\pi)^{1/2}}$ normiert sein. Wir haben also die Greensche Funktion

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int d\mathbf{k} \frac{4\pi}{\mathbf{k}^2} \phi^*_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}')$$
(1.52)

$$= \frac{2}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{4\pi}{\mathbf{k}^2} e^{i\mathbf{k}_{\parallel}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \frac{1}{2} \left[\cos(k(z-z')) - \cos(k(z+z')) \right]. \quad (1.53)$$

² Der 'Green-Operator' G zum Operator \mathcal{H} ist dann die Inverse des Operators $\mathcal{H} - \omega$ ('Resolvente'), wobei ω die Frequenzvariable beim Übergang von der Zeitdomäne in den Frequenzraum ist.

Wir können die cos-Terme wieder in Exponentialfunktionen umwandeln. Dann kann man im Integral aber $k \to -k$ setzen, ohne dass sich etwas ändert, und wir haben

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{4\pi}{\mathbf{k}^2} \frac{1}{2} \left[e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} - e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-S\mathbf{r}')} \right], \quad S\mathbf{r}' \equiv (x', y', -z') \quad (1.54)$$
$$= \frac{1}{(1.55)} - \frac{1}{(1.55)}$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - S\mathbf{r}'|}.$$
 (1.55)

(AUFGABE: Prüfen Sie nach, dass $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ die Definitionsgleichung Gl. (1.28) erfüllt.) Dieses Ergebnis hat eine wichtige physikalische Interpretation, nämlich die von fiktiven **Spiegelladungen** in dem (von echter Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ freien) Halbraum z < 0 mit entgegengesetzem Vorzeichen! Unsere Lösung der Poisson-Gleichung lautet ja

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\mathbf{r}' \left[\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - S\mathbf{r}'|} \right], \quad z > 0.$$
(1.56)

Der zweite Term unter dem Integral ist gerade das Potential einer an z = 0 gespiegelten Ladungsdichte mit entgegengesetztem Vorzeichen. Für eine punktförmige Ladung q in z > 0 kann man sich das z.B. ganz schnell anhand des Feldlinienverlaufs klarmachen (SKIZZE, vgl. auch die Diskussion der Bildladungsmethode in den Lehrbüchern).

AUFGABE: a) Berechnen Sie einen formalen Ausdruck für $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ für den Raum zwischen zwei parallelen, unendlich ausgedehnten geerdeten Platten (Potential Null) im Abstand *d* mit der obigen Methode (Summation/Integration über ein vollständiges Funktionensystem). b) Interpretieren Sie das Ergebnis mit Hilfe von Spiegelladungen. Wieviele Spiegelladungen benötigt man?

1.2.4 Ladungen auf dem Rand

(z.B. NOLTING) Im obigen Beispiel betrachten wir wieder die Ebene bei z = 0 als Rand des Halbraums z > 0 (Äquipotentialfläche mit Potential Null). Das elektrische Feld $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$ muss als Gradient des Potentials bei z = 0 also senkrecht auf der Ebene stehen. Konkret ist

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d\mathbf{r}' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}'), \quad Gl. (1.39), \ \Phi = 0 \text{ auf } z = 0$$
(1.57)

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d\mathbf{r}' \left[\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} - \frac{\mathbf{r} - S\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - S\mathbf{r}'|^3} \right] \rho(\mathbf{r}')$$
(1.58)

Beiz=0ist

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - x', y - y', -z'), \quad \mathbf{r} - S\mathbf{r}' = (x - x', y - y', z')$$
 (1.59)

und

$$\mathbf{E}(x, y, z = 0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d\mathbf{r}' \frac{-2z'}{\left((x - x')^2 + (y - y')^2 + z'^2\right)^{3/2}} \rho(\mathbf{r}') \mathbf{e}_z \qquad (1.60)$$

mit dem Einheitsvektor \mathbf{e}_z in z-Richtung.

Fordert man nun zusätzlich für den Außenraum z < -d < 0 ein verschwindendes Feld, $\mathbf{E} = 0$, so muss die Platte (Dicke d) an der Stelle $\mathbf{x} = (x, y)$ nach dem Gaußschen Satz eine Flächenladungsdichte

$$\sigma(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x}, z = 0) \mathbf{e}_z \tag{1.61}$$

tragen, um die geforderte Randbedingung $\Phi = 0$ zu erfüllen. Es gilt (benutze ebene Polarkoordinaten)

$$Q \equiv \int d\mathbf{x}\sigma(\mathbf{x}) = \frac{-1}{2\pi} \int_{V} d\mathbf{r}' z' \rho(\mathbf{r}') \int d\mathbf{x} \frac{1}{\left((x-x')^{2} + (y-y')^{2} + z'^{2}\right)^{3/2}}$$

= $-\int_{V} d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}').$ (1.62)

Die gesamte Ladung auf der Platte kompensiert also die gesamte Ladung im Halbraum z > 0. Im Außenraum erscheint das System (Platte + Halbraum z > 0) also als elektrisch neutral, was konsistent mit unserer Annahme $\mathbf{E} = 0$ für den Außenraum ist.

Die Ladung Q muß auf die Platte, falls diese vorher neutral war, von außen aufgebracht werden: entweder 'von Hand' ('isolierende Platte'), oder z.B. durch Verbinden einer 'metallischen Platte' mit einer weiter nicht näher spezifizierten Ladungsquelle, so dass sich das korrekte $\sigma(\mathbf{x})$ 'von selbst' einstellt. In diesem Fall spricht man von einer Influenzladung, die von der Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}')$, die sich 'vor' der Platte befindet, induziert wird. Jedenfalls kann die Bedingung $\Phi = 0$ auf der Platte nicht einfach dadurch erkauft werden, dass man eine isolierte, neutrale Platte in den Raum stellt.

1.2.5 Leiter und Influenzladungen

Die physikalische Realisierung von z.B. Dirichlet-Randbedingungen benötigt streng genommen eine mikroskopische Theorie der Materie, um z.B das Material des Randes zu beschreiben. An dieser Stelle ist die Diskussion von 'Leitern' in der Elektrostatik häufig etwas unbefriedigend, da man plötzlich über Metalle und Isolatoren sprechen muß, was prinzipiell tief in die Quantenmechanik der Festkörper hineinführt. Es ist vielleicht sinnvoll, folgende Definition einzuführen:

Definition Ein abgeschlossenes Gebiet G (mit Rand ∂G) heißt **Leiter**, wenn sich in G die Bedingung Φ =const (konstantes elektrisches Potential) physikalisch realisieren läßt.

Dann gilt zunächst

Satz 2. a) Das Innere eines Leiters G ist feldfrei; b) Auf dem Rand ∂G des Leiters steht das elektrische Feld **E** senkrecht und ist an jedem Punkt **r** des Rands mit einer Flächenladungsdichte $\sigma = \varepsilon_0 \mathbf{nE}$ verbunden.

a) folgt aus der Definition $\mathbf{E} = -\nabla \Phi = 0$; der erste Teil von b) daraus, dass der Gradient senkrecht auf Äquipotentialflächen steht. Der zweite Teil von b) folgt aus dem

Gaußschen Gesetz mit div $\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ angewendet auf einen kleinen 'Gauß-Kasten' um den Punkt **r** des Rands: das ergibt die Sprungbedingung für die Normalkomponente des elektrischen Feldes beim Übergang von Inneren zum Äußeren des Leiters.

Physikalische Interpretation: Die Flächenladungsdichte stellt sich auf der Oberfläche des Leiters gerade so ein, dass das äußere Feld 'abgeschirmt', im Inneren des Leiters also exakt zu Null kompensiert wird. Man sagt, das äußere Feld erzeugt auf dem Leiter 'Influenzladungen'.

AUFGABE: Betrachte einen Leiter in Form einer homogenen Kugelschale mit innerem Radius r_0 und äußerem Radius r_1 . Im Mittelpunkt der Kugelschale befinde sich eine Punktladung q. Wie groß ist die Flächenladungsdichte auf dem inneren und dem äußeren Rand der Kugelschale, wenn die Kugelschale insgesamt elektrisch neutral ist?

1.3 Elektrostatische Energie

1.3.1 Punktladungen

(NOLTING) Wir betrachten ein System von N Punktladungen q_i an den Orten \mathbf{r}_i . Die elektrostatische Energie W dieses Systems im \mathbb{R}^3 (ohne Ränder) ist die Arbeit, die verrichtet wird, um die Ladungen aus dem Unendlichen an ihre Orte \mathbf{r}_i zu bringen. Wir bauen das System auf, indem wir die Ladungen eine nach der anderen an ihre Plätze bringen. Die Arbeit für die erste Ladung ist Null. Die Arbeit für die zweite Ladung ist

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}.$$
 (1.63)

Die Arbeit für die dritte Ladung ist

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^2 \frac{q_3 q_j}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_j|},$$
(1.64)

die Arbeit für die *i*-te Ladung ist

$$W_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|},\tag{1.65}$$

die gesamte Arbeit und damit die elektrostatische Energie ist

$$W = \sum_{i=2}^{N} W_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}.$$
 (1.66)

Diese Summe können wir umformen, indem wir uns ein quadratisches Schema (Matrix) vorstellen, in dem die Terme der Summe jeweils Matrixelementen (i, j) entsprechen mit $i \neq j$, d.h. z.B. nur die obere Hälfte der Matrix. Die untere Hälfte würde aber genau das gleiche liefern, da die Summanden $\frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$ symmetrisch in (i, j) sind. Wir können also schreiben

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i\neq j}^{N} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad \text{elektrostatische Energie} , \qquad (1.67)$$

wobei $\sum_{i\neq j}^{N}$ eine Doppelsumme ohne die 'Diagonalterme' i=j ist.

1.3.2 Integralausdrücke

Die Frage ist jetzt, wie sich die elektrostatische Energie durch das Potential oder das Feld, insbesondere auch bei Anwesenheit von Randflächen, ausdrücken läßt. Zunächst können wir Gl. (1.67) umschreiben mit der Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}) \equiv \sum_{i=1}^{N} q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ als

$$W_{\rm el} \equiv \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},\tag{1.68}$$

wobei allerdings $W_{\rm el}$ und W sich um die **Selbstenergie**-Terme unterscheiden, die in der Summe Gl. (1.67) den ausgeschlossenen Diagonaltermen i = j entsprechen. Für gutartige, kontinuierliche Ladungsverteilungen spielen die Punkte $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ im Integral Gl. (1.68) keine Rolle, für Punktladungen hat man aber mit Gl. (1.68) ein Problem. Wir können, falls die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ im gesamten \mathbb{R}^3 wieder bekannt ist, $W_{\rm el}$ umschreiben mittels Gl. (1.9),

$$\Phi(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$
(1.69)

als

$$W_{\rm el} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}). \qquad (1.70)$$

BEISPIEL: Punktladung q bei $(0, 0, z_0 > 0) \equiv \mathbf{r}_0$ vor geerdeter Platte z = 0. In diesem Fall ist nach Gl. (1.56) mit $\rho(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\mathbf{r}' \left[\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - S\mathbf{r}'|} \right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{q}{|\mathbf{r} - S\mathbf{r}_0|} \right]$$
(1.71)

und wir haben mit $S\mathbf{r}_0 = (0, 0, -z_0)$ den Ausdruck

$$W'_{\rm el} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-q^2}{|\mathbf{r}_0 - S\mathbf{r}_0|} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-q^2}{2z_0},\tag{1.72}$$

wobei wir in W'_{el} die Selbstenergie abgezogen haben. Das ist die *Hälfte* der elektrostatischen Energie zweier entgegengesetzter Punktladungen q im Abstand $2z_0$, d.h. dem System: Ladung bei \mathbf{r}_0 , Bildladung bei $S\mathbf{r}_0$. Wieso ist die Energie nur halb so groß? Im Halbraum z < 0 ist das tatsächliche Feld Null, man bekommt für die elektrostatische Energie im \mathbb{R}^3 deshalb genau die Hälfte dessen, was man für ein reales System: Ladung qbei \mathbf{r}_0 , Ladung -q bei $S\mathbf{r}_0$ hätte (vergleiche die Feldlinienbilder der beiden Fälle). Es ist offensichtlich für die Interpretation am günstigsten, die elektrische Energie direkt dem *Feld* zuzuordnen.

Das ist möglich, indem man den Ausdruck Gl. (1.70) umformt: Wir schreiben

$$W_{\rm el} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) = \frac{-\varepsilon_0}{2} \int d\mathbf{r} \Delta \Phi(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d\mathbf{r} \nabla \Phi(\mathbf{r}) \nabla \Phi(\mathbf{r}) \quad (1.73)$$
$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \int d\mathbf{r} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2, \quad (1.74)$$

wobei Randterme im Unendlichen verschwinden. Das liefert die Definition

$$w_{\rm el}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2$$
, Energiedichte (elektrostatisches Feld). (1.75)

Mit dieser Definition ist die elektrostatische Energie stets positiv! Das liegt daran, dass die singulären Anteile der Selbstenergie, d.h. die in der Summe Gl. (1.67) ausgeschlossenen Terme i = j, in Gl. (1.73) noch enthalten sind.

1.3.3 Ladungsverteilung im *externen* Potential Φ_{ext}

Die Energie $W_{\rm el}$ einer Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ war durch Gl. (1.68) und Gl. (1.70),

$$W_{\rm el} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})$$
(1.76)

gegeben, wobei $\Phi(\mathbf{r})$ das durch $\rho(\mathbf{r})$ erzeugte Potential $\Phi(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ ist. Von diesem Ausdruck zu unterscheiden ist die Energie einer Ladungsverteilung in einem gegebenen *äußeren* Potential Φ_{ext} , das z.B. durch eine äußere ('bereits vorhandene') Ladungsdichte $\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ erzeugt wird. Die Energie einer Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ in solch einem Potential ist dann einfach durch die Definition der potentiellen Energie $q\Phi_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ einer einzelnen Punktladung am Ort \mathbf{r} gegeben; sie lautet also

$$W_{\text{ext}} = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \Phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}), \qquad (1.77)$$

ohne den Faktor $\frac{1}{2}$, der bei $W_{\rm el}$ auftritt.

1.3.4 Kapazitätskoeffizienten

Wir betrachten ein System von N voneinander getrennen Leitern G_i und vorgegebenen Potentialen Φ_i , i = 1, ..., N (SKIZZE). Insbesondere sind damit also Potentiale Φ_i auf (getrennten) Rändern vorgegeben und es liegt ein Dirichlet-Problem zur Laplace-Gleichung

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}) = 0, \quad \Phi|_{\partial G_i} = \Phi_i \tag{1.78}$$

vor (eindeutige Lösbarkeit kann wieder gezeigt werden). Die Gesamtladungen Q_i auf dem *i*-ten Leiter sind damit eindeutig bestimmt, und zwar nach dem Gaußschen Gesetz wegen

$$Q_i = \varepsilon_0 \int_{G_i} d\mathbf{r} \mathrm{div} \mathbf{E} = \varepsilon_0 \int_{\partial G_i} d\mathbf{r} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\varepsilon_0 \int_{\partial G_i} d\mathbf{r} \nabla \Phi(\mathbf{r}).$$
(1.79)

Jetzt multiplizieren wir im selben Problem alle Leiterpotentiale Φ_i mit einem Faktor α . Dann wird wegen der Linearität der Laplace-Gleichung die Lösung $\Phi \to \alpha \Phi$, ebenso werden die Felder und die Gesamtladungen Q_i mit α multipliziert: es besteht also ein allgemeiner linearer Zusammenhang zwischen den Φ_i und den Q_i , den wir durch eine Matrixgleichung

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij} \Phi_j, \quad C_{ij}$$
 Kapazitätskoeffizienten (1.80)

darstellen. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung ist die Matrix C invertierbar. Eine weitere Eigenschaft folgt aus (REBHAN)

Satz 3. Seien $\Phi(\mathbf{r})$ bzw. $\Phi'(\mathbf{r})$ die von Ladungsdichten $\rho(\mathbf{r})$ bzw. $\rho'(\mathbf{r})$ im \mathbb{R}^3 erzeugten Potentiale. Dann gilt

$$\int d\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})\Phi'(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}\rho'(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}), \quad \text{Greensches Reziprozitätstheorem}$$
(1.81)

(BEWEIS durch Einsetzen der Lösung Gl. (1.9) für das jeweilige Potential). Es gilt

Satz 4. Die Matrix der Kapazitätskoeffizienten C_{ij} ist symmetrisch,

$$C_{ij} = C_{ji}.\tag{1.82}$$

Beweis: Das Greensche Reziprozitätstheorem wird hier für zwei identische Geometrien, aber zwei verschiedenen Sätzen Potentialen Φ_i bzw. Φ'_i angewendet:

$$\sum_{i=1}^{N} Q_i \Phi'_i = \sum_{k=1}^{N} Q'_k \Phi_k \rightsquigarrow \sum_{i,j=1}^{N} C_{ij} \Phi_j \Phi'_i = \sum_{k,j=1}^{N} C_{kj} \Phi'_j \Phi_k$$
(1.83)

Jetzt wählen wir speziell

$$\Phi_i = \Phi \delta_{im}, \quad \Phi'_i = \Phi \delta_{in} \rightsquigarrow \Phi^2 C_{nm} = \Phi^2 C_{mn}, \tag{1.84}$$

woraus mit $\Phi \neq 0$ die Behauptung folgt.

Die elektrostatische Gesamtenergie des betrachteten Systems folgt weiterhin zu

$$W_{\rm el} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} Q_i \Phi_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \Phi_i C_{ij} \Phi_j \ge 0, \qquad (1.85)$$

wobei die Positivität wegen $W_{\rm el} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d\mathbf{r} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 \ge 0$, Gl. (1.73), folgt. Aus der Positivität von $W_{\rm el}$ folgt weiterhin $C_{ii} > 0$, während man für $i \neq j$ (LANDAU VIII) $C_{ij} < 0$ zeigen kann.

1.3.5 Kondensator

Der Kondensator ist der Spezialfall N = 2 im obigen Problem der Kapazitätskoeffizienten mit $-Q_1 = Q_2 \equiv Q$, d.h. entgegengesetzen Gesamtladungen auf den zwei Leitern. Mit der Potentialdifferenz

$$U \equiv \Phi_2 - \Phi_1 \tag{1.86}$$

erhält man die lineare Beziehung (AUFGABE)

$$Q = CU, \quad C \equiv \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}}, \quad \text{Kapazität des Kondensators.}$$
 (1.87)

Meist wird C direkt über die Lösung eines elektrostatischen Problems und nicht über die einzelnen Koeffizienten C_{ij} ausgerechnet.

1.3.6 Der Satz von Thomson (Lord Kelvin)

Die elektrostatische Energie W_{el} eines Systems von Leitern hat eine Extremaleigenschaft bezüglich virtueller Verschiebungen der Oberflächenladungen auf den Leitern. Es gilt (LANDAU, REBHAN)

Satz 5 (Satz von Thomson). Die elektrostatische Energie W_{el} eines Systems von Leitern G_i ist minimal bezüglich virtueller Verschiebungen der Oberflächenladungen auf den Leitern, so dass die Gesamtladungen auf den Leitern sich jeweils nicht ändern.

Zum Beweis (LANDAU) betrachten wir die elektrostatische Energie W_{el} als Funktional der sie erzeugenden Ladungsdichten und bilden die erste Variation,

$$W_{\rm el} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d\mathbf{r} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d\mathbf{r} \nabla \Phi(\mathbf{r}) \nabla \Phi(\mathbf{r})$$
(1.88)

$$\delta W_{\rm el} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d\mathbf{r} 2\nabla \Phi(\mathbf{r}) \left[\delta \nabla \Phi(\mathbf{r}) \right] = -\varepsilon_0 \int d\mathbf{r} \nabla \Phi(\mathbf{r}) \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) \qquad (1.89)$$

$$= -\varepsilon_0 \int d\mathbf{r} \left[\operatorname{div} \left(\Phi(\mathbf{r}) \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right) - \Phi(\mathbf{r}) \operatorname{div} \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right]$$
(1.90)

$$= \varepsilon_0 \int d\mathbf{r} \Phi(\mathbf{r}) \mathrm{div} \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}), \qquad (1.91)$$

wobei das letzte Integral wegen

$$\operatorname{div}\delta\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\delta\rho(\mathbf{r}) \tag{1.92}$$

sich über die Leiter erstreckt, denn nur dort wird ja die Ladungsdichte variiert. In den Leitern G_i gilt aber $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_i$ const, so dass

$$\delta W_{\rm el} = \sum_{i} \Phi_i \varepsilon_0 \int_{G_i} d\mathbf{r} \delta \rho(\mathbf{r}) = 0, \qquad (1.93)$$

da die Variation die Gesamtladung auf jedem Leiter G_i nicht ändert. Deshalb führt die tatsächlich nach den Gesetzen der Elektrostatik realisierte Ladungsverteilung zu einem Extremum der elektrostatischen Energie W_{el} (man muß jetzt noch argumentieren, dass es sich wirklich um ein Minimum und kein Maximum handelt!).

Aus dem Satz von Thomson folgt ein 'Corollar': Wird ein ungeladener Leiter G in ein gegebenes elektrostatisches Feld eingeführt, so werden Influenzladungen so induziert, dass sich die elektrostatische Energie des Gesamtsystems *absenkt*. Eine virtuelle Konfiguration ohne Influenzladungen würde nämlich das Gebiet G nicht feldfrei machen und die gleiche Energie wie ohne den Leiter G besitzen. Anschaulich gesehen verdrängt der Leiter Feldlinien aus dem Gebiet G. Wegen der Absenkung der Energie ist die entsprechende Kraft auf den einzuführenden Leiter eine *anziehende* Kraft.

1.4 Multipolentwicklung

Häufig ist es zu aufwendig, Potentiale, Felder und Energien für eine gegebene Ladungsverteilung durch Integralausdrücke wie Gl. (1.9) darzustellen. Man möchte beispielsweise die Wechselwirkungsenergie zweier Moleküle nicht durch deren volle Ladungsverteilungen, sondern durch einfachere, aus den Ladungsverteilungen abgeleitete Größen berechnen. Das führt auf das Konzept des Dipols, Quadrupols etc., und dem Konzept der Dipol-Dipol-Wechselwirkung etc.

Der Ansatzpunkt hierfür ist die Entwicklung von Ausdrücken wie

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$
(1.94)

(elektrostatisches Potential) bei räumlich lokalisierte Ladungsverteilungen nach großen Abständen r vom Zentrum der Lokalisierung. Man entwickelt hierzu (z.B. REBHAN)

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{e}_r \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{3(\mathbf{e}_r \mathbf{r}')^2 - \mathbf{r}'^2}{2r^3} + O\left(\frac{r'}{r}\right)^3,$$
(1.95)

wobei $\mathbf{e}_r \equiv \mathbf{r}/r$. Einsetzen liefert die Entwicklung

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{d}\mathbf{e}_r}{r^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2} \frac{\mathbf{e}_r^T \mathbf{Q} \mathbf{e}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r}\right)^4$$
(1.96)

$$q = \int d\mathbf{r}\rho(\mathbf{r}), \quad \text{Gesamtladung}$$
 (1.97)

$$\mathbf{d} = \int d\mathbf{r} \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}), \quad \text{Dipolmoment}$$
(1.98)

$$Q_{ij} = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}), \quad \text{Quadrupolmomenttensor} . \tag{1.99}$$

Der Ausdruck für q und **d** folgt trivial, der für Q_{ij} durch ein explizites Ausschreiben der quadratischen Form in kartesischen Koordinaten (NACHRECHNEN!)

1.4.1 Bemerkung zu Momenten einer Verteilung

Die Definitionen sind analog zu den Momenten einer Verteilungsfunktion. Bei Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist das entsprechende $\rho(\mathbf{r})$ (die Wahrscheinlichkeitsdichte) allerdings positive und normiert,

$$\int d\mathbf{r}\rho(\mathbf{r}) = 1, \quad \rho(\mathbf{r}) \ge 0. \tag{1.100}$$

Ein Beispiel kennen wir mit der Wahrscheinlichkeitsdichte aus der Quantenmechanik

$$\rho(\mathbf{r}) \equiv |\Psi(\mathbf{r})|^2, \qquad (1.101)$$

wobei $\Psi(\mathbf{r})$ eine Wellenfunktion im Ortsraum (z.B. die eines Teilchens im \mathbb{R}^3) ist.

Wir definieren die momentenerzeugende Funktion der Verteilungsfunktion

$$f(\mathbf{k}) \equiv \tilde{\rho}(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \text{Momentenerzeugende Funktion}, \qquad (1.102)$$

was zunächst nichts anderes ist als ihre Fouriertransformierte. Aus $f(\mathbf{k})$ lassen sich durch Differentiation Momente berechnen, z.B.

$$\langle \mathbf{r} \rangle \equiv \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} = i \nabla f(0).$$
 (1.103)

1.4.2 Der Dipol

Wegen seiner Wichtigkeit diskutieren wir den Dipol etwas ausführlicher. Wir fassen nochmals zusammen;

$$\mathbf{d} = \int d\mathbf{r} \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}), \quad \text{Dipolmoment} \tag{1.104}$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{d}\mathbf{e}_r}{r^2}, \quad \text{Dipol-Beitrag zum Potential } (r \to \infty)$$
(1.105)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3(\mathbf{d}\mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r - \mathbf{d}}{r^3}, \quad \text{Dipol-Beitrag zum Feld} \ (r \to \infty), \qquad (1.106)$$

wobei die letzte Gleichung durch Differentiation des Potentials folgt (NACHCHECKEN!) Man beachte, dass die Definition des Dipolmoments **d** i.A. vom Koordinatenursprung abhängt. So hat z.B. eine Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a})$ (Punktladung bei **a**) ein Dipolmoment! Falls die Gesamtladung $q = \int d\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})$ verschwindet, ist die Definition $\mathbf{d} = \int d\mathbf{r}\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})$ allerdings unabhängig vom Koordinatenursprung (AUFGABE: wieso?), d.h. invariant gegenüber Translationen. Dann wird das Fernfeld auch tatsächlich durch das durch **d** erzeugte Feld dominiert.

Das Dipolmoment der Ladungsverteilung zweier entgegengesetzter Punktladungen ist das einfachste Beispiel für einen elementaren Dipol;

$$\rho(\mathbf{r}) \equiv q \left(\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}/2) - \delta(\mathbf{r} + \mathbf{a}/2)\right) \tag{1.107}$$

mit $\mathbf{d} = q\mathbf{a}$. Manchmal definiert man (z.B. NOLTING)

$$\mathbf{p} = \lim_{q \to \infty, \mathbf{a} \to 0} q\mathbf{a}$$
, elementarer Dipol in Richtung \mathbf{a} mit Stärke $|\mathbf{p}|$. (1.108)

Die Energie eines Dipols in einem äußeren Feld bzw. Potential Φ_{ext} läßt sich durch eine Multipolentwicklung von Gl. (1.77) ausdrücken,

$$W_{\text{ext}} = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \Phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \left[\Phi_{\text{ext}}(0) + \mathbf{r} \nabla \Phi_{\text{ext}}(0) + \dots \right]$$
(1.109)

$$= q\Phi_{\rm ext}(0) - \mathbf{dE}_{\rm ext}(0) + \dots$$
(1.110)

mit dem Feld $\mathbf{E}_{\text{ext}}(0) = -\nabla \Phi_{\text{ext}}(0)$. Es ist also

$$W_{\text{ext}}^{\text{Dipol}} = -\mathbf{d}\mathbf{E}_{\text{ext}}, \quad \text{Energie eines Dipols im äußeren Feld } \mathbf{E}_{\text{ext}}.$$
 (1.111)

1.4.3 Höhere Multipole, Kugelflächenfunktionen

Systematische Ausdrücke, die insbesondere bei höheren Multipolen nützlich werden, findet man durch eine Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen, d.h. den aus der Quantenmechanik bekannten $Y_{lm}(\theta, \phi)$, die bei der Lösung der Schrödingergleichung in Polarkoordinaten und der Diskussion des Drehimpulses auftraten. Man kann z.B. die Greensche Funktion zur Poissongleichung nach den $Y_{lm}(\theta, \phi)$ entwickeln. Obwohl sich in diesem Zusammenhang einiges Interessantes über die $Y_{lm}(\theta, \phi)$ lernen läßt, sind diese Rechnungen mehr technischer Art (LEHRBÜCHER E-DYNAMIK).

1.5 Anwendungen der Elektrostatik

1.5.1 Poisson-Schrödinger-Gleichung (Hartree-Gleichungen)

Hier löst man die stationäre Schrödingergleichung (z.B. für Elektronen mit Masse m)

$$\mathcal{H}\Psi_i = E_i \Psi_i, \quad \mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r})$$
 (1.112)

für die Eigenfunktionen in einem Potential $V(\mathbf{r})$, das die Summe aus einem festen äußeren Potential $V_{\text{ex}}(\mathbf{r})$ und einem *selbstkonsistent* zu bestimmenden Potential ist, das von allen anderen Elektronen gemeinsam erzeugt wird;

$$V(\mathbf{r}) = V_{\text{ex}}(\mathbf{r}) + e^2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \rho(\mathbf{r}) \equiv \sum_{j \neq i} |\Psi_j(\mathbf{r})|^2.$$
(1.113)

Die Summe erstreckt sich über alle tatsächlich besetzen Eigenzustände Ψ_j außer dem *i*-ten (dieser Term würde einer Selbstwechselwirkung des Elektrons entsprechen).

Die Hartree-Gleichungen sind i.A. schwer zu lösen. Sie können z.B. iterativ gelöst werden: Man löst zunächst die SG Gl. (1.112) für ein vorgegebenes $\rho(\mathbf{r})$. Mit den so erhaltenen Ψ_j löst man die Poisson-Gleichung, d.h. man berechnet das Integral $e^2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$. Das benutzt man wieder für eine erneute, verbesserte Lösung der SG. Die Hartree-Gleichungen berücksichtigen noch nicht die korrekte Antisymmetrisierung der Wellenfunktionen, die nach dem Pauli-Prinzip gefordert wird und die auf die *Hartree-Fock-Gleichungen* führt. Weiteres z.B. in QUANTENMECHANIK II.

AUFGABE: Ein Elektron bewege sich entlang der z-Achse und befinde sich in einem stationären Zustand mit der Wellenfunktion $\Psi(z)$. a) Wie definiert man sinnvollerweise einen Operator $\hat{\phi}(\mathbf{r})$ des durch das Elektron erzeugten elektrostatischen Potentials am Ort \mathbf{r} ? b) Wie lauten die Ausdrücke für den Erwartungswert und die Varianz von $\hat{\phi}(\mathbf{r})$ im Zustand $\Psi(z)$? c) Leite eine Multipolentwicklung für diese Ausdrücke her. (ZUSATZ): Berechne die Ausdrücke in b) und c) explizit für ein Elektron im Kastenpotential oder in einem harmonischen Potential.

1.5.2 Poisson-Boltzmann-Gleichung

Wir betrachten ein Medium, z.B. eine homogene wässrige Lösung, mit M Sorten von Punktladungen q_{α} , $\alpha = 1, ..., M$ z.B. M = 4 für 2 positive und 2 negative Sorten von Ionen mit jeweils verschiedenen Massen und Ladungen. Die mittlere Massendichte aller $i = 1, ..., N_{\alpha}$ Ladungen der Sorte α an den Orten \mathbf{r}_i werde bei endlicher Temperatur $T \equiv 1/(k_B\beta)$ durch eine glatte Verteilungsfunktion mit einem Boltzmann-Faktor approximiert, d.h.

$$\langle n_{\alpha}(\mathbf{r}) \rangle \equiv \langle \sum_{i=1}^{N_{\alpha}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{i}) \rangle \approx n_{0,\alpha} e^{-\beta q_{\alpha} \Phi(\mathbf{r})}.$$
 (1.114)

Der Boltzmann-Faktor beschreibt eine exponentielle Gewichtung zwischen potentieller (elektrostatischer) Energie $q_{\alpha}\Phi(\mathbf{r})$ und thermischer Energie k_BT am Ort \mathbf{r} , wobei $\Phi(\mathbf{r})$ das von allen Ladungen erzeugte Potential am Ort \mathbf{r} ist. Diese Formel entspricht der barometrischen Höhenformel und wird z.B. auch noch einmal in der STATISTISCHEN MECHANIK/THERMODYNAMIK hergeleitet. Die Dichte $n_{0,\alpha}$ wird als Referenzdichte bei Potential Null bezeichnet. Das Potential $\Phi(\mathbf{r})$ genügt wiederum der Poissongleichung

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{\alpha=1}^{M} q_{\alpha} \langle n_{\alpha}(\mathbf{r}) \rangle = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{\alpha=1}^{M} q_{\alpha} n_{0,\alpha} e^{-\beta q_{\alpha} \Phi(\mathbf{r})}.$$
 (1.115)

Hierbei haben wir - im Vorgriff auf eines der nächsten Kapitel - eine Dielektrizitätszahl $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ mit $\varepsilon_r > 1$ eingefügt, die den Abschirmeffekt des Mediums (z.B. Wasser) beschreibt. Die so entstandene Gleichung

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{\alpha=1}^{M} q_{\alpha} n_{0,\alpha} e^{-\beta q_{\alpha} \Phi(\mathbf{r})}, \quad \text{Poisson-Boltzmann-Gleichung}$$
(1.116)

ist eine *nichtlineare* partielle Differentialgleichung und mathematisch dadurch schwieriger zu behandeln als die Poissongleichung.

AUFGABE: Betrachten Sie den Fall mit M = 1, d.h. einer Sorte von positiven **Gegen-Ionen** mit Ladung q_+ im Halbraum z > 0, die eine konstante, homogene negative Flächenladungsdichte σ auf der Randfläche z = 0 insgesamt elektrisch kompensieren. Lösen Sie hierfür die Poisson-Boltzmann-Gleichung als von-Neumann-Problem. a) Wie lauten die von-Neumann Randbedingungen bei z = 0 und $z = \infty$ hier? b) Bestimmen Sie das Potential $\Phi(z)$ und die Dichte n(z) der Gegen-Ionen. c) Drücken Sie beide Funktionen explizit durch die Einführung der drei Längenskalen aus;

$$b \equiv \frac{2k_B T \epsilon}{|\sigma|q_+}, \quad \text{Gouy-Chapman-Länge}$$
(1.117)
$$\lambda_D \equiv \left(\frac{2n_0 q_+^2}{\epsilon k_B T}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{Debye-Hückel-Länge}$$
(1.118)
$$l \equiv \frac{q_+^2}{\epsilon k_B T}, \quad \text{Bjerrum-Länge.}$$
(1.119)

und interpretieren Sie diese Längenskalen physikalisch.

2. MAGNETOSTATIK

2.1 Einführung

Das Magnetfeld unerscheidet sich konzeptionell vom elektrostatischen Feld, da es kein fundamentales Kraftgesetz für 'magnetische Ladungen' gibt. Ein Kraftgesetz (Ampere, Biot-Savart) ergibt sich für *bewegte* elektrische Ladungen, d.h elektrische Ströme.

2.1.1 Stromdichte und Kontinuitätsgleichung

Obwohl man von Magneto*statik* spricht, müssen sich Ladungen bewegen, um zu magnetischen Erscheinungen zu führen. Wir betrachten deshalb zunächst wieder Punktladungen q_i an zeitabhängigen Positionen $\mathbf{r}_i(t)$.

Definition Ladungsdichte und Stromdichte am Ort **r** eines Systems von N sich bewegender Punktteilchen mit Ladungen q_i an zeitabhängigen Positionen $\mathbf{r}_i(t)$ sind definiert als

$$\rho(\mathbf{r},t) \equiv \sum_{i=1}^{N} q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)), \quad \text{Ladungsdichte}
\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \equiv \sum_{i=1}^{N} q_i \dot{\mathbf{r}}_i(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)), \quad (\text{Ladungs}) \text{Stromdichte.}$$
(2.1)

Hierbei ist $\dot{\mathbf{r}}_i(t)$ die Geschwindigkeit des *i*-ten Teilchens. Die Ladungen q_i wurden hierbei als konstant angenommen.

Satz 6. Ladungs- und Stromdichte erfüllen die Kontinuitätsgleichung,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t) + \operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = 0, \quad \text{Kontinuitätsgleichung.}$$
(2.2)

Zum Beweis: es gilt ja

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t) = -\sum_{i=1}^{N} q_i \dot{\mathbf{r}}_i(t) \nabla_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))$$
(2.3)

Es ist aber für einen Vektor \mathbf{u} , nach dem nicht abgeleitet wird,

$$\mathbf{u}\nabla_{\mathbf{r}}f(\mathbf{r}) = \operatorname{div}\,(\mathbf{u}f(\mathbf{r})). \tag{2.4}$$

Damit folgt dann

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t) = -\sum_{i=1}^{N} q_i \operatorname{div} \dot{\mathbf{r}}_i(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) = -\operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r},t), \qquad (2.5)$$

d.h. die Kontinuitätsgleichung.

Man beachte allerdings, dass wir hier wegen der Delta-Funktionen in den Definitionen Gl. (2.1) mit Distributions-wertigen Skalar-Feldern ($\rho(\mathbf{r}, t)$) und Vektorfeldern ($\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$) arbeiten. In der Praxis möchte man Ladungsdichte und Stromdichte wieder möglichst durch 'gutartige' Vektorfelder approximieren.

Die Kontinuitätsgleichung Gl. (2.2) ist äquivalent zum *Erhaltungssatz der Ladung* (z.B. REBHAN)

Satz 7. Der durch eine geschlossene Fläche ∂V tretende Gesamtstrom ist gleich dem zeitlichen Ladungsverlust des von der Fläche umrandeten Gebiets V.

BEWEIS: Nach der Kontinuitätsgleichung gilt nämlich durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{V} d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t) = \int_{V} d\mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \int_{\partial V} d\mathbf{r} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t).$$
(2.6)

Die linke Seite ist der zeitliche Ladungsverlust, die rechte Seite der durch die geschlossene Fläche ∂V tretende Gesamtstrom, der ja gerade durch das Flächenintegral über die Stromdichte gegeben ist.

AUFGABE: Man mache sich nochmal den genauen Unterschied von Strom und Strom*dichte* anhand von einfachen Beispielen klar.

AUFGABE: Diskutieren Sie die Kontinuitätsgleichung für den Fall, dass sich die Ladungen q_i zeitlich ändern.

2.1.2 Stationäre Stöme

Für stationäre Ströme, wie sie in der Magnetostatik betrachtet werden, soll gelten

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}), \quad \rho = \rho(\mathbf{r}). \tag{2.7}$$

Dann gilt nach der Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r}) = 0.$$
(2.8)

Wie ist der *Strom* eigentlich definiert? Wir betrachten hierzu eine 'Flussröhre', d.h. ein Gebiet V, dass seitlich von einem Zylindermantel Z begrenzt ist, auf dem $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ tangential ist, uns zwei 'Zylinderdeckel' A_1 und A_2 . Aus dem Gaußschen Integralsatz folgt dann,

$$\int_{\partial V} d\mathbf{r} \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$$
(2.9)

$$\rightsquigarrow \quad \int_{A_1} d\mathbf{r} \mathbf{j}(\mathbf{r}) + \int_{A_2} d\mathbf{r} \mathbf{j}(\mathbf{r}) + \int_Z d\mathbf{r} \mathbf{j}(\mathbf{r}) = -I_1 + I_2 + 0 = 0. \quad (2.10)$$

(flapsige Notation für die Flächenintegrale wie immer). Der in Z hineinfliessende Strom muss auch wieder hinausfliessen, und wir können $I = I_1 = -I_2$ für seinen Betrag definieren, der im stationären Fall also unabhängig von dem benutzten Zylinderdeckel der verwendeten Flussröhre ist: durch jeden Querschnitt der Flussröhre fliesst derselbe Strom.

Wir erkennen allerdings auch, dass die Bedingungen Gl. (2.7) nicht mit den mikroskopischen Definitionen Gl. (2.1) kompatibel sind, in denen sich ja die einzelnen Teilchenpositionen $\mathbf{r}_i(t)$ zeitlich ändern müssen, damit überhaupt ein Strom fließt! Stationäre Ströme lassen sich mit Punktladungen nur durch geeignete Mittelungen definieren: wir approximieren beispielsweise die Ladungsdichte durch $\rho(\mathbf{r}, t) \equiv \sum_{i=1}^{N} q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))$ durch eine Konstante ρ_0 , sowie die Stromdichte ebenfalls durch eine Konstante

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \equiv \sum_{i=1}^{N} q_i \dot{\mathbf{r}}_i(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \to \mathbf{v} \rho_0$$
(2.11)

mit dem konstanten Geschwindigkeitsvektor v. Allgemeiner ist die Form

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}), \quad \operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$$
(2.12)

mit einem Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ und einer Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$, die so gewählt sein müssen, dass div $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$ gilt.

Diese Problematik trat bei der Elektrostatik nicht auf. Die Magnetostatik, zumindest in der in den Lehrbüchern entwickelten, historisch vorgehenden Formulierung, ist also nicht streng mit einem mikroskopischen Ansatz verträglich: Da stationäre Ströme sich mit Punktladungen nur durch geeignete Mittelungen, z.B. durch quantenmechanische Erwartungswerte, definieren lassen, kommen sie nicht als Ausgangspunkt einer mikroskopischen Beschreibung magnetischer Phänomene in Frage. Letztlich ist die Ursache dieser Problematik wieder die Nichtexistenz magnetischer Monopole. In der Tat wird häufig der magnetische *Dipol* **m** als das 'Elementarobjekt' der Magnetostatik angesehen. Physikalisch direkter ist allerdings eine Einführung magnetischer Erscheinungen über das Amperesche Kraftgesetz zwischen stromdurchflossenenen Drähten.

2.1.3 Stromfaden

Wir können 'infinitesimal dünne' Stromdichten $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ definieren z.B. für einen 'Stromfaden' entlang der z-Achse,

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = I\mathbf{e}_z\delta(x)\delta(y),\tag{2.13}$$

so dass bei Integration über einen der Querschnitte einer Flussröhre um den Faden genau der Strom I herauskommt. Allgemeiner wird man jetzt einen Stromfaden längs einer Kurve C definieren;

Definition Eine stationäre Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ tangential entlang einer eindimensionalen Kurve C heißt Stromfaden zum Strom I bei entsprechender Normierung, d.h.

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = I\mathbf{t}\delta^2(\mathbf{r}_\perp), \quad \mathbf{r} \in C$$
(2.14)

Hierbei ist **t** der Tangentialvektor an C im Punkt **r** und \mathbf{r}_{\perp} der Vektor (vom Aufpunkt **r**) in der Ebene senkrecht zu C durch **r**.

(SKIZZE). Die zweidimensionale Deltafunktion $\delta^2(\mathbf{r}_{\perp})$ sorgt also wie im obigen Beispiel des Stromfadens entlang der z-Achse für die korrekte Normierung der Stromdichte auf den Strom *I*. Etwas eleganter schreiben kann man das mit einer Parametrisierung der Kurve z.B. nach ihrer Bogenlänge *s* (SKRIPT MATHEMATISCHE METHODEN für Bogenlänge, SKRIPT FREDENHAGEN 2005);

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = I \int_C d\mathbf{r}' \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = I \int_0^1 ds \frac{d\mathbf{r}'(s)}{ds} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'(s)).$$
(2.15)

Wir sehen damit z.B. wieder für einen 'Stromfaden' entlang der z-Achse

$$\mathbf{r}' = z'\mathbf{e}_z \rightsquigarrow \mathbf{j}(\mathbf{r}) = I\mathbf{e}_z \int dz' \delta(x-0)\delta(y-0)\delta(z-z') = I\mathbf{e}_z\delta(x)\delta(y).$$
(2.16)

Die Kurve C des Stromfadens kann als Flussröhre mit infinitesimal kleinem Querschnitt angesehen werden (ein physikalisch realisierbarer Stromfaden, d.h. ein 'Draht', muss natürlich einen endlichen Querschnitt besitzen.)

Mit dem Konzept des Stromfadens haben wir eine Analogie zu den Punktladungen der Elektrostatik. Damit läßt sich jetzt ein dem Coulombschen Gesetz analoges Gesetz für die Magnetostatik postulieren, das natürlich wieder aus der experimentellen Erfahrung hergeleitet ist:

2.1.4 Das Gesetz von Ampere

Dieses Gesetz ist ein experimentell abgeleitetes Kraftgesetz. Es lautet

Gesetz von Ampere Zwischen zwei Stromfäden C_1 und C_2 mit Strömen I_1 und I_2 wirkt eine Kraft, und zwar ist

$$\mathbf{F}_{12} = k' I_1 I_2 \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{d\mathbf{x}_1 \times (d\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_{12})}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3}, \quad \mathbf{x}_{12} \equiv \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2.$$
(2.17)

die durch den zweiten Stromfaden ausgeübte Gesamtkraft auf den ersten Stromfaden. Die Kraft \mathbf{F}_{12} wirkt als externe Kraft auf den als starren Körper aufgefassten ersten Stromfaden. Für die Konstante k' findet man experimentell, dass für das Verhältnis der Konstante k im Coulomb-Gesetz Gl. (1.1) mit k' gilt

$$\frac{k}{k'} = c^2 \tag{2.18}$$

mit der *Lichtgeschwindigkeit c.* Für die Kraft gilt actio=reactio, d.h. die durch C_1 auf C_2 ausgeübte Kraft ist gerade $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$.

Das Auftreten der Geschwindigkeit c in einem Gesetz zu einem statischen physikalischen Phänomen ist bemerkenswert. In SI-Einheiten legt man fest

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \quad k' = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{N}{A^2} = 10^{-7} \frac{Vs}{Am},$$
 (2.19)

es gilt also

$$\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1. \tag{2.20}$$

Wir können das Amperesche Gesetz Gl. (2.17) mit der bac-cab-Regel umschreiben, in dem wir

$$d\mathbf{x}_1 \times (d\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_{12}) = d\mathbf{x}_2(d\mathbf{x}_1\mathbf{x}_{12}) - \mathbf{x}_{12}(d\mathbf{x}_1d\mathbf{x}_2)$$
(2.21)

benutzen sowie den Satz von Stokes

$$\int_{C_1} \frac{d\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_{12}}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} = -\int_{C_1} d\mathbf{x}_1 \nabla \frac{1}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} = -\int d^2 \mathbf{x}_1 \nabla \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} = 0, \quad (2.22)$$

(Integral über die von C_1 aufgespannte Fläche) so dass nur der zweite Term in $d\mathbf{x}_1 \times (d\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_{12}) = d\mathbf{x}_2(d\mathbf{x}_1\mathbf{x}_{12}) - \mathbf{x}_{12}(d\mathbf{x}_1d\mathbf{x}_2)$ beiträgt, was zu

$$\mathbf{F}_{12} = -k' I_1 I_2 \int_{C_1} \int_{C_2} (d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2) \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3}.$$
 (2.23)

führt. Beide Formen Gl. (2.17) und Gl. (2.23) sind völlig äquivalent, wenn es nur darum geht, die Gesamtkraft zwischen geschlossenen Leitersystemen zu berechnen. Die Form Gl. (2.23) läßt sich allerdings nicht benutzten, wenn wir z.B. die Kraft auf ein *Teilstück* von C_1 sinnvoll ausdrücken wollen. Wir sehen einen weiteren Nachteil von Gl. (2.23): ein durch C_2 erzeugtes *Feld* würde am Ort \mathbf{x}_1 offensichtlich nicht nur von \mathbf{x}_1 , sondern auch von der Richtung $d\mathbf{x}_1$ abhängen. Tatsächlich käme dann auch Unsinn z.B. für die Lorentz-Kraft auf eine einzelne Ladung heraus.

Für die Kraft auf ein *Teilstück* $d\mathbf{x}_1$ an der Stelle \mathbf{x}_1 des Stromfadens C_1 muss man deshalb die Form Gl. (2.17) und nicht die Form Gl. (2.23) benutzen,

$$d\mathbf{F}_{12} = k' I_1 I_2 \int_{C_2} \frac{d\mathbf{x}_1 \times (d\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_{12})}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3}.$$
 (2.24)

BEISPIEL: C_2 als unendlich langer Stromfaden in z-Richtung im Abstand a vom Ursprung. Dann ist mit $\mathbf{x}_2 = a\mathbf{e}_x + z\mathbf{e}_z$ (SKIZZE)

$$d\mathbf{F}_{12}(\mathbf{x}_{1}=0) = k'I_{1}I_{2}d\mathbf{x}_{1} \times \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\mathbf{e}_{z} \times (-a\mathbf{e}_{x} - z\mathbf{e}_{z})}{|a^{2} + z^{2}|^{3/2}} = k'I_{1}I_{2}d\mathbf{x}_{1} \times \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{-a\mathbf{e}_{y}}{|a^{2} + z^{2}|^{3/2}} = -\frac{2k'I_{1}I_{2}}{a}(d\mathbf{x}_{1} \times \mathbf{e}_{y}).$$
(2.25)

Die Kraft ist also senkrecht zum Stromfaden C_1 . Falls die Ströme in die gleiche Richtung fliessen, d.h. das gleiche Vorzeichen haben, handelt es sich um eine *anziehende* Kraft, im entgegengesetzten Fall um eine abstossende Kraft, z.B.

$$d\mathbf{x}_1 = dz \mathbf{e}_z \rightsquigarrow d\mathbf{F}_{12}(\mathbf{x}_1 = 0) = -\frac{2k' I_1 I_2}{a} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y) dz = \frac{2k' I_1 I_2}{a} \mathbf{e}_x dz, \qquad (2.26)$$

d.h. die Kraft auf C_1 wirkt in Richtung von C_2 . Hierbei haben wir

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z$$
, und zyklische Vertauschung (2.27)

für das Kreuzprodukt der drei Basisvektoren benutzt, sowie die Festlegung, dass $Idze_z$ 'nach oben' (in die positive z-Richtung) zeigt, wenn der Strom nach oben fliessen soll. Allerdings kann man hier leicht Fehler mit dem Vorzeichen machen. Für praktische Anwendungen hat man häufig Regeln wie die 'Daumenregel', Rechte-Hand-Regel etc., die allerdings auch wieder nur Konventionen sind.

2.1.5 Magnetische Induktion

Wir möchten nun im Gesetz von Ampere

$$\mathbf{F}_{12} = k' I_1 I_2 \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{d\mathbf{x}_1 \times (d\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_{12})}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3}, \quad \mathbf{x}_{12} \equiv \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2.$$
(2.28)

die Kraft auf ein Teilstück $d\mathbf{x}_1$ an der Stelle \mathbf{x}_1 des Stromfadens C_1 durch ein Feld ausdrücken. Wie in der Elektrostatik interessiert uns dann nicht so sehr, wie das Feld erzeugt wird (hier durch den Stromfaden C_2), da es z.B. sowieso auf unterschiedliche Weise erzeugt werden kann und man nur an seiner Kraftwirkung auf einen gegebenen Stromfaden interessiert ist. Wenn wir jetzt $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1$, $\mathbf{r}' = \mathbf{x}_2$, $I_1 = I$, $I_2 = I'$ schreiben (SI-Einheiten)

$$d\mathbf{F}(\mathbf{r}) = I \frac{\mu_0}{4\pi} I' d\mathbf{r} \times \int_{C'} \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$
(2.29)

wird folgende Definition sinnvoll:

Definition der magnetischen Induktion Die durch eine Stromschleife C' erzeugte magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ an der Stelle \mathbf{r} wird durch

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} I' \int_{C'} \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad \text{Gesetz von Biot-Savart (Stromschleifen)}$$
(2.30)

definiert. Auf eine Stromschleife C mit Strom I verursacht sie die Gesamtkraft

$$\mathbf{F} = I \int_C d\mathbf{r} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}). \tag{2.31}$$

Jetzt formulieren wir das Superpositionsprinzip in der Magnetostatik: Das durch beliebig viele Stromschleifen C' verursachte Magnetfeld ist die Summe der durch die einzelnen Stromschleifen erzeugten Felder Gl. (2.30). Wir gehen von den Stromschleifen also wieder zurück auf die ursprüngliche, allgemeinere Stromdichte, also das Vektorfeld $\mathbf{r}(\mathbf{r})$. Wie funktioniert dieser Übergang? Aus Dimensionsgründen muss ein Linienelement des Stroms der Stromschleife übergehen

$$Id\mathbf{r} \to \mathbf{j}(\mathbf{r})d^3\mathbf{r}$$
 (2.32)

(Strom mal Länge), und wir postulieren

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 \mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad \text{Gesetz von Biot-Savart.}$$
(2.33)

Entsprechend wird auch die Kraft auf ein endliches Volumen, in dem eine Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ herrscht, verallgemeinert. Die Kraft stammt hierbei durch das von einer anderen Stromdichte erzeugte Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$,

$$\mathbf{F} = \int_{V} d^{3}\mathbf{rj}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}). \qquad (2.34)$$

Für den Spezialfall von N Punktladungen Gl. (2.1), $\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \equiv \sum_{i=1}^{N} q_i \dot{\mathbf{r}}_i(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))$, erhalten wir

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{N} q_i \dot{\mathbf{r}}_i(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_i(t)).$$
(2.35)

Dieses ist gerade die Summe der *Lorentz-Kräfte* (ohne elektrisches Feld) auf die N Punktladungen. Wieder macht dieser Ausdruck für die Magnetostatik aber strenggenommen keinen Sinn, da er zeitabhängig ist.

2.1.6 Maxwellgleichungen und Vektorpotential

(z.B. NOLTING) Wie in der Elektrostatik lassen sich in der Magnetostatik zwei fundamentale Maxwellgleichungen des Feldes aufstellen. Zunächst benutzen wir im Biot-Savart-Gesetz Gl. (2.33) die Identität

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$
(2.36)

also

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \equiv \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 \mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \text{Vektor potential } \mathbf{A}(\mathbf{r}).$$
(2.37)
Das Magnetfeld läßt sich also wieder aus einem Potential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ erzeugen, dass aber diesmal im Gegensatz zum skalaren Potential des elektrostatischen Feldes ein *Vektorpotential* ist. Weiterhin gilt



denn die Divergenz einer Rotation ist Null. Durch den Gaußschen Integralsatz folgt hieraus insbesondere

$$\int_{\partial V} d^2 \mathbf{r} \mathbf{B} = 0, \qquad (2.39)$$

das magnetische Feld ist also quellfrei: es gibt keine magnetischen Ladungen. Wir werden sehen, dass die Maxwellgleichung div $\mathbf{B} = 0$ auch für zeitabhängige Felder gilt.

Auf die kartesischen Komponenten des Vektorpotentials $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ können wir jeweils den Laplaceoperator anwenden. Kompakt geschrieben lautet das

$$\Delta_{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \Delta_{\mathbf{r}} \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 \mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}), \qquad (2.40)$$

wobei wir wieder

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi \delta^3 (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$
(2.41)

benutzt haben. Gl. (2.40) entspricht der Poisson-Gleichung der Elektrostatik: das Potential wird über eine inhomogene, lineare partielle Differentialgleichung aus den Quellen des Feldes (Ladungen in der Elektrostatik, stationäre Ströme in der Magnetostatik) erzeugt. Weiterhin hat man

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 \mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 \mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 \mathbf{r}' \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 0, \qquad (2.42)$$

denn divj=0 wegen der Stationarität der Stromdichte, vgl. Gl. (2.8).

Schliesslich benutzen wir nun die Identität

$$\Delta \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}$$
(2.43)

und finden mit $rot \mathbf{A} = \mathbf{B}$ und Gl. (2.40)

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}), \quad \text{Amperesches Durchflutungsgesetz.}$$
(2.44)

Das Amperesche Durchflutungsgesetz steht in Analogie zum Gaußschen Gesetz der Elektrostatik. Es läßt sich insbesondere zur Herleitung der Stetigkeitsbedingungen für das **B**-Feld an stromführenden Grenzflächen und zur Berechnung von Magnetfeldern in besonders einfachen Geometrien verwenden, nämlich in seiner integralen Form über den Satz von Stokes

$$\int_{\partial F} d\mathbf{r} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_{F} d^{2} \mathbf{r} \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_{0} \int_{F} d^{2} \mathbf{r} \mathbf{j}(\mathbf{r}).$$
(2.45)

BEISPIEL: Magnetfeld eines homogen stromdurchflossenen, geraden und unendlich langen Drahts mit Radius R und Gesamtstrom I. Das Magnetfeld ist konzentrisch um den Draht mit Betrag B(r > R), der aus dem Ampereschen Durchflutungsgesetz als

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I \rightsquigarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad r > R$$
(2.46)

folgt.

ÜBUNG: Wie sieht das Magnetfeld im Draht aus? Wieso braucht man für diese einfache Rechnung die Annahme eines unendlich langen Drahts?

2.2 Weiterführung der Magnetostatik

2.2.1 Multipolentwicklung

(FLIESSBACH, SKRIPT FREDENHAGEN 2005). Die Multipolentwicklung geht wie in der Elektrostatik von einer räumlich beschränkten Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ aus und beginnt mit einer Entwicklung des Vektorpotentials Gl. (2.37),

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 \mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$
(2.47)

für große r mittels

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}'}{r^3} + \dots$$

$$\rightsquigarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3 \mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int d^3 \mathbf{r}'(\mathbf{r}\mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \dots \qquad (2.48)$$

Der erste Term ist hier Null, denn es gilt komponentenweise

$$\operatorname{div}_{\mathbf{r}'}\left(\mathbf{r}'_{i}\mathbf{j}(\mathbf{r}')\right) = \left(\nabla'\mathbf{r}'_{i}\right)\mathbf{j}(\mathbf{r}') + \mathbf{r}'_{i}\operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}') = j_{i}(\mathbf{r}') + 0$$
(2.49)

wegen der Stationarität div $\mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$, weshalb sich der Integrand in $\int d^3\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}')$ komponentenweise als Divergenz schreiben läßt, die nach dem Gaußschen Integralsatz auf der Fläche im Unendlichen wieder zu Null wegintegriert wird. Anschaulich heben sich alle Elemente der räumlich beschränkten Stromdichte bei Integration gegenseitig weg; z.B. gibt es auf einem ringförmigen Leiter zu jedem Leiterstück ein Leiterstück mit entgegengesetzter Richtung des Stromdichte-Vektors. Im zweiten Term in unserer Entwicklung sieht $(\mathbf{rr'})\mathbf{j}$ verdächtig nach einem bac-cab-Term im doppelten Kreuzprodukt aus;

$$(\mathbf{r}' \times \mathbf{j}) \times \mathbf{r} = -\mathbf{r} \times (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}) = -\mathbf{r}'(\mathbf{rj}) + \mathbf{j}(\mathbf{rr}').$$
(2.50)

Allerdings stört hier der erste Term auf der rechten Seite $-\mathbf{r}'(\mathbf{rj})$. Bei der Integration gilt allerdings glücklicherweise ¹

$$-\int d^3 \mathbf{r'r'}(\mathbf{rj}) = \int d^3 \mathbf{r'j}(\mathbf{rr'}), \qquad (2.51)$$

so dass wir schreiben können

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}}{r^3} + \dots, \quad \boldsymbol{\mu} \equiv \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{r}' \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}'), \quad \text{magnetisches Dipolmoment.}$$
(2.52)

Hierbei haben wir Gl. (2.50) mit $\frac{1}{2}$ multipliziert und Gl. (2.51) verwendet. Der dem Dipolmoment entsprechende Beitrag zum Magnetfeld ist aus $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$ zu finden mittels

$$\nabla \times \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}}{r^3} = \nabla \frac{1}{r^3} \times (\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{r^3} \nabla \times (\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r})$$
$$= -3 \frac{\mathbf{r}}{r^5} \times (\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{r^3} (\boldsymbol{\mu} \text{div} \mathbf{r} - (\boldsymbol{\mu} \nabla) \mathbf{r})$$
$$= -3 \frac{1}{r^5} (\boldsymbol{\mu} r^2 - \mathbf{r} (\boldsymbol{\mu} \mathbf{r})) + \frac{1}{r^3} 2\boldsymbol{\mu}, \qquad (2.53)$$

also insgesamt

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathbf{e}_{\mathbf{r}}(\boldsymbol{\mu}\mathbf{e}_{\mathbf{r}}) - \boldsymbol{\mu}}{r^3}, \quad r \to \infty, \quad \text{Dipolfeld.}$$
(2.54)

Bei Weiterführung der Multipolentwicklung gibt es entsprechend komplizierte höhere Terme. In der Magnetostatik wird meist nur das magnetische Dipolmoment μ diskutiert.

2.2.2 Elektrisches versus magnetisches Dipolmoment

Interessanterweise ist das magnetische Dipolfeld völlig analog zum elektrischen Dipolfeld,

¹ Es gilt nämlich wieder komponentenweise ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) wegen div_{r'} $\mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$

$$\int d^{3}\mathbf{r}'(r_{\alpha}'j_{\beta} + r_{\beta}'j_{\alpha}) = \int d^{3}\mathbf{r}'\operatorname{div}_{\mathbf{r}'}\left(r_{\alpha}'r_{\beta}'\mathbf{j}(\mathbf{r}')\right) = 0 \rightsquigarrow \sum_{\alpha} \int d^{3}\mathbf{r}'(r_{\alpha}r_{\alpha}')j_{\beta} = -\sum_{\alpha} \int d^{3}\mathbf{r}'(r_{\alpha}j_{\alpha})r_{\beta}'$$
$$\rightsquigarrow \int d^{3}\mathbf{r}'(\mathbf{rr}')\mathbf{j} = -\int d^{3}\mathbf{r}'(\mathbf{rj})\mathbf{r}',$$

also Gl. (2.51).

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3\mathbf{e}_{\mathbf{r}}(\mathbf{d}\mathbf{e}_{\mathbf{r}}) - \mathbf{d}}{r^3}, \quad r \to \infty, \quad \text{Dipol-Beitrag zum } \mathbf{E}\text{-Feld} \quad (2.55)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathbf{e}_{\mathbf{r}}(\boldsymbol{\mu}\mathbf{e}_{\mathbf{r}}) - \boldsymbol{\mu}}{r^3}, \quad r \to \infty, \quad \text{Dipol-Beitrag zum } \mathbf{B}\text{-Feld}, \quad (2.56)$$

wobei die Dipolmomente **d** und μ natürlich völlig unterschiedlich definiert sind. Im Folgenden vergleichen wir deshalb noch einmal beide miteinander. Es gilt zunächst

Satz 8. Die am Ursprung lokalisieren Ladungsdichten $\rho_{\mathbf{d}}(\mathbf{r})$ und Stromdichten $\mathbf{j}_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{r})$

$$\rho_{\mathbf{d}}(\mathbf{r}) = -\mathbf{d}\nabla\delta^{(3)}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{j}\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\mu}\times\nabla\delta^{(3)}(\mathbf{r})$$
(2.57)

erzeugen Dipolpotentiale $\Phi_{dipol}(\mathbf{r})$ (elektrisch) und $\mathbf{A}_{dipol}(\mathbf{r})$ (magnetisch) mit

$$\Phi_{\rm dipol}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{d}\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{A}_{\rm dipol}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad r = |\mathbf{r}| \neq 0,$$
(2.58)

mit Dipolmomenten **d** (elektrisch) und μ (magnetisch).

BEWEIS: Wir benötigen jeweils die Integraldarstellungen der Potentiale, Gl. (1.9) und Gl. (2.37);

$$\Phi(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 \mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$
 (2.59)

Wenn wir dort die obigen Ladungsdichten $\rho_{\mathbf{d}}(\mathbf{r})$ und Stromdichten $\mathbf{j}_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{r})$ einsetzen, benötigen wir offensichtlich in beiden Fällen das Integral

$$\int d^3 \mathbf{r}' \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \delta^{(3)}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\int d^3 \mathbf{r}' \delta^{(3)}(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\int d^3 \mathbf{r}' \delta^{(3)}(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{-\mathbf{r}}{r^3} (2.60)$$

wobei wir im ersten Schritt komponentenweise partiell integriert haben und die Randterme im Unendlichen verschwinden. Damit folgt die Form der Potentiale durch Einsetzen der Ladungs- bzw. Stromdichten, QED.

Interessant ist die physikalische Interpretation der Ladungsdichten $\rho_{\mathbf{d}}(\mathbf{r})$ und Stromdichten $\mathbf{j}_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{r})$ Gl. (2.57), die ja die entsprechenden Dipolpotentiale nicht nur in großer Entfernung r, sondern für alle $r \neq 0$ erzeugen:

AUFGABE 1: Zeige, dass $\rho_{\mathbf{d}}(\mathbf{r})$ der Grenzwert einer Ladungsdichte ist, die einen Dipol $\mathbf{d} = q\mathbf{a}$ aus zwei Punktladungen $\pm q$ an den Orten $\pm \frac{\mathbf{a}}{2}$ für $|\mathbf{a}| \to 0, q \to \infty$ beschreibt.

AUFGABE 2: Zeige, dass $\mathbf{j}_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{r})$ der Grenzwert einer Stromdichte auf einer ringförmigen Kurve *C* mit Strom *I* und Radius *R* senkrecht zu $\boldsymbol{\mu}$ ist. a) Beweise hierzu zunächst die Darstellung

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{I}{2} \int_{C} \mathbf{r} \times d\mathbf{r}, \quad \text{magnetisches Dipolmoment eines Stromfadens.}$$
(2.61)

b) Benutze die Darstellung

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = I \int_C d\mathbf{r}' \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \qquad (2.62)$$

um $\lim_{R\to 0} \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r})$ zu zeigen. Hierzu parametrisiert man den Ring C mit Polarkoordinaten in der Ebene senkrecht zu $\boldsymbol{\mu}$ mit Basisvektoren \mathbf{e}_r und \mathbf{e}_{ϕ} .

Für die Kräfte auf an der Stelle ${\bf x}$ lokalisierte Dipole in externen äußeren Feldern gilt weiterhin

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \nabla (\mathbf{d}\mathbf{E}(\mathbf{x})), & \text{Kraft auf elektrischen Dipol } \mathbf{d} \end{aligned} (2.63) \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \nabla (\boldsymbol{\mu}\mathbf{B}(\mathbf{x})), & \text{Kraft auf magnetischen Dipol } \boldsymbol{\mu} . \end{aligned} (2.64) \end{aligned}$$

BEWEIS: Für den elektrischen Dipol folgt das direkt aus der Energie im elektrischen Feld, vgl. Gl. (1.111):

$$W_{\text{ext}}^{\text{Dipol}} = -\mathbf{d}\mathbf{E}(\mathbf{r}) \rightsquigarrow \mathbf{F} = -\nabla W_{\text{ext}}^{\text{Dipol}} = \nabla \left(\mathbf{d}\mathbf{E}(\mathbf{r})\right).$$
(2.65)

Für den magnetischen Dipol ist das etwas schwieriger zu zeigen. Man kann in der Magnetostatik mit etwas Aufwand direkt die Energie einer Stromverteilung im äußeren Magnetfeld konsistent herleiten. Einfacher ist jedoch, Gl. (2.34) zusammen mit Gl. (2.57) zu benutzen. Wir nehmen den mikroskopischen Dipol als am Ort \mathbf{x} lokalisiert an,

$$\mathbf{j}_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\mu} \times \nabla_r \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{x}). \tag{2.66}$$

Damit folgt dann für die Kraft im externen Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{F} = \int d^{3}\mathbf{r}\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int d^{3}\mathbf{r}\mathbf{B}(\mathbf{r}) \times (\boldsymbol{\mu} \times \nabla_{r}\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{x}))$$
$$= \int d^{3}\mathbf{r} \left[\boldsymbol{\mu}(\mathbf{B}(\mathbf{r})\nabla_{r}\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{x})) - \nabla_{r}\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{x})(\boldsymbol{\mu}\mathbf{B}(\mathbf{r})) \right]$$
(2.67)

Im ersten Term im Integranden ist

$$\mathbf{B}(\mathbf{r})\nabla_r \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{x}) = \nabla_r (\mathbf{B}(\mathbf{r})\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{x})) - (\nabla_r \mathbf{B}(\mathbf{r}))\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{x}), \qquad (2.68)$$

wovon wieder der erste Term bei Integration und der zweite wegen $\nabla_r \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$ wegfallen. Es bleibt also

$$\mathbf{F} = -\int d^3 \mathbf{r} \nabla_r \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{x})(\boldsymbol{\mu} \mathbf{B}(\mathbf{r})) = \nabla_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\mu} \mathbf{B}(\mathbf{x}))$$
(2.69)

durch partielle Integration, QED.

3. DIE MAXWELLSCHEN GLEICHUNGEN

3.1 Zeitabhängige elektrische und magnetische Phänomene

3.1.1 Das Faradaysche Induktionsgesetz

(REBHAN) Wir betrachten Ladungen q, die auf einer Leiterschleife, d.h. einer geschlossenen Kurve C_t ruhen. Die Schleife C_t wird jetzt mit konstanter Geschwindigkeit \mathbf{v} durch ein zeitlich konstantes Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ bewegt. Auf jede Ladungen wirkt am Ort \mathbf{r} die Lorentz-Kraft Gl. (2.35),

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}),\tag{3.1}$$

wobei sich alle Größen auf das ruhende 'Laborsystem' beziehen. Im Sinne der klassischen Mechanik sollen Zwangskräfte dafür sorgen, dass die Ladungen nicht von C_t 'herunterfallen'.

Wir untersuchen das Linienintegral der Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ längs der Leiterschleife, genauer

$$\int_{C_t} d\mathbf{r} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = q \int_{C_t} d\mathbf{r} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})).$$
(3.2)

3.1.1.1 Erste Herleitung

Wir schreiben

$$\int_{C_t} d\mathbf{r} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -q \int_{C_t} \mathbf{B}(\mathbf{r})(\mathbf{v} \times d\mathbf{r}), \qquad (3.3)$$

wobei wir die Formel für das Spatprodukt benutzt haben. In der Zeit Δt überstreicht die Leiterschleife eine zylinderförmige Fläche ΔF (SKIZZE), es gilt

$$-\int_{C} \mathbf{B}(\mathbf{r})(\mathbf{v}\Delta t \times d\mathbf{r}) = \int_{\Delta F} \mathbf{B}(\mathbf{r})d\vec{f},$$
(3.4)

wobei $d\vec{f}$ ein Flächenelement auf ΔF mit nach außen gerichtetem Normalenvektor ist (SKIZZE!), das Vorzeichen hängt von der Richtung der Integration längs C ab. Wir setzen die Fläche ΔF als 'Zwischenstück' zwischen zwei beliebige Flächen F_t und $F_{t+\Delta t}$ ein, deren Rand jeweils die Leiterschleife C zur Zeit t bzw. zur Zeit $t + \Delta t$ bildet. Der gesamte magnetische Fluss durch diese geschlossene Gesamtfläche ist dann Null wegen div $\mathbf{B} = 0$, und es gilt

$$0 = \int_{F_t} \mathbf{B}(\mathbf{r}) d\vec{f} + \int_{\Delta F} \mathbf{B}(\mathbf{r}) d\vec{f} + \int_{F_{t+\Delta t}} \mathbf{B}(\mathbf{r}) d\vec{f}.$$
 (3.5)

Die Vektoren $d\vec{f}$ weisen hierbei stets zum Außenraum der Gesamtfläche hin. Da sich F_t und $F_{t+\Delta t}$ für $\Delta t \to 0$ nicht unterscheiden sollen, definieren wir $d\vec{f} = -\mathbf{n}df$ auf F_t und $d\vec{f} = \mathbf{n}df$ auf $F_{t+\Delta t}$ (SKIZZE), so dass insgesamt

$$\frac{1}{q} \int_{C_t} d\mathbf{r} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta F} \mathbf{B}(\mathbf{r}) d\vec{f} = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{F_{t+\Delta t}} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \mathbf{n} df - \int_{F_t} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \mathbf{n} df \right] \\
= -\frac{d}{dt} \int_{F_t} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \mathbf{n} df.$$
(3.6)

Dieses ist noch nicht das Faradaysche Induktionsgesetz, aber wir erkennen bereits Folgendes: Wird C durch ein inhomogenes Magnetfeld bewegt, so ändert sich der magnetische Fluss durch eine von C aufgespannte Fläche F_t mit der Zeit, und längs C_t wirkt eine Kraft auf die Ladungen längs der Leiterschleife, die über deren Länge gemittelt ist. Sie wird die Ladungen beschleunigen und dadurch einen elektrischen Strom induzieren, der beobachtet werden kann (falls die Ladungen nicht auf C 'festgenagelt' sind oder $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ durch irgendwelche anderen Kräfte kompensiert wird).

3.1.1.2 Zweite Herleitung

In der Tat kann man Gl. (3.6) etwas eleganter herleiten, indem man das Kurvenintegral $q \int_{C_t} d\mathbf{r}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}))$ in Gl. (3.2) in dem System ausrechnet, in dem der Leiter ruht. Im Leitersystem sind die Koordinaten der dort festen Schleife $\mathbf{x} = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$, also

$$\frac{1}{q} \int_{C_t} d\mathbf{r} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int_{C_t} d\mathbf{r} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) = \int_C d\mathbf{x} \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x} + \mathbf{v}t).$$
(3.7)

Nach Stokes können wir die rechte Seite als Rotation schreiben,

$$\int_{C} d\mathbf{x}\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x} + \mathbf{v}t) = \int_{F} d^{2}\mathbf{x}\nabla_{\mathbf{x}} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x} + \mathbf{v}t)), \qquad (3.8)$$

mit dem Flächen
integral über die im System des Leiters zeitlich konstante Fläch
e ${\cal F}.$ Wegen

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{v}(\nabla \mathbf{B}) - (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{B} = -(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{B}$$
(3.9)

gilt also

$$\frac{1}{q} \int_{C_t} d\mathbf{r} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\int_F d^2 \mathbf{x}(\mathbf{v}\nabla) \mathbf{B}(\mathbf{x} + \mathbf{v}t) = -\frac{d}{dt} \int_F d^2 \mathbf{x} \mathbf{B}(\mathbf{x} + \mathbf{v}t) \qquad (3.10)$$

$$= -\frac{d}{dt} \int_{F_t} d^2 \mathbf{r} \mathbf{B}(\mathbf{r}), \qquad (3.11)$$

wobei wir im letzten Schritt das Flächenintegral wieder im Laborsystem ausrechnen: dort verschiebt sich natürlich die Fläche F_t mit der Zeit t, deshalb wieder der Index t.

3.1.1.3 Postulat, Induktionsgesetz

Wir betrachten noch einmal den exakten Ausdruck $\int_{C_t} d\mathbf{r} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = q \int_{C_t} d\mathbf{r} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) = -\frac{d}{dt} \int_{F_t} d^2 \mathbf{r} \mathbf{B}(\mathbf{r})$, Gl. (3.2) und Gl. (3.6). Im Laborsystem wirkt auf eine Ladung q, die auf dem sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegenden Leiter ruht, bei Anwesenheit elektrischer und magnetischer Felder die Lorentzkraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q \left(\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \right), \quad \text{Lorentzkraft} . \tag{3.12}$$

Aus Sicht des Leiters wirkt auf q die Lorentzkraft $\mathbf{F}'(\mathbf{r}') = q(\mathbf{E}'(\mathbf{r}') + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}'(\mathbf{r}')) = q\mathbf{E}'(\mathbf{r}')$. Nach dem Äquivalenzprinzip müssen beide Kräfte gleich sein, $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$, und man erhält

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}.\tag{3.13}$$

Damit wird aus Gl. (3.6) das Faradaysche Induktionsgesetz

$$\int_{C} d\mathbf{r} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{d}{dt} \int_{F} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \mathbf{n} df, \quad \text{Faradaysches Induktionsgesetz}, \tag{3.14}$$

wobei wir gleich beliebige Zeitabhängigkeiten der Felder zugelassen haben. Da die Transformation $\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ nur bei nicht-relativistischen Geschwindigkeiten gilt, haben wir Gl. (3.14) sowieso nicht streng hergeleitet. Das Faradaysche Induktionsgesetz ist aber experimentell gut bestätigt: Die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses durch eine Fläche F erzeugt ein elektrisches Feld längs des Randes dieser Fläche. Das Induktionsgesetz ist die Grundlage vieler elektrotechnischer Anwendungen wie elektrischer Generatoren, Elektromotoren und vieles mehr.

Wiederum folgt eine differentielle Form des Faradayschen Induktionsgesetzes durch Anwendung des Stokesschen Integralsatzes auf die linke Seite von Gl. (3.14), $\int_C d\mathbf{r} \mathbf{E} = \int_F \operatorname{rot} \mathbf{E} \mathbf{n} df$. Die Fläche F soll hier ruhen, d.h.

$$-\frac{d}{dt}\int_{F}\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\mathbf{n}df = -\int_{F}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\mathbf{n}df.$$
(3.15)

Man hat also

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t).$$
 (3.16)

Diese Gleichung verallgemeinert die elektrostatische Gleichung rot $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ auf den zeitabhängigen Fall.

3.1.2 Übertragung der Quell-Gleichungen

Die zwei Quellgleichungen der Elektro- bzw. Magnetostatik,

div
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}, \quad \text{div}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$$
 (3.17)

werden in dieser Form auf den zeitabhängigen Fall verallgemeinert, ohne dass wie beim Induktionsgesetz neue physikalische Phänomene auftreten;

div
$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{\rho(\mathbf{r},t)}{\varepsilon_0}, \quad \text{div}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0.$$
 (3.18)

Das scheint an dieser Stelle plausibel zu sein, aber im Hinblick auf die Verallgemeinerung $\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ vom elektrostatischen $\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ nicht zwingend. Zumindest folgt aus $\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ wegen div rot = 0

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0.$$
 (3.19)

Falls jemals in der Geschichte an der Stelle **r** für eine kurze Zeit div $\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0$ gegelten hat, muss das dann auch für alle Zeiten gelten. Man kann dann argumentieren (REBHAN), dass man jeden Raumpunkt **r** zumindest für bestimmte Zeiträume 'magnetostatisch' machen kann und dass damit div $\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0$ für alle Zeiten gilt. Letztlich ist div $\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0$ aber nur eine Erfahrungstatsache, die z.B. durch die Entdeckung magnetischer Monopole umgeworfen werden würde (Näheres z.B. in SCHWINGER).

Die erste Gleichung div $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{\rho(\mathbf{r},t)}{\varepsilon_0}$ ist natürlich nur eine zeitabhängige Version des elektrostatischen Gaußschen Gesetzes, die zumindest für langsam veränderliche Ladungsdichten physikalisch plausibel erscheint. Tatsächlich sind beide Gl. (3.18) aber (empirisch) exakt erfüllt.

3.1.3 Der Verschiebungsstrom

Unsere bisher gefundenen fundamentalen Gesetze (alle Größen jetzt Funktionen von (\mathbf{r}, t))

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{Gauß} \tag{3.20}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}, \quad \operatorname{Faraday}$$
(3.21)

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$
, noch keine magnetischen Monopole gefunden (3.22)

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \operatorname{Ampere}$$
(3.23)

sind mit der Kontinuitätsgleichung Gl. (2.2)

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t) + \operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = 0, \quad \text{Kontinuitätsgleichung}$$
(3.24)

nicht konsistent, wie Maxwell 1865 erkannte. Das Problem liegt im Ampereschen Gesetz rot $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$, das automatisch div $\mathbf{j} = 0$ liefert, was für die Magnetostatik gilt, aber nicht für allgemein zeitabhängige Ladungsdichten $\rho(\mathbf{r}, t)$. Maxwell verallgemeinerte die bis dahin bekannten Gleichungen deshalb durch die Einführung eines Zusatzterms im Ampereschen Gesetz, motiviert von der Tatsache

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t) + \operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \nabla\left(\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} + \mathbf{j}\right) = 0, \qquad (3.25)$$

die durch Ausnutzen des Gaußschen Gesetzes div $\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ folgt. Die Größe $\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$ hat also die Dimension einer Stromdichte und wird **Verschiebungsstromdichte** genannt. Maxwell ersetzte die Stromdichte **j** im Ampereschen Gesetz durch die Summe $\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \mathbf{j}$. Dabei bleibt div rot $\mathbf{B} = \nabla \left(\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \mathbf{j} \right) = 0$, wie es sein muss. In der Tat kann man zeigen, dass die Lösung von $\nabla \left(\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \mathbf{j} \right) = 0$ sich in der Form

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{K} \tag{3.26}$$

mit einem beliebigen Vektorfeld **K** schreiben läßt, dass im Spezialfall der Magnetostatik wegen des Ampereschen Gesetzes in $\frac{1}{\mu_0}$ **B** übergehen muss (z.B. REBHAN).

Die sich insgesamt ergebenden linearen partiellen, gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung,

${\rm div} {\bf E}$	=	$\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, Gauß	(3.27)
$\mathrm{rot}\mathbf{E}$	=	$-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}$, Faraday	(3.28)
${\rm div}{\bf B}$	=	0, noch keine magnetischen Monopole gefunden	(3.29)
$\mathrm{rot}\mathbf{B}$	=	$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{j}$, Verschiebungsstromdichte, Ampere	(3.30)

werden zu seinen Ehren als **Maxwellsche Gleichungen** genannt. Sie stellen die Grundlage der gesamten Elektrodynamik dar.

BEISPIEL für einen Verschiebungsstrom: Wir betrachten die zwei parallelen Platten eines Kondensators, der sich über dünne Drähte entlädt (REBHAN oder WIKIPEDIA). Das Magnetfeld **B** um einen der Drähte läßt sich durch Integration von rot $\mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{j}$ über eine Fläche S_1 , die den Draht senkrecht schneidet, oder äquivalent über eine 'becherförmige' Fläche S_2 um eine der Platten berechnen. Beide Flächen sollen von ∂S berandet sein, eine ringförmige Kurve um den Draht (SKIZZE). Dann gilt

$$\int_{\partial S} d\mathbf{r} \mathbf{B} = \int_{S_1} d^2 \mathbf{r} \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{j} \right) =$$
(3.31)

$$= \int_{S_2} d^2 \mathbf{r} \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{j} \right). \tag{3.32}$$

Im letzten Ausdruck ist $\mathbf{j} = 0$, da ja nur in den Drähten Ladungen fliessen. Es gilt also

$$\int_{S_1} d^2 \mathbf{r} \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{j} \right) = \int_{S_2} d^2 \mathbf{r} \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}.$$
(3.33)

Zur weiteren Behandlung müsste man jetzt das elektrische Feld **E** berechnen. Anschaulich wird für quasistatisches Auf- oder Entladen des Kondensators das Feld **E** im Wesentlichen zwischen den Platten konzentriert sein. Dann lässt sich Gl. (3.33) auch am einfachsten interpretieren: links steht der Strom im Draht, rechts der gleich große **Ver**schiebungsstrom, der durch die zeitliche Änderung des elektrischen Feldes zwischen den Platten bestimmt wird. In diesem Fall ist alles auch konsistent mit elementarer Elektrotechnik: Der Strom I(t) im Draht und das Feld E(t) zwischen den Platten der Fläche A, Abstand d (räumlich homogen angenommen, keine Randeffekte) hängen laut Gl. (3.33) zusammen, wenn wir uns an die Definition Q = CU der Kapazität und U = Edder Potentialdifferenz (Spannung) erinnern;

$$A\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}E(t) = \mu_0I(t) \rightsquigarrow A\varepsilon_0\frac{\dot{U}(t)}{d} = A\varepsilon_0\frac{\dot{Q}(t)}{dC} = I$$
(3.34)

$$\rightsquigarrow C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \tag{3.35}$$

wegen $\dot{Q} = I$, wobei C genau die Kapazität eines Plattenkondensators (Plattenfläche A, Plattenabstand d) ist. Hier wird das also zu einer einfachen Methode, die Kapazität C des Systems zu berechnen!

ÜBUNG: Wie sieht die entsprechende Rechnung beim Kugelkondensator aus?

3.1.4 'Problemstellen' der Maxwellschen Gleichungen

Die Maxwellschen Gleichungen

div
$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}$$
 (3.36)

div
$$\mathbf{B} = 0$$
, rot $\mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{j}$ (3.37)

bilden die mikroskopische Grundlage des Elektromagnetismus. Ohne sie in Frage stellen zu wollen, fassen wir kurz einige Problemstellen in unserer bisherigen Diskussion zusammen:

- die Stromdichte **j** war bisher (in der Magnetostatik) nur über einen geeigneten Mittelwert definiert, um überhaupt stationäre Ströme konsistent mit sich bewegenden Ladungen in Einklang zu bringen. Kann man in der jetzt vollständig zeitabhängigen Theorie wieder von solch einer Mittelung absehen, d.h. Ausdrücke wie Gl. (2.1), $\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \equiv \sum_{i=1}^{N} q_i \dot{\mathbf{r}}_i(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))$, benutzen? Wie erhält man dann aber wieder die Magnetostatik aus den Maxwellschen Gleichungen?
- Offensichtlich benötigen wir einen Ausdruck für das Magnetfeld einer einzelnen sich bewegenden Punktladung, sowie die Kraft zwischen zwei sich bewegenden Punktladungen, um den Elektromagnetismus wirklich aus Sicht einzelner Punktladungen zu verstehen.

- die Gleichung div $\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ kam ja eigentlich direkt aus der Elektrostatik und wurde ohne Änderungen übernommen.
- warum sind die Gleichungen eigentlich so unsymmetrisch, d.h. wieso scheint es keine magnetischen Ladungen zu geben?
- offensichtlich ist es wichtig, die 'Ankopplung' der Materie (ρ , **j**) an die Felder besser zu verstehen. In der *Quantenelektrodynamik* wird die Rolle der Felder für die Wechselwirkung zwischen Ladungen transparenter. Hierfür benötigen wir allerdings eine Lagrange-Formulierung (wie beim Hamiltonschen Prinzip in der Mechanik), sowie Methoden zur quantenmechanischen Beschreibung der Materie und der Felder (evtl. am Ende der VL).

3.2 Elektromagnetische Wellen

Die Existenz elektromagnetischer Wellen ist die spektakulärste Konsequenz der Maxwellschen Gleichungen.

3.2.1 Potentiale und Eichungen

Um zeitabhängige elektromagnetische Probleme zu lösen, ist es häufig zweckmässig, zu Differentialgleichungen zweiter Ordnung überzugehen.

Zunächst führen wir wie in der Magnetostatik wegen div $\mathbf{B} = 0$ das Vektorpotential A über

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A} \tag{3.38}$$

ein (hier um im Folgenden sind alle Felder Funktionen von (\mathbf{r}, t) . Das Induktionsgesetz liefert dann mit $\operatorname{rot}(E + \dot{\mathbf{A}}) = 0$ die Möglichkeit, $\mathbf{E} + \dot{\mathbf{A}}$ als Gradienten eines Skalarfeldes Φ (skalares Potential) zu schreiben,

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \dot{\mathbf{A}}.\tag{3.39}$$

Im Vergleich zur Elektrostatik kommt für das elektrische Feld also der Term $-\dot{\mathbf{A}}$ hinzu. Einsetzen in die Maxwellsche Gleichung div $\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ liefert

$$\Delta \Phi + \nabla \dot{\mathbf{A}} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad (3.40)$$

und Einsetzen in $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{E}} + \mu_0 \mathbf{j}$ liefert mit rot rot = grad div $-\Delta$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \left(-\nabla\dot{\Phi} - \ddot{\mathbf{A}} \right) + \mu_0 \mathbf{j}$$

$$\rightsquigarrow -\Delta\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{A}} + \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\Phi}\right) = \mu_0 \mathbf{j}.$$
(3.41)

Das sieht zunächst etwas hässlich aus. Jetzt nutzen wir allerdings eine Freiheit aus, die uns durch die Definition des Vektorpotentials **A** über **B** = rot**A** zusteht: das Vektorpotential **A** ist dadurch nämlich gar nicht eindeutig bestimmt, sondern kann wegen rot grad = 0 durch Addition eines beliebigen skalaren Feldes $\chi(\mathbf{r}, t)$ umgeeicht werden, so dass sich das Magnetfeld gar nicht ändert:

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A} \equiv \mathbf{A} + \operatorname{grad} \chi \rightsquigarrow \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}.$$
 (3.42)

Damit sich das elektrische Feld bei dieser Umeichung ebenfalls nicht ändert, muss das skalare Potential dann entsprechend abgeändert werden, nämlich zu

$$\Phi \to \tilde{\Phi} \equiv \Phi - \dot{\chi} \rightsquigarrow \mathbf{E} = -\nabla \Phi - \dot{\mathbf{A}} = -\nabla \tilde{\Phi} - \tilde{\mathbf{A}}.$$
(3.43)

Nochmals beide zusammen aufgeschrieben,

$$\mathbf{A} \to \tilde{\mathbf{A}} \equiv \mathbf{A} + \operatorname{grad}\chi, \quad \Phi \to \tilde{\Phi} \equiv \Phi - \dot{\chi}, \quad \text{Eichtransformation.}$$
(3.44)

In der klassischen Elektrodynamik ist das Hin-und-Her-Transformieren zwischen verschiedenen Eichungen im Wesentlichen ein rechentechnischer Trick. In der Quanten(Feld)Theorie bekommt diese Eichfreiheit aber eine wesentlich tiefere Bedeutung und wird weiterhin auch für die anderen fundamentalen Wechselwirkungen in der Natur (schwache, starke, und gravitative Wechselwirkung) im Rahmen von *Eichtheorien* 1 wichtig. In der Quantenelektrodynamik hängt die Eichfreiheit mit der Phase der Wellenfunktion/Quantenfelder zusammen und kann sogar dazu benutzt werden, die elektromagnetischen Felder und die Maxwellschen Gleichungen aus einem einfachen Prinzip ('minimale Kopplung und lokale Eichinvarianz') zu begründen. Etwas mehr dazu im SKRIPT QUANTENMECHANIK, vgl. dort auch die Diskussion des *Aharonov-Bohm-Effekts*.

Zurück zu unseren zwei Gleichungen für die elektromagnetischen Potentiale,

$$\Delta \Phi + \nabla \dot{\mathbf{A}} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$-\Delta \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} + \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\Phi} \right) = \mu_0 \mathbf{j}, \qquad (3.45)$$

die wir z.B. durch geschickte Wahl von χ entkoppeln können, indem wir nämlich fordern

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\Phi} = 0, \quad \operatorname{Lorenz-Eichung} \quad (3.46)$$
$$\rightsquigarrow \Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \ddot{\Phi} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (3.47)$$
$$-\Delta \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (3.48)$$

Was heisst hier geschickte Wahl von χ ? Falls überhaupt Lösungen der Maxwell-Gleichungen für **E** und **B** existieren, sollten sich diese Felder auch in irgendeiner Eichung aus Φ , **A** erzeugen lassen. Dann können wir aber für gegebenes Φ , **A** die Gleichung

$$\Delta \chi - \frac{1}{c^2} \ddot{\chi} = \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\Phi}$$
(3.49)

lösen, und damit erfüllen die neuen Potentiale $\tilde{\mathbf{A}} \equiv \mathbf{A} + \operatorname{grad} \chi$ und $\tilde{\Phi} \equiv \Phi - \dot{\chi}$ die Lorenz-Eichung div $\tilde{\mathbf{A}} + \frac{1}{c^2}\dot{\tilde{\Phi}} = 0$. Wir hätten dann also gleich von vorneherein die Gleichungen Gl. (3.46) lösen können - was man natürlich immer tut, wenn man in der Lorenz-Eichung arbeitet (die Funktion χ ist dann von vorneherein gleich Null und braucht natürlich nicht extra berechnet zu werden).

Auch mit der Festlegung div $\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\Phi} = 0$ Lorenz-Eichung sind die Potentiale Φ, \mathbf{A} noch nicht eindeutig festgelegt (z.B. REBHAN), was uns aber nicht mehr interessiert: wenn wir Lösungen Φ, \mathbf{A} haben, erhalten wir daraus über die Definitionsgleichungen $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$ und $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \dot{\mathbf{A}}$ immer dieselben, eindeutigen physikalischen Felder, d.h. die elektrischen und Magnetfelder, \mathbf{E} und \mathbf{B} .

3.2.2 Die Greensche Funktion

3.2.2.1 Der lineare harmonische Oszillator

Die Bewegungsgleichung der Oszillator-Koordinate x(t) (eine Dimension) lautet

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{f(t)}{m},$$
(3.50)

wenn m die Masse, f(t) die äußere Kraft und ω die Kreis-Frequenz des Oszillators ist. Die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0, \quad x(t > t_0) \text{ gesucht}$$
 (3.51)

erhalten wir folgendermassen: ohne äußere Kraft ist die Lösung (einsetzen!)

$$x_h(t) = x_0 \cos \omega (t - t_0) + v_0 \frac{\sin \omega (t - t_0)}{\omega},$$
 (3.52)

also wie erwartet die einfache Überlagerung von Sinus/Cosinus. Nun lassen wir die äußere Kraft f(t) zusätzlich zur Rückstellkraft $-m\omega^2 x(t)$ wirken. f(t) führt zu jedem Zeitpunkt zu einer zusätzlichen Beschleunigung a(t) = f(t)/m. Falls die Kraft nur über ein infinitesimal kleines Zeitintervall [t', t' + dt'] wirkt, führt dieser 'Kick' zu einer zusätzlichen Geschwindigkeit

$$dv(t') = a(t')dt' = \frac{f(t')}{m}dt'.$$
(3.53)

Die daraus resultierende zusätzliche Auslenkung dx(t) zur Zeit t nach der *endlichen* Zeit t - t' erhalten wir, indem wir mit der Anfangsbedingung $x_0 = dx(t') = 0$, $v_0 = dv(t') = \frac{f(t')}{m}dt'$ in Gl. (3.52) hineingehen;

$$dx(t) = \frac{\sin\omega(t-t')}{\omega} \frac{f(t')}{m} dt' \equiv G_{\rm ret}(t-t') \frac{f(t')}{m} dt', \quad t > t'$$
(3.54)

wobei wir die retardierte Greensche Funktion $G_{ret}(t-t')$ definiert haben (retardiert wegen des verzögerten Zeitarguments t - t'). Insgesamt addiert sich das bis zur Zeit t auf zu

$$\int_{t_0}^t dx(t) = \int_{t_0}^t G_{\text{ret}}(t-t') \frac{f(t')}{m} dt',$$
(3.55)

und zusammen mit der Auslenkung $x_h(t)$, die zur Zeit t sowieso ohne äußere Kraft vorhanden ist, erhält man die gesamte Auslenkung zur Zeit t,

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{f(t)}{m}$$

$$x(t) = x_0 \cos \omega (t - t_0) + v_0 \frac{\sin \omega (t - t_0)}{\omega} + \int_{t_0}^t G_{\text{ret}}(t - t') \frac{f(t')}{m} dt' \quad (3.57)$$

$$G_{\text{ret}}(t - t') \equiv \frac{\sin \omega (t - t')}{\omega} \theta(t - t'), \quad \text{retardierte Greensche Funktion}, \quad (3.58)$$

wobei wir die Bedingung t > t' explizit durch die Stufenfunktion $\theta(t - t')$ ausdrücken. Die retardierte Greensche Funktion drückt die Reaktion des Oszillators auf die externe Kraft auf, wobei die Stufenfunktion $\theta(t - t')$ bedeutet, dass diese Reaktion kausal erfolgt, d.h. nach dem Einwirken der Kraft. Durch Differentiation finden wir

$$\frac{d^2}{dt^2}G_{\rm ret}(t-t') + \omega^2 G_{\rm ret}(t-t') = \delta(t-t'), \qquad (3.59)$$

wobei wir $\frac{d}{dt}\theta(t-t') = \delta(t-t')$ benutzt haben.

In der Herleitung haben wir die Wirkung der zwei Kräfte (Rückstellkraft und externe Kraft) auf die Auslenkung einfach überlagert, was hier zu einem exakten Ergebnis führt, denn das von uns betrachtete System ist *linear*. Hätten wir z.B. einen nichtlinearen Oszillator, so würde diese Methode nur näherungsweise funktionieren.

3.2.2.2 Die 'abstrakte' Wellengleichung

Die Lösung einer Wellengleichung vom Typ

$$\frac{d^2}{dt^2}|\Psi(t)\rangle + L|\Psi(t)\rangle = |f(t)\rangle \tag{3.60}$$

können wir jetzt entsprechend zum harmonischen Oszillator mit Hilfe einer retardierten Greenschen Funktion ausdrücken. Zunächst ist hier $|\Psi(t)\rangle$ ein 'Zustandsvektor' wie in der Quantenmechanik, also im Ortsraum z.B. eine skalare Funktion

$$\langle \mathbf{x} | \Psi(t) \rangle \equiv \Psi(\mathbf{x}, t) \tag{3.61}$$

('Dirac-Notation') des Ortes und der Zeit (ebenso $|f(t)\rangle$), wobei **x** im Allgemeinen durch *Randbedingungen* auf ein Teilgebiet V des \mathbb{R}^3 eingeschränkt ist. Weiterhin ist L ein auf den Zustandsvektor wirkender Operator.

BEISPIELE:

1. Beim harmonischen Oszillator Gl. (3.56) ist $|\Psi(t)\rangle = x(t)$ eine skalare Funktion, die nur von der Zeit abhängt. Entsprechend ist der 'Operator' $L = \omega^2$ weiter nichts als eine Konstante, und $|f(t)\rangle = f(t)/m$ ist die äussere Kraft f(t) geteilt durch die Masse.

2. Der Laplace-Operator $L = -\Delta$ unserer Wellengleichung

$$-\Delta\Phi(\mathbf{x},t) + \ddot{\Phi}(\mathbf{x},t) = \frac{\rho(\mathbf{x},t)}{\varepsilon_0}, \qquad (3.62)$$

wobei das $\frac{1}{c^2}$ in L hineindefiniert werden kann oder man einfach c = 1 setzt.

3. Wellengleichung in einer Dimension. Wir haben $L = -\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, und mit f = 0 erhalten wir die Gleichung der schwingenden Saite der Länge L, wenn V = [0, L] und die Saite bei x = 0, L eingespannt ist;

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(x,t) + \ddot{\Phi}(x,t) = 0, \quad \Phi(0) = \Phi(L) = 0, \quad 0 \le x \le L$$
 (3.63)

und $\Phi(x)$ die Auslenkung an der Stelle x bezeichnet. Zur Lösung in diesem Fall verwendet man Fourierreihen, vgl. SKRIPT MATHEMATISCHE METHODEN.

Der Vergleich mit dem harmonischen Oszillator Gl. (3.56) legt wieder eine lineare Superposition einer allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und der speziellen Lösung mit der Greenschen Funktion als Reaktion auf die äußere 'Kraft' $|f(t)\rangle$ nahe,

$$|\Psi(t)\rangle = |\Psi(t)\rangle_h + \int_{t_0}^t dt' G_{\rm ret}(t-t')|f(t')\rangle, \quad G_{\rm ret}(t-t') = \frac{\sin\sqrt{L}(t-t')}{\sqrt{L}}\theta(t-t')(3.64)$$

Das sieht etwas verrückt aus, denn hier steht statt des ω die Wurzel des Operators Lunter dem Sinus! Tatsächlich ist Gl. (3.64) eine *formale* Lösung mit einem retardierten Greenschen Operator $G_{\text{ret}}(t - t')$, der auf $|f(t')\rangle$ angewendet wird. Wir wollen im Folgenden diesen Ausdruck genauer verstehen und konkret für unsere elektromagnetischen Wellen auswerten.

Satz 9. Der Operators L der Wellengleichung $\frac{d^2}{dt^2}|\Psi(t)\rangle + L|\Psi(t)\rangle = |f(t)\rangle$ habe ein vollständiges System von Eigenvektoren

$$L|\Phi_n\rangle = \lambda_n |\Phi_n\rangle, \quad \sum_n |\Phi_n\rangle \langle \Phi_n| = 1.$$
 (3.65)

Dann ist eine spezielle Lösung der Wellengleichung mit Anfangsbedingung $|\Psi(t_0)\rangle = 0$, $\frac{d}{dt}|\Psi(t_0)\rangle = 0$ durch

$$|\Psi(t)\rangle = \int_{t_0}^t dt' G_{\rm ret}(t-t') |f(t')\rangle, \quad G_{\rm ret}(t-t') = \sum_n |\Phi_n\rangle \langle \Phi_n| \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(t-t')}{\sqrt{\lambda_n}} \theta(t-t') | \theta(t-$$

gegeben.

BEWEIS: Es gilt wieder

$$\frac{d^2}{dt^2}G_{\rm ret}(t-t') + LG_{\rm ret}(t-t') = \delta(t-t')1, \qquad (3.67)$$

(ableiten und $L|\Phi_n\rangle = \lambda_n |\Phi_n\rangle$ benutzen). Dann folgt

$$\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \int_{t_0}^t dt' \dot{G}_{\rm ret}(t-t')|f(t')\rangle \qquad (3.68)$$

wegen $G_{\text{ret}}(0) = 0$ und weiterhin

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} |\Psi(t)\rangle &= \dot{G}_{\rm ret}(0)|f(t)\rangle + \int_{t_0}^t dt' \ddot{G}_{\rm ret}(t-t')|f(t')\rangle \\ &= \dot{G}_{\rm ret}(0)|f(t)\rangle - L \int_{t_0}^t dt' G_{\rm ret}(t-t')|f(t')\rangle + \int_{t_0}^t dt' \delta(t-t')|f(t')| & \le 0.63 \end{aligned}$$

Das gibt wegen $\dot{G}_{\rm ret}(0) = \sum_{n} |\Phi_{n}\rangle \langle \Phi_{n}|\theta(t-t) = \theta(0) = \frac{1}{2}$ und $\int_{t_{0}}^{t} dt' \delta(t-t')|f(t')\rangle = \frac{1}{2}|f(t)\rangle$ gerade die Behauptung $\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle + L|\Psi(t)\rangle = |f(t)\rangle$, QED. Allerdings war hier zweimal den Faktor $\frac{1}{2}$ involviert: einmal bei $\theta(0)$, dann beim Integral über die Deltafunktion mit Argument an der Obergrenze des Integrals. Beides ist korrekt, wir benutzen zur Sicherheit aber noch eine zweite Methode. Diesmal wollen wir auch gleich direkt in der Ortsdarstellung arbeiten, um näher an unserer elektromagnetischen Wellengleichung im Ortsraum zu sein.

3.2.2.3 Die Wellengleichung im Ortsraum

Jetzt betrachten wir die Wellengleichung

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{x},t) + L_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{x},t), \qquad (3.70)$$

und zwar wieder als Anfangswertproblem. Hierbei ist z.B. $L_{\mathbf{x}} = -\Delta_{\mathbf{x}}$ der Laplace-Operator, und die Inhomogenität f die Ladungsdichte bzw. eine Komponente der Stromdichte. Die allgemeine Lösung ist wieder eine Superposition aus der Lösung der homogenen Gleichung, mit der die AB erfüllt werden, und der speziellen Lösung, die die Reaktion auf die Inhomogenität f beschreibt. Physikalisch interessiert uns letztere momentan am meisten: wie werden Wellen aus sich bewegenden Ladungen und Ladungsdichten erzeugt, ohne dass vorher Felder da waren? Wie sehen die entsprechenden Wellen aus? Wir steuern also directement auf den Hertzschen Dipol zu!

Der Ausgangspunkt ist wieder die Berücksichtigung der korrekten Randbedingungen auf dem vorgegebenen Gebiet V des \mathbb{R}^3 durch eine Basis von Eigenfunktionen des Operators $L_{\mathbf{x}}$, die diese Randbedingungen automatisch erfüllen. Solche Basisfunktionen hatten wir z.B. schon in der Elektrostatik $-L_{\mathbf{x}} = \Delta_{\mathbf{x}}$ kennen gelernt, z.B. für elektrostatische Probleme vor einer oder zwischen zwei leitenden Platten, oder in einem endlichen Würfel. Bei elektromagnetischen Wellen sind diese Randbedingungen meistens etwas komplizierter, aber für den Augenblick schieben wir diese Problematik in die Eigenfunktionen $\phi_n(\mathbf{x})$ von $L_{\mathbf{x}}$;

$$L_{\mathbf{x}}\phi_n(\mathbf{x}) = \lambda_n \phi_n(\mathbf{x}), \tag{3.71}$$

wobei n auch ein kontinuierlicher Index sein kann.

BEISPIEL: $V = \mathbb{R}^3$, $L_{\mathbf{x}} = -\Delta$,

$$-\Delta\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = k^2 \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}), \quad \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad \text{ebene Wellen} .$$
(3.72)

Jetzt definieren wir

Definition Die retardierte Greensche Funktion $G_{\text{ret}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t - t')$ zur inhomogenen Wellengleichung $\ddot{\Phi}(\mathbf{x}, t) + L_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t)$ auf einem vorgegebenen Gebiet V des \mathbb{R}^3 ist durch

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + L_{\mathbf{x}}\right) G_{\text{ret}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t - t') = \delta(t - t')\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad G_{\text{ret}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t - t' < 0) = 0 (3.73)$$

definiert.

Dann gilt

Satz 10. Die spezielle Lösung der Wellengleichung $\ddot{\Phi}(\mathbf{x},t) + L_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{x},t)$ im Ortsraum (Gebiet V des \mathbb{R}^3) zur Anfangsbedingung $\Phi(\mathbf{x},t_0) = 0$, $\dot{\Phi}(\mathbf{x},t_0) = 0$ ist gegeben durch

$$\Phi(\mathbf{x},t) = \int_{t_0}^t dt' \int d^3 \mathbf{x}' G_{\text{ret}}(\mathbf{x},\mathbf{x}';t-t') f(\mathbf{x}',t'), \qquad (3.74)$$

wobei die retardierte Greensche Funktion

$$G_{\rm ret}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t - t') = \sum_{n} \phi_n(\mathbf{x}) \phi_n^*(\mathbf{x}') \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(t - t')}{\sqrt{\lambda_n}} \theta(t - t')$$
(3.75)

erfüllt mit dem vollständigen System von Eigenfunktionen $\phi_n(\mathbf{x})$ von $L_{\mathbf{x}}$ zu den Eigenwerten λ_n , $L_{\mathbf{x}}\phi_n(\mathbf{x}) = \lambda_n\phi_n(\mathbf{x})$. Hierbei sollen $\phi_n(\mathbf{x})$ die gegebenen Randbedingungen der Wellengleichung auf V erfüllen.

BEWEIS: Zunächst sieht man direkt $\Phi(\mathbf{x}, t_0) = 0$. Weiterhin setzen wir diesmal $G_{\text{ret}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t - t')$ direkt unter das Integral ein und leiten ab,

$$\frac{d}{dt}\Phi(\mathbf{x},t) = \frac{d}{dt}\int_{t_0}^t dt' \int d^3\mathbf{x}' \sum_n \phi_n(\mathbf{x})\phi_n^*(\mathbf{x}') \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(t-t')}{\sqrt{\lambda_n}} f(\mathbf{x}',t')$$

$$= \int_{t_0}^t dt' \int d^3\mathbf{x}' \sum_n \phi_n(\mathbf{x})\phi_n^*(\mathbf{x}')\cos\sqrt{\lambda_n}(t-t')f(\mathbf{x}',t'), \quad (3.76)$$

woran man direkt $\dot{\Phi}(\mathbf{x}, t_0) = 0$ erkennt. Die zweite Ableitung folgt zu

$$\frac{d^2}{dt^2} \Phi(\mathbf{x}, t) = \int d^3 \mathbf{x}' \sum_n \phi_n(\mathbf{x}) \phi_n^*(\mathbf{x}') f(\mathbf{x}', t)
- \int_{t_0}^t dt' \int d^3 \mathbf{x}' \sum_n \phi_n(\mathbf{x}) \phi_n^*(\mathbf{x}') \sqrt{\lambda_n} \sin \sqrt{\lambda_n} (t - t') f(\mathbf{x}', t')
= \int d^3 \mathbf{x}' \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') f(\mathbf{x}', t)
- L_{\mathbf{x}} \int_{t_0}^t dt' \int d^3 \mathbf{x}' \sum_n \phi_n(\mathbf{x}) \phi_n^*(\mathbf{x}') \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} (t - t')}{\sqrt{\lambda_n}} \theta(t - t')
= f(\mathbf{x}, t) - L_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}, t),$$
(3.77)

wobei wir

$$L_{\mathbf{x}}\phi_n(\mathbf{x}) = \lambda_n \phi_n(\mathbf{x}), \quad \sum_n \phi_n(\mathbf{x})\phi_n^*(\mathbf{x}') = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$
(3.78)

(Vollständigkeitsrelation) benutzt haben, QED.

AUFGABE: Wir definieren eine Greensche Funktion

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t - t') \equiv \sum_{n} \phi_n(\mathbf{x}) \phi_n^*(\mathbf{x}') \frac{\sin \sqrt{\lambda_n}(t - t')}{\sqrt{\lambda_n}}$$
(3.79)

zur Wellengleichung $\ddot{\Phi}(\mathbf{x},t) + L_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{x},t)$, wobei wieder $\phi_n(\mathbf{x})$ ein vollständiges System von Eigenfunktionen von $L_{\mathbf{x}}$ zu den Eigenwerten λ_n ist.

a) Zeigen Sie, dass die retardierte Greensche Funktion $G_{\text{ret}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t-t') \equiv G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t-t')$ $t')\theta(t-t')$ tatsächlich die Definitionsgleichung Gl. (3.73) zur Wellengleichung erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass sich die Lösung des Anfangswertproblems der homogenen Wellengleichung

$$\ddot{\Phi}(\mathbf{x},t) + L_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x},t) = 0, \quad \Phi(\mathbf{x},t_0) = \Phi_0(\mathbf{x}), \quad \dot{\Phi}(\mathbf{x},t_0) = \Psi_0(\mathbf{x})$$
(3.80)

schreiben läßt als

$$\Phi(\mathbf{x},t) = \int d^3 \mathbf{x}' \frac{d}{dt} G(\mathbf{x},\mathbf{x}';t-t') \Phi_0(\mathbf{x}') + \int d^3 \mathbf{x}' G(\mathbf{x},\mathbf{x}';t-t') \Psi_0(\mathbf{x}').$$
(3.81)

c) Konstruieren Sie die Greensche Funktion G(x, x'; t - t') für die Gleichung der schwingenden Saite $\ddot{\Phi}(x,t) - \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x,t) = 0$ (eine Dimension, Intervall V = [0, L], Randbedingung $\Phi(0,t) = \Phi(L,t) = 0$. Lösen Sie damit das (einfache) Anfangswertproblem $\Phi(x,0) = \alpha \sin \frac{2\pi x}{L}$, $\dot{\Phi}(x,0) = 0$. Diskutieren Sie den Zusammenhang mit der Theorie der Fourierreihen.

3.2.3 Wellen im Ortsraum \mathbb{R}^3

Wir lösen jetzt die inhomogene Wellengleichung

$$\ddot{\Phi}(\mathbf{x},t) - \Delta_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{x},t), \quad c = 1.$$
(3.82)

Wir haben also den Spezialfall $V=\mathbb{R}^3,\, L_{\mathbf{x}}=-\Delta$ vorliegen.

3.2.3.1 $G_{\rm ret}$ direkt über die Definition

Hierzu setzen wir die ebenen Wellen $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}$, Gl. (3.72), in Gl. (3.75) ein;

$$G_{\text{ret}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t - t') = \sum_{n} \phi_{n}(\mathbf{x}) \phi_{n}^{*}(\mathbf{x}') \frac{\sin \sqrt{\lambda_{n}}(t - t')}{\sqrt{\lambda_{n}}} \theta(t - t')$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{3}} \int d^{3}\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \frac{\sin k(t - t')}{k} \theta(t - t'), \quad k = |\mathbf{k}|. \quad (3.83)$$

Wir benötigen also das Fourierintegral (Kugelkoordinaten $y = \cos \theta$, $x = |\mathbf{x}|$),

$$G(\mathbf{x},t) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \frac{\sin kt}{k} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k 2\pi \int_{-1}^1 dy e^{ikxy} \sin kt$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{x} \int_0^\infty dk 2\sin kx \sin kt = \frac{1}{(2\pi)^2 x} \int_0^\infty dk \left(\cos k(x-t) - \cos k(x+t)\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2 x} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty dk \left(\cos k(x-t) - \cos k(x+t)\right) = \frac{\delta(x-t) - \delta(x+t)}{4\pi x}, \quad (3.84)$$

wegen x + t > 0 also

$$G_{\rm ret}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) = \frac{\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - t)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \theta(t)$$
(3.85)

und entsprechend natürlich durch Verschieben des Zeitarguments $G_{\text{ret}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t - t') = \frac{\delta(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|-(t-t'))}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\theta(t-t')$ Das ging also sehr schnell und schmerzlos durch direktes Ausrechnen.

3.2.3.2 G_{ret} durch Fouriertransformation

Wir versuchen, die retardierte Greensche Funktion $G_{\text{ret}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t - t') \equiv G_{\text{ret}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; t - t')$ direkt durch Fouriertransformation ihrer Definitionsgleichung Gl. (3.73) zu berechnen;

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - \Delta_{\mathbf{x}}\right) G_{\text{ret}}(\mathbf{x};t) = \delta(t)\delta^{(3)}(\mathbf{x}) \rightsquigarrow (-\omega^2 + k^2)\tilde{G}_{\text{ret}}(\mathbf{k};\omega) = 1$$
$$\rightsquigarrow G_{\text{ret}}(\mathbf{x};t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega d^3 \mathbf{k} \frac{e^{-i\omega t} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{k^2 - \omega^2}$$
(3.86)

Wenn wir zunächst das ω -Integral

$$G_{\rm ret}(\mathbf{k};t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{k^2 - \omega^2}, \quad \text{noch nicht korrekt}$$
(3.87)

berechnen, haben wir ein Problem mit der Singularität auf der reellen Achse bei $k^2 = \omega^2$. Weiterhin wollen wir ja die Definition $G_{\text{ret}}(\mathbf{k}; t < 0) = 0$ erfüllen, was mit Gl. (3.87) nicht möglich scheint. Das Problem liegt hier in der Verwendung der Fouriertransformation $t \to \omega$, die strenggenommen für das Anfangswertproblem keinen Sinn macht: man muss eigentlich eine Laplace-Transformation verwenden. Trotzdem ist die Fouriertrafo bei der Berechnung extrem praktisch, und beide Probleme können 'auf einen Schlag' gelöst werden durch folgenden Trick, der das korrekte $G_{\text{ret}}(\mathbf{k}; t)$ liefert:

$$G_{\rm ret}(\mathbf{k};t) \equiv \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{k^2 - (\omega + i\varepsilon)^2}.$$
(3.88)

Die Pole des Integranden $\frac{e^{-i\omega t}}{k^2 - (\omega + i\varepsilon)^2}$ liegen dann in der *unteren* komplexen ω -Ebene. Wir können das Integral mit dem *Residuensatz* lösen: Wegen des $e^{-i\omega t}$ im Zähler legt dabei das Vorzeichen von t fest, ob das Integral in der oberen oder der unteren Halbebene geschlossen werden darf, damit der Beitrag zum Integral auf dem Halbkreis verschwindet:

t > 0, müssen unten in $\text{Im}\omega < 0$ schliessen (3.89)

$$t < 0$$
, müssen oben in $\text{Im}\omega > 0$ schliessen. (3.90)

Da in der oberen ω -Ebene aber keine Pole liegen, ist für t < 0 das Integral nach dem Residuensatz gleich Null, wie wir es wollen! Für t > 0 liefert die Anwendung des Residuensatzes auf den gegen den Uhrzeigersinn in der unteren Halbebene durchlaufenen Halbkreis dann

$$G_{\rm ret}(\mathbf{k};t>0) = \frac{1}{2\pi}(-2\pi i)\frac{1}{2k}\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{Res}\left[\frac{e^{-i\omega t}}{\omega+i\varepsilon+k} - \frac{e^{-i\omega t}}{\omega+i\varepsilon-k}\right]$$
$$= \frac{-i}{2k}\left[e^{ikt} - e^{-ikt}\right] = \frac{\sin kt}{k}, \quad k \equiv |\mathbf{k}|, \quad (3.91)$$

also insgesamt

$$G_{\rm ret}(\mathbf{k};t) = \frac{\sin kt}{k}\theta(t)$$
(3.92)

Der Rest der Rechnung besteht in der Fourier-Rücktrafo in den Ortsraum;

$$G_{\rm ret}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} G_{\rm ret}(\mathbf{k}; t), \qquad (3.93)$$

was genau zum bereits oben berechneten Fourierintegral Gl. (3.84) führt, also wieder

$$G_{\rm ret}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) = \frac{\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - t)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \theta(t)$$
(3.94)

wie in Gl. (3.85). Warum haben wir diese kompliziert scheinende Rechnung gemacht, obwohl das Gleiche herauskommt? Erstens ist es immer vorteilhaft, zwei unabhängige Rechenmethoden zu haben. Zweitens vermeidet diese Berechnung die Definition von $G_{\rm ret}$ über Eigenfunktionen von Operatoren, indem sie direkt von der Definitionsgleichung Gl. (3.73) ausgeht. Drittens sind diese Art von Berechnungen von Greenschen Funktionen über Fouriertransformation in vielen anderen Gebieten der theoretischen Physik extrem wichtig, z.B. in der Hochenergiephysik oder der theoretischen Festkörper- und Vielteilchenphysik.

3.2.4 Retardierte Potentiale im \mathbb{R}^3

Wir wenden jetzt unsere Ergebnisse zur Wellengleichung auf den konkreten Fall der elektromagnetischen Wellen an, d.h. die Gleichungen Gl. (3.46)

$$-\Delta\Phi(\mathbf{x},t) + \frac{1}{c^2}\ddot{\Phi}(\mathbf{x},t) = \frac{\rho(\mathbf{x},t)}{\varepsilon_0}$$
(3.95)

$$-\Delta \mathbf{A}(\mathbf{x},t) + \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}}(\mathbf{x},t) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x},t)$$
(3.96)

für das skalare Potential $\Phi(\mathbf{r}, t)$ und das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ in der bequemen Lorenz-Eichung, in der die Gleichungen entkoppeln. Hierbei ist die Gleichung für \mathbf{A} komponentenweise zu verstehen, insgesamt haben wir also vier Wellengleichungen. Wir lösen die Gleichungen im \mathbb{R}^3 ohne irgendwelche Ränder im Endlichen. Weiterhin nehmen wir als Anfangsbedingung an, dass die Potentiale und ihre erste zeitliche Ableitungen zur Zeit t_0 verschwinden, d.h. zur Zeit t_0 sind noch keine elektrischen und magnetischen Felder vorhanden. Weiterhin sollen die Strom/Ladungsdichten auch erst ab der Zeit t_0 wirken,

$$\rho(\mathbf{x}, t < t_0) = 0, \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}, t < t_0) = 0.$$
(3.97)

Dann erhalten wir aus unserem Theorem 10 (wir setzen c = 1 für einen Moment)

$$\Phi(\mathbf{x},t) = \int_{t_0}^t dt' \int d^3 \mathbf{x}' G_{\text{ret}}(\mathbf{x},\mathbf{x}';t-t') \frac{\rho(\mathbf{x}',t')}{\varepsilon_0}$$

$$= \int_{t_0}^t dt' \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\delta(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|-(t-t'))}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \rho(\mathbf{x}',t') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}',t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|},$$
(3.98)

wobei wir Gl. (3.97) berücksichtigt haben, um die Delta-Funktion bei der Zeitintegration auszuwerten. Entsprechend für das Vektorpotential, insgesamt also

$$\Phi(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}',t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \quad (3.99)$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}',t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}, \quad (3.100)$$

wobei wir wieder das c eingesetzt haben (Dimensionsanalyse!). Das ist die Verallgemeinerung der elektrostatischen und magnetostatischen Potentiale,

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad \text{Elektrostatik}$$
(3.101)

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad \text{Magnetostatik} , \qquad (3.102)$$

mit denen wir uns in den ersten beiden Kapitel so ausführlich auseinandergesetzt haben!

Im zeitabhängigen Fall können wir nun direkt Ursache und Wirkung diskutieren: wir haben ja ein sauber definiertes Anfangswertproblem. Die Zeitargumente

$$t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c \tag{3.103}$$

in den Ladungs- und Stromdichten der retardierten Potentiale Gl. (3.99) besagen, dass ein Ladungs/Strom-Beitrag am Ort \mathbf{x}' die Zeit $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$ benötigt, um am Ort \mathbf{x} zum Potential beizutragen. Anders ausgedrückt: zur Zeit t tragen am Ort \mathbf{x} die Ladungs-dichten/Stromdichten an allen Orten \mathbf{x}' bei, aber jeweils mit ihren Werten zur früheren Zeit $t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$. Die Lichtgeschwindigkeit c ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit dieser zeitverzögerten Wirkung.

3.2.5 Der Hertzsche Dipol

(z.B. FREDENHAGEN) Als vereinfachtes Modell einer zeitlich oszillierenden Ladungsverteilung betrachten wir jetzt einen am Ursprung lokalisierten mikroskopischen *elektrischen*, zeitabhängigen Dipol $\mathbf{d}(t)$, der durch die Ladungsdichte Gl. (2.57)

$$\rho_{\mathbf{d}}(\mathbf{r},t) = -\mathbf{d}(t)\nabla\delta^{(3)}(\mathbf{r}) \tag{3.104}$$

erzeugt werde. Die Kontinuitätsgleichung legt dann die zugehörge Stromdichte fest;

$$\mathbf{j}_{\mathbf{d}}(\mathbf{r},t) = \dot{\mathbf{d}}(t)\delta^{(3)}(\mathbf{r}), \qquad (3.105)$$

denn div $\dot{\mathbf{d}}(t)\delta^{(3)}(\mathbf{r}) = \dot{\mathbf{d}}(t)$ grad $\delta^{(3)}(\mathbf{r}) = -\dot{\rho}_{\mathbf{d}}(\mathbf{r},t)$. Eingesetzt in das retardierte Vektorpotential Gl. (3.99) ergibt das

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\dot{\mathbf{d}}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c) \delta^{(3)}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi |\mathbf{x}|} \dot{\mathbf{d}}(t - |\mathbf{x}|/c). \quad (3.106)$$

Das zugehörige Magnetfeld ist

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \frac{1}{|\mathbf{x}|} \times \dot{\mathbf{d}}(t-|\mathbf{x}|/c) + \frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{x}|} \nabla \times \dot{\mathbf{d}}(t-|\mathbf{x}|/c)
= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \times \dot{\mathbf{d}}(t-|\mathbf{x}|/c) + \frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{x}|} \nabla(t-|\mathbf{x}|/c) \times \ddot{\mathbf{d}}(t-|\mathbf{x}|/c)
= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\dot{\mathbf{d}}(t-|\mathbf{x}|/c) \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} + \ddot{\mathbf{d}}(t-|\mathbf{x}|/c) \times \frac{\mathbf{x}}{c|\mathbf{x}|^2} \right].$$
(3.107)

Das Magnetfeld hat in diesem Modell also mit seiner Summe aus Nahfeldanteil $\propto \frac{\dot{d}}{r^2}$ und $Fernfeldanteil\propto \frac{\ddot{\mathbf{a}}}{r})$ eine relativ einfache Struktur. Für das elektrische Feld benötigen wir das retardierte skalare Potential

$$\Phi(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}',t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\mathbf{d}(t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c)\nabla_{\mathbf{x}'}\delta^{(3)}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3 \mathbf{x}' \operatorname{div}_{\mathbf{x}'} \left(\frac{\mathbf{d}(t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right) \delta^{(3)}(\mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{d}(t-|\mathbf{x}|/c)}{|\mathbf{x}|}$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{\mathbf{d}(t-|\mathbf{x}|/c)\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} + \frac{\dot{\mathbf{d}}(t-|\mathbf{x}|/c)\mathbf{x}}{c|\mathbf{x}|^2}\right).$$
(3.108)

Hiervon den Gradienten;

$$\nabla \Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\nabla \frac{(\mathbf{d})\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} + \nabla \frac{(\dot{\mathbf{d}}|\mathbf{x}|/c)\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right).$$
(3.109)

Wenn die Terme in (.) konstant wären, gäbe das einfach das entsprechende Dipolfeld. Hinzu kommen die Ableitungen

$$\nabla \mathbf{d}(t - |\mathbf{x}|/c) = -\frac{\mathbf{x}}{c|\mathbf{x}|} \dot{\mathbf{d}}(t - |\mathbf{x}|/c)$$

$$\nabla \dot{\mathbf{d}}(t - |\mathbf{x}|/c) = -\frac{\mathbf{x}}{c|\mathbf{x}|} \ddot{\mathbf{d}}(t - |\mathbf{x}|/c)$$

$$\nabla |\mathbf{x}| = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|},$$
(3.110)

zusammen also mit den Abkürzungen $\mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \equiv \frac{\mathbf{x}}{x}$

$$-\nabla \Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{dn}) - \mathbf{d}}{x^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3\mathbf{n}(\dot{\mathbf{dn}}) - \dot{\mathbf{d}}}{cx^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\dot{\mathbf{dn}} + \ddot{\mathbf{dn}}|\mathbf{x}|/c - \dot{\mathbf{dn}}\right) \frac{\mathbf{x}}{cx^3}$$
(3.111)

Hinzu kommt noch

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{x}|}\ddot{\mathbf{d}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{x}|}\ddot{\mathbf{d}}.$$
(3.112)

Das ursprünglich in der Magnetostatik eingeführte Vektorpotential trägt hier konkret zum elektrischen Feld bei, was man auch schon am ausgenutzten $\mu_0 \varepsilon_c^2 = 1$ erkennt. Insgesamt folgt das elektrische Feld hiermit also zu

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) \equiv -\nabla \Phi(\mathbf{x},t) - \frac{d}{dt} \mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{dn}) - \mathbf{d}}{x^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{dn}) - \mathbf{d}}{cx^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{n}(\mathbf{\ddot{dn}}) - \mathbf{\ddot{d}}}{c^2 x}$$
(3.113)

Wir fassen das nochmal zusammen,

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{x^2} + \frac{\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{cx} \right] \\
\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{3\mathbf{n}(\mathbf{dn}) - \mathbf{d}}{x^3} + \frac{3\mathbf{n}(\dot{\mathbf{dn}}) - \dot{\mathbf{d}}}{cx^2} + \frac{\mathbf{n}(\ddot{\mathbf{dn}}) - \ddot{\mathbf{d}}}{c^2x} \right]. \quad (3.114)$$

Man beachte, dass hier die Zeitargumente im Dipol
moment ${\bf d}$ auf der rechten Seite stets die retardierten Zeiten

$$t_{\rm ret} = t - |\mathbf{x}|/c \tag{3.115}$$

sind und deshalb dort also auch noch eine Ortsabhängigkeit entsteht.

3.2.5.1 Fernfeld

Für $x \to \infty$ sind nur noch die Terme
 $\propto \frac{1}{x}$ in Gl. (3.114) relevant;

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{x},t) &\approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{c^3 x} \\
\mathbf{E}(\mathbf{x},t) &\approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{n}(\ddot{\mathbf{dn}}) - \ddot{\mathbf{d}}}{c^2 x}, \quad x \equiv |\mathbf{x}| \to \infty.
\end{aligned}$$
(3.116)

Man erkennt

$$\mathbf{n}(\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}) - \ddot{\mathbf{d}} = \mathbf{n}(\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}) - \ddot{\mathbf{d}}(\mathbf{n}\mathbf{n}) = -\mathbf{n} \times (\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}), \qquad (3.117)$$

das elektrische und magnetische Feld stehen also im Fernbereich senkrecht aufeinander;

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = c\mathbf{B}(\mathbf{x},t) \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{x},t) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{d}(t-x/c) \times \mathbf{n}}{c^3 x}, \quad x \to \infty, \quad (3.118)$$

das elektrische und magnetische Feld stehen also im Fernbereich senkrecht aufeinander. BEISPIEL: Oszillierender elektrischer Dipol in \mathbf{e}_z -Richtung;

$$\mathbf{d}(\tau) = q\mathbf{e}_z z(\tau); z(\tau) = a \sin(\omega \tau)$$
(3.119)

$$\rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{x},t) \approx -\frac{qa\omega^2 \sin(\omega t - k|\mathbf{x}|)}{4\pi\varepsilon_0 c^3|\mathbf{x}|} \mathbf{e}_z \times \mathbf{n}, \quad |\mathbf{x}| \to \infty,$$
 (3.120)

 mit

$$k \equiv \frac{\omega}{c}.\tag{3.121}$$

In Polarkoordinaten ist (z.B. SKRIPT MATHEMATISCHE METHODEN)

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_{r} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta), \quad \mathbf{e}_{\phi} = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$$
$$\mathbf{e}_{\theta} = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta); \mathbf{e}_{r} \times \mathbf{e}_{\phi} = -\mathbf{e}_{\theta}$$
$$\mathbf{e}_{z} \times \mathbf{n} = \sin\theta\cos\phi\mathbf{e}_{y} - \sin\theta\sin\phi\mathbf{e}_{x} = \sin\theta\mathbf{e}_{\phi}, \quad (3.122)$$

also

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) \approx -\frac{qa\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3} \frac{\sin(\omega t - k|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} \sin\theta \mathbf{e}_{\phi} \\
\mathbf{E}(\mathbf{x},t) \approx -\frac{qa\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{\sin(\omega t - k|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} \sin\theta \mathbf{e}_{\theta}, \quad |\mathbf{x}| \to \infty.$$
(3.123)

Der Polarwinkel θ bezieht sich hierbei auf die z-Achse, in deren Richtung der oszillierende elektrische Dipol liegt. Auf der z-Achse verschwinden die Felder also. Die zeit-räumliche Abhängigkeit

$$\frac{\sin(\omega t - k|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} \tag{3.124}$$

wird als eine monochromatische Kugelwelle mit Winkelfrequenz ω und Wellenzahl k bezeichnet. Die Kugelwellen Gl. (3.123) breiten sich in \mathbf{e}_r -Richtung aus, also radial. An jedem Punkt \mathbf{x} stehen im Fernfeld die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} senkrecht aufeinander und zeigen in die zeitlich konstanten Richtungen \mathbf{e}_{θ} bzw. \mathbf{e}_{ϕ} : man spricht von *linearer Polarisation*.

AUFGABE: Berechne das Fernfeld eines elektrischen Dipols $\mathbf{d}(\tau)$ im Ursprung, der sich kreisförmig und monoton mit der Winkelgeschwindigkeit ω in einer Ebene dreht.

3.2.5.2 Nahfeld

Für $x \to 0$ wird Gl. (3.114) zu

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{d}}(t_{\text{ret}}) \times \mathbf{n}}{x^2}$$
(3.125)

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{d}(t_{\text{ret}})\mathbf{n}) - \mathbf{d}(t_{\text{ret}})}{x^3}$$
(3.126)

Das elektrische Feld hat also in der Nähe des Ursprungs die Form eines elektrischen Dipolfeldes, vgl. Gl. (2.55). Das gilt allerdings nicht für das Magnetfeld!

AUFGABE: Berechne die Felder, die von einem im Ursprung lokalisierten, zeitabhängigen magnetischen Dipol $\mu(t)$ erzeugt werden. Benutze hierzu die mikroskopische Form Gl. (2.57) der Ladungsdichte,

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = -\boldsymbol{\mu}(t) \times \nabla \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \tag{3.127}$$

3.3 Poyntingscher Satz

3.3.1 Einführung

Wir wollen einen Ausdruck für die Energie eines gegebenen elektromagnetischen Systems berechnen. Hierzu betrachten wir N Ladungen q_i mit Massen m_i an den Punkten $(\mathbf{x}_i, m_i \mathbf{v}_i)$ im klassischen Phasenraum. Auf das *i*-te Teilchen wirkt die Lorentz-Kraft

$$\mathbf{F}_{i} = q_{i}\mathbf{E}(\mathbf{r}_{i}(t)) + q_{i}\dot{\mathbf{r}}_{i}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_{i}(t)) = m_{i}\ddot{\mathbf{r}}_{i}(t)$$
(3.128)

Die Änderung der kinetischen Energie der N Ladungen ist dann (Newtonsche Mechanik)

$$\frac{d}{dt}W_{\rm kin} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\mathbf{r}}_i^2 = \sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\mathbf{r}}_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^{N}q_i\dot{\mathbf{r}}_i\mathbf{E}(\mathbf{r}_i(t)).$$
(3.129)

Hierzu trägt also nur das elektrische Feld bei, und die Massen m_i fallen heraus. Die obige Gleichung besagt zunächst einmal nichts anderes als Leistung = Kraft mal Geschwindigkeit, wobei die Kraft vom **E**-Feld herrührt und das **B**-Feld an den Massen keine Arbeit verrichtet. Wenn das elektrische Feld in Gl. (3.129) ein *äußeres* Feld wäre, wäre man damit fertig. Was uns hier aber interessiert, sind abgeschlossene Systeme, in denen alle Kräfte und Felder letztlich von den inneren Wechselwirkungen der Teilchen untereinander herrühren.

In der klassischen Mechanik muss in abgeschlossenen Systemen aus N Teilchen eine Änderung der gesamten kinetischen Energie mit einer entsprechende Änderung an potentieller Energie verbunden sein: Energieerhaltungssatz. Bei dessen Herleitung über die Newtonschen Bewegungsgleichungen werden dabei explizit 'innere Kräfte' zwischen allen Teilchen vorausgesetzt, die sich aus konservativen *Wechselwirkungspotentialen* herleiten lassen (z.B. SKRIPT MECHANIK). Wir wissen allerdings bereits, dass diese Kräfte in der Elektrodynamik wegen der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen retardierte Kräfte sein müssen. Das mikroskopsche Wechselwirkungspotential zwischen geladenen Körper ist das Coulomb-Potential, das wir aber nur für relativ zueinander ruhende Körper benutzen können. Ein Vorgehen analog zu der Herleitung des Energiesatzes aus den Newtonschen Gleichungen erscheint deshalb unpraktisch, zumal wir mit dem Feldbegriff ja offensichtlich ein viel praktischeres Werkzeug vorliegen haben. Klar ist aber auch, dass die Newtonschen Mechanik mit ihren Wechselwirkungspotentialen Probleme hat.

3.3.2 Maxwellsche Gleichungen und Energieerhaltung

In der Tat sollen die Maxwellschen Gleichungen ja eine konsistente Theorie zur Beschreibung der Wechselwirkung zwischen beliebig bewegten, geladenen Teilchen darstellen, mit dem 'Umweg' über die beiden Felder **E** und **B**. Die Bewegung einer Ladung erzeugt ja Felder, die wiederum auf andere Ladungen wirken: wenn die Maxwellschen Gleichungen physikalisch konsistent sein sollen, müssen sich mit ihnen auch energetische Fragestellungen lösen lassen.

Hierzu schreiben wir Gl. (3.129) zunächst mit Hilfe der Stromdichte Gl. (2.1)

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \equiv \sum_{i=1}^{N} q_i \dot{\mathbf{r}}_i(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)), \quad \text{(Ladungs)Stromdichte}$$
(3.130)

um, und zwar als ein Integral über im ganzen \mathbb{R}^3 definierte Felder, wobei die Stromdichte wieder als distributionswertig zugelassen wird,

$$P(t) \equiv \frac{d}{dt} W_{\rm kin} = \int d^3 \mathbf{r} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}(t)), \qquad (3.131)$$

wobei wir hier und im Folgenden immer ein großes aber endliches Volumen V annehmen, in dem die Ladungen und Felder enthalten sind. Diesen Ausdruck formen wir nun mit den Maxwellschen Gleichungen um;

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} - \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}.$$
(3.132)

Wir benutzen auch ('Nabla-Kakül', z.B. BRONSTEIN)

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{B}$$
(3.133)

was sich nach dem Induktionsgesetz als

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{B}\mathbf{B} - \mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{B}$$
(3.134)

schreiben läßt. Damit haben wir insgesamt

$$P(t) = \int d^{3}\mathbf{r}\mathbf{j}\mathbf{E} = \int d^{3}\mathbf{r} \left(\frac{1}{\mu_{0}} \operatorname{rot}\mathbf{B} - \varepsilon_{0}\dot{\mathbf{E}}\right)\mathbf{E}$$
$$= \int d^{3}\mathbf{r} \left(\frac{-1}{\mu_{0}} \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\mu_{0}}\dot{\mathbf{B}}\mathbf{B} - \varepsilon_{0}\dot{\mathbf{E}}\mathbf{E}\right).$$
(3.135)

Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes läßt sich das umschreiben zu

$$P(t) = -\int_{\partial V} d^2 \mathbf{r} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) - \frac{d}{dt} \int_{V} d^3 \mathbf{r} u(\mathbf{r}, t), \quad \text{Poyntingscher Satz} \quad (3.136)$$

$$\mathbf{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad \text{Energiestromdichte (Poynting-Vektor)} \quad (3.137)$$

$$u \equiv \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2, \quad \text{Energiedichte} . \quad (3.138)$$

Zur Interpretation schreiben wir den Poyntingschen Satz noch einmal in lokaler Form,

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t)\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \operatorname{div}\mathbf{S}(\mathbf{r},t) + \dot{u}(\mathbf{r},t) = 0.$$
(3.139)

Das ist die Summe der Änderung der kinetischen Energiedichte der Ladungen jE, der Divergenz der Energiestromdichte, und der Änderung der Energiedichte u.

Einen Erhaltungssatz der Energie zu allen Zeiten t bekommen wir, wenn wir das Volumen V unendlich gross wählen, so dass das Oberflächenintegral und damit der Beitrag der Energiestromdichte wegfällt. Dann hat man

$$\frac{d}{dt}W_{\rm kin}(t) + \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r} u(\mathbf{r}, t) = 0.$$
(3.140)

Die 'potentielle Energie' der Mechanik von N wechselwirkenden Teilchen ist in unserer 'Feldtheorie' also durch den Ausdruck $\int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{r} u(\mathbf{r}, t)$ gegeben, und wir bezeichnen $u \equiv \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2$ deshalb als *Energiedichte des elektromagnetischen Feldes*. Was passiert

also, wenn wir nicht den gesamten \mathbb{R}^3 , sondern nur ein Teilvolumen V betrachten? Die Orte der Ladungen können dann zwar auf V beschränkt sein, die Felder sind es im Allgemeinen aber nicht: um dann dem Feld eine Energie zuordnen zu können, muss man einen Energiestrom zwischen V und dem Rest des \mathbb{R}^3 zulassen. Der Energiesatz ist dann wieder 'lokal' in V erfüllt. Wir interpretieren diesen Energiestrom als *Strahlung* durch die Oberfläche von V.

Problematisch für die Interpretation ist allerdings, dass man in der Definition der Energiestromdichte statt **S** wegen div rot = 0 auch **S** + rot**a** mit einem beliebigen Feld **a** hätte schreiben können, vgl. auch die Diskussion in REBHAN.

3.3.3 Statischer Grenzfall

Der statische Grenzfall der Energiedichte

$$u(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}(\mathbf{r},t)|^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}(\mathbf{r},t)|^2$$
(3.141)

liefert zunächst bei Abwesenheit von Magnetfeldern die bekannte Energie und die Energiedichte Gl. (1.75) des elektrostatischen Feldes,

$$W_{\rm el} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) = \int d^3 \mathbf{r} w_{\rm el}(\mathbf{r}) \quad (3.142)$$
$$w_{\rm el}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2, \quad \text{Energiedichte (elektrostatisches Feld).} \quad (3.143)$$

Analog interpretieren wir deshalb einen rein magnetischen Anteil $w_{\text{mag}}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}(\mathbf{r})|^2$ als Energiedichte des magnetostatischen Feldes, was wir in dem Kapitel zur Magnetostatik nicht abgeleitet hatten und was hier gewissermassen als Nebenprodukt abfällt. Die Energie des magnetostatischen Feldes läßt sich damit schreiben als

$$W_{\text{mag}} = \frac{\mu_0}{8\pi} \int d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{r} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int d^3 \mathbf{r} w_{\text{mag}}(\mathbf{r}) \quad (3.144)$$
$$w_{\text{mag}}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}(\mathbf{r})|^2, \quad \text{Energiedichte (magnetostatisches Feld).} \quad (3.145)$$

AUFGABE: Leite aus $W_{\text{mag}} = \int d^3 \mathbf{r} w_{\text{mag}}(\mathbf{r})$ die beiden anderen Darstellungen in Gl. (3.144) her.

3.3.4 Induktivitäten von Stromverteilungen der Magnetostatik

Für ein magnetostatisches System aus N Stromfäden C_i gilt für die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ (siehe Kapitel Magnetostatik)

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} I_i \int_{C_i} d\mathbf{r}' \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \qquad (3.146)$$

und damit ist die magnetostatische Energie

$$W_{\text{mag}} = \frac{\mu_0}{8\pi} \int d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$
$$= \frac{\mu_0}{8\pi} \int d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \sum_{i,j=1}^N I_i I_j \int_{C_i} d\mathbf{r}_i \delta^3 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \int_{C_j} d\mathbf{r}_j \delta^3 (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j)$$
$$= \frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{i,j=1}^N I_i I_j \int_{C_i} \int_{C_j} \frac{d\mathbf{r}_i d\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}.$$
(3.147)

Wir schreiben das als

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} I_i L_{ij} I_j$$
$$L_{ij} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_i} \int_{C_j} \frac{d\mathbf{r}_i d\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad \text{Induktivitätskoeffizienten } L_{ij}. \quad (3.148)$$

Die Matrix der Induktivitätskoeffizienten L_{ij} ist in der Magnetostatik analog zur Matrix der Kapazitätskoeffizienten der Elektrostatik. Die Induktivitätskoeffizienten sind konkret im Allgemeinen allerdings relativ schwer zu berechnen. Insbesondere die *Selbstinduktivitäten* L_{ii} sind strenggenommen für einen infinitesimal dünnen Draht nicht wohldefiniert, da dann die Integrale Gl. (3.148) divergieren!

Wir diskutieren die Selbstinduktivität und ihre physikalische Bedeutung am Beispiel der unendlich langen Spule (NOLTING). Die Spule habe eine Windungsdichte n(Windungen pro Länge) und einen Querschnitt A. Das Magnetfeld zeigt dann aus Symmetriegründen in Richtung der Spulenachse. Seinen Wert B(r) erhalten wir aus dem Ampereschen Gesetz,

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j},\tag{3.149}$$

angewendet auf einen Längsschnitt der Länge l (Stokesche Fläche) senkrecht zu den Windungen mit Rand ∂F , der N Windungen enthält (SKIZZE);

$$\int d^2 \mathbf{r} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \int_{\partial F} d\mathbf{r} \mathbf{B} = \mu_0 N I \rightsquigarrow B l = \mu_0 N I$$
(3.150)

oder

$$B = \mu_0 n I$$
, unendlich lange Spule (Windungsdichte n). (3.151)

mit $n \equiv N/l$. Dabei haben wir ausgenutzt, dass im Aussenraum der Spule das Magnetfeld verschwindet: es hängt nämlich aus Symmetriegründen nicht von Achsenabstand r ab und muss deshalb insbesondere im Aussenraum den gleichen Wert wie im Unendlichen haben: dort sollte es Null sein (vgl. PURCELL, gibt es ein besseres Argument?)

Die magnetische Feldenergie in einem Abschnitt der Länge L der Spule ist

$$W_{\text{mag}} = \int d^3 \mathbf{r} \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}(\mathbf{r})|^2 = \frac{1}{2\mu_0} A l B^2 = \frac{1}{2} L I^2.$$
(3.152)

Durch Vergleich mit Gl. (3.151) folgt daraus die Induktivitä
tLeines Stückes der Längel,

$$L = \mu_0 n^2 l A$$
, lange Spule (Länge l , Windungsdichte n , Fläche A). (3.153)

Die unendlich lange Spule dient in dieser Formel als Modell für Spulen endlicher Länge, bei denen wir von Inhomogenitäten des Magnetfelds an den Rändern der Spule absehen.

3.3.5 Poynting-Vektor beim Hertzschen Dipol

Als Anwendung können wir leicht den Poynting-Vektor im Fernfeld beim im Ursprung lokalisierten Hertzschen Dipol Gl. (3.123) berechnen. Wir benutzen dabei analog zu Gl. (3.119) wieder ein zeitabhängiges Dipolmoment

$$\mathbf{d}(\tau) = \mathbf{e}_z d(\tau), \tag{3.154}$$

lassen jetzt aber eine beliebige Zeitabhängigkeit $d(\tau)$ zu. Dann folgt völlig analog zu Gl. (3.123) für das Fernfeld

$$\mathbf{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \tag{3.155}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3} \frac{\ddot{d}(t-|\mathbf{x}|/c)}{|\mathbf{x}|} \sin\theta \mathbf{e}_{\phi}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{x},t) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{\ddot{d}(t-|\mathbf{x}|/c)}{|\mathbf{x}|} \sin\theta \mathbf{e}_{\theta}.$$

Wegen $\mathbf{e}_{\theta} \times \mathbf{e}_{\phi} = \mathbf{e}_r$ und $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$ hat man

$$\mathbf{S}(\mathbf{x},t) \approx \frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} \frac{[\hat{d}(t-|\mathbf{x}|/c)]^2}{|\mathbf{x}|^2} \sin^2\theta \mathbf{e}_r, \quad |\mathbf{x}| \to \infty.$$
(3.156)

Integration über die Oberfläche S_r einer Kugel vom Radius $r = |\mathbf{x}|$ liefert mit $d\mathbf{r}^2 = 2\pi r^2 \sin \theta$ und $\int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$ (REBHAN) nun

$$\int_{S_r} d^2 \mathbf{r} \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \frac{[\ddot{d}(t - |\mathbf{x}|/c)]^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}, \quad \text{abgestrahlte Dipolleistung.}$$
(3.157)

MODELL a: Mikroskopisch stellen wir uns den Dipol als zwei entgegengesetzt geladene Punktladungen $\pm q$ an den Stellen $\pm \frac{1}{2}z(t)$ auf der z-Achse vor, d.h.

$$\rho(\mathbf{r},t) = q \left(\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{e}_z z(t)/2) - \delta^3(\mathbf{r} + \mathbf{e}_z z(t)/2) \right) \rightarrow -\mathbf{d}(t) \nabla \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \quad (3.158)$$
$$\mathbf{d}(t) \equiv \mathbf{e}_z d(t) \equiv \mathbf{e}_z qz(t). \quad (3.159)$$

Die Ladungen haben dann die Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}(t) = \pm \mathbf{e}_z \dot{z}(t)/2 = \pm \dot{\mathbf{d}}(t)/(2q)$ und somit ist

$$P_a(t) \equiv \int_{S_r} d^2 \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} 4[\dot{\mathbf{v}}(t - r/c)]^2.$$
(3.160)

MODELL b: Wir stellen uns den Dipol als *eine* Punktladungen q an der Stelle z(t) auf der z-Achse vor, d.h.

$$\rho(\mathbf{r},t) = q\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{e}_z z(t)) \quad \to \quad -\mathbf{d}(t)\nabla\delta^{(3)}(\mathbf{r}) \tag{3.161}$$

$$\mathbf{d}(t) \equiv \mathbf{e}_z d(t) \equiv \mathbf{e}_z q z(t). \tag{3.162}$$

Dieses ist ein 'trivialer' Dipol im Sinne unserer Diskussion der Multipolmomente der Elektrostatik, da er einfach eine verschobene Punktladung darstellt, was zu einem nichtverschwindendem Monopolmoment führt: das System ist nicht elektrisch neutral. Dieser Dipol ist allerdings nützlich, um die abgestrahlte Leistung einer beschleunigten Punktladung zu berechnen: Die Ladung hat nämlich den Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}(t) = \mathbf{e}_z \dot{z}(t) = \dot{\mathbf{d}}(t)/q$ und somit ist

$$P_b(t) \equiv \int_{S_r} d^2 \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} [\dot{\mathbf{v}}(t - r/c)]^2.$$
(3.163)

Dieses Ergebnis zeigt, dass in der klassischen Elektrodynamik eine einzelne, beschleunigt bewegte Ladung elektromagnetische Strahlung abstrahlt, und zwar selbst für kleine, nichtrelativistische Geschwindigkeiten:

$$P_{\text{Larmor}}(t) = \frac{q^2 \dot{\mathbf{v}}^2 (t - r/c)}{6\pi\varepsilon_0 c^3}, \quad \text{Larmorsche Strahlungsdämpfung.}$$
(3.164)

3.4 Braucht man Felder?

3.4.1 Einführung

Kann man nicht auf das Konzept des elektrischen und magnetischen Feldes völlig verzichten? Letzlich kommt es doch nur auf die Wechselwirkungskräfte zwischen Teilchen an. Diese Frage (über die sicherlich jeder schon einmal nachgedacht hat) trieb Richard Feynman in seinen jungen Jahren an, über Alternativen zur herkömmlichen klassischen Elektrodynamik nachzudenken¹. Ein Problem hierbei ist allerdings die *Strahlungsdämpfung* Gl. (3.164): selbst ein *einzelnes*, geladenes Punktteilchen unterliegt elektromagnetischen Einflüssen, nämlich einem Energieverlust durch abgestrahlte elektromagnetische Felder, wenn es beschleunigt wird. Die Felder scheinen also mehr als nur ein technisches Vehikel zur Übermittlung von Kräften zwischen zwei oder mehreren Teilchen zu sein - sie sind eigenständige physikalische Objekte.

¹ siehe z.B. seine Vorlesung anlässlich der Verleihung des Nobelpreises 1965.

3.4.2 Abraham-Lorentz-Strahlungskraft

(JACKSON) Wir stellen uns eine Punktladung q vor, die zur Zeit t = 0 ruht und in einer kurzen Zeitspanne t auf die Geschwindigkeit v beschleunigt wird. Wir versuchen, eine Strahlungskraft \mathbf{F}_{rad} zu definieren, die eine Rückwirkung auf die Ladung aufgrund der eigenen Abstrahlung beschreiben soll. Diese Kraft soll Leistung = Kraft × Geschwindigkeit erfüllen

$$\int_0^t dt' \mathbf{F}_{\rm rad}(t') \mathbf{v}(t') = -P_{\rm Larmor}(t), \qquad (3.165)$$

wobei von Retardierungseffekten abgesehen werden soll. Es folgt dann durch partielle Integration

$$\int_0^t dt' \mathbf{F}_{\rm rad}(t') \mathbf{v}(t') = -\int_0^t dt' \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{v}}^2(t') = \int_0^t dt' \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \mathbf{v}(t') \ddot{\mathbf{v}}(t'), \qquad (3.166)$$

wobei die Randterme wegen $\mathbf{v}(0) = 0$ und $\dot{\mathbf{v}}(t) = 0$ verschwinden. Es gilt also

$$\int_0^t dt' \left(\mathbf{F}_{\rm rad}(t') - \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{v}}(t') \right) \mathbf{v}(t') = 0.$$
(3.167)

Das soll für einen beliebigen Geschwindigkeitsverlauf $\mathbf{v}(t')$ gelten, woraus

$$\mathbf{F}_{\rm rad} = m\tau \ddot{\mathbf{v}}, \quad \tau \equiv \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 mc^3}.$$
(3.168)

folgt. Addiert man diese Strahlungskraft zu der mechanischen Kraft im Newtonschen Gesetz $m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}$, so erhält man

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} + m\tau\ddot{\mathbf{v}}, \quad \tau \equiv \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 mc^3}, \quad \text{Abraham-Lorentz-Gleichung}, \quad (3.169)$$

was manchmal auch Lorentz-Dirac-Gleichung genannt wird (REBHAN).

Zur INTERPRETATION der hier auftretenden Zeit vergleichen wir die kinetische Energie nach der Beschleunigungsphase mit der Energie des abgestrahlten Feldes;

$$E_{\rm kin} \sim m[\dot{\mathbf{v}}(t)t]^2; \quad W_{\rm rad}(t) \sim P_{\rm Larmor}(t)t = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{v}}^2(t)t, \qquad (3.170)$$

wobei das ~ andeutet, dass es sich um eine grobe Abschätzung und keine exakte Rechnung handelt. Aus $E_{\rm kin} \gg W_{\rm rad}(t)$ folgt dann

$$t \gg \tau \equiv \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 mc^3} \tag{3.171}$$

als die Bedingung für die Länge t der Beschleunigungsphase, damit die Strahlungsenergie gegenüber der kinetischen Energie vernachlässigt werden darf. Nur für sehr kurze, pulsartige Beschleunigungsphasen wird also die Strahlungsdämpfung zu einer spürbaren Korrektur zur Newtonschen Bewegungsgleichung $m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}$ führen. Für Elektronen hat man z.B. $\tau = 6.26 \times 10^{-24}$ s (JACKSON).

3.4.3 Feynman-Wheeler-Theorie

Feynman gab sich mit all dem zunächst nicht zufrieden und entwickelte mit Wheeler in der *Absorber-Theorie* eine Alternative zur herkömmlichen klassischen Elektrodynamik (1945). Diese Theorie benutzt zusätzlich zu den bekannten retardierten Potentialen auch *avancierte* Potentiale. Eine der Motivationen war es damals, das Problem der Divergenzen in einer Quantentheorie des Elektromagnetismus zu umgehen. Die Feynman-Wheeler-Theorie stellt sich jedoch wohl aus heutiger Sicht und auch aus der Sicht der modernen Quantenfeldtheorien als relativ unfruchtbar dar.

Was bleibt, ist die Frage, was ein elektromagnetisches Feld eigentlich ist ('was ist Licht'). Mit dem *Photon* als das dem elektromagnetischen Feld zugeordnetem Teilchen wird im Rahmen der Quantenmechanik hier zumindest ein Ausweg geschaffen, Feld- und Teilchenbegriff miteinander zu kombinieren und zu versöhnen.

3.4.4 Die Liénard-Wiechert-Potentiale

Zu dieser Diskussion gehören in der klassischen Elektrodynamik auch die von einzelnen Punktladungen erzeugten Potentiale, die sogenannten Liénard-Wiechert-Potentiale. Aus ihnen lässt sich z.B. auch noch einmal die Larmor-Formel Gl. (3.164) ohne den Umweg über das Dipolmoment herleiten (z.B. REBHAN, wir führen diese Rechnung hier aber nicht durch).

Wir berechnen die retardierten Potentiale einer Punktladung q, die sich auf einer Bahn $\mathbf{r}_0(t)$ bewege. Es ist also

$$\rho(\mathbf{x},t) = q\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)), \quad \mathbf{j}(\mathbf{x},t) = q\dot{\mathbf{r}}_0(t)\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)), \quad -\infty < t.$$
(3.172)

Das retardierte skalare Potential Gl. (3.98) wird damit

$$\Phi(\mathbf{x},t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \int d^{3}\mathbf{x}' \frac{\delta(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c-(t-t'))}{4\pi\varepsilon_{0}|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \rho(\mathbf{x}',t')$$

$$= q \int_{-\infty}^{t} dt' \int d^{3}\mathbf{x}' \frac{\delta(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c-(t-t'))}{4\pi\varepsilon_{0}|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \delta^{3}(\mathbf{x}'-\mathbf{r}_{0}(t'))$$

$$= q \int_{-\infty}^{t} ds \frac{\delta(|\mathbf{x}-\mathbf{r}_{0}(s)|/c-(t-s))}{4\pi\varepsilon_{0}|\mathbf{x}-\mathbf{r}_{0}(s)|}.$$
(3.173)

Hier benutzen wir die Formel für die Delta-Funktion einer Funktion f(s) mit einfachen Nullstellen t_0 ,

$$\delta(f(s)) = \sum_{t_0} \frac{\delta(s - t_0)}{|f'(t_0)|}.$$
(3.174)

In unserem Fall also (LANDAU II, man muss noch begründen, dass es nur eine Nullstelle gibt)

$$\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{r}_0(s)|/c - (t - s)) = \frac{\delta(s - t_0)}{\left|1 - \frac{\dot{\mathbf{r}}_0(t_0)(\mathbf{x} - \mathbf{r}_0(t_0))}{c|\mathbf{x} - \mathbf{r}_0(t_0)|}\right|}$$
(3.175)

und damit

$$\Phi(\mathbf{x},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{||\mathbf{x} - \mathbf{r}_0(t_0)| - \dot{\mathbf{r}}_0(t_0)(\mathbf{x} - \mathbf{r}_0(t_0))/c|} \quad (3.176)$$

$$|\mathbf{x} - \mathbf{r}_0(t_0)| / c - (t - t_0) = 0.$$
(3.177)

Hierbei definiert die zweite Gleichung implizit die Zeit t_0 . Wir erkennen die Verallgemeinerung des elektrostatischen Falls;

$$\Phi_{\text{stat}}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_0(t_0)|}.$$
(3.178)

Für das Vektorpotential läuft alles ganz entsprechend, man erhält insgesamt also

$$\Phi(\mathbf{x},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{||\mathbf{x} - \mathbf{r}_0(t_0)| - \dot{\mathbf{r}}_0(t_0)(\mathbf{x} - \mathbf{r}_0(t_0))/c|}$$
(3.179)

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{q\mu_0 \dot{\mathbf{r}}_0(t_0)}{4\pi} \frac{1}{||\mathbf{x} - \mathbf{r}_0(t_0)| - \dot{\mathbf{r}}_0(t_0)(\mathbf{x} - \mathbf{r}_0(t_0))/c|}$$
(3.180)

$$||\mathbf{x} - \mathbf{r}_0(t_0)|/c - (t - t_0) = 0.$$
 Liénard-Wiechert-Potentiale. (3.181)

AUFGABE: Berechne hieraus das elektrische und magnetische Feld für sehr langsame Teilchen.

3.5 Ebene Wellen

3.5.1 Homogene Wellengleichung

Wir haben bereits an vielen Stellen in der Physik ebene Wellen kennen gelernt, z.B. als 'Basisfunktionen'

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$$
(3.182)

in Entwicklungen nach Funktionensystemen (hier ist d die räumliche Dimension). Genauer gesagt, sind die $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ die Eigenfunktionen des Laplace-Operators;

$$\Delta\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = -k^2 \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad k \equiv |\mathbf{k}| \tag{3.183}$$

und damit erhält man Lösungen der homogenen Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2} - \Delta\right)\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} = \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2\right)\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} = 0.$$
 (3.184)

Es muss also die Dispersionsrelation

$$\omega = \pm c |\mathbf{k}| = \pm \omega(k), \quad \omega(k) \equiv c |\mathbf{k}| \tag{3.185}$$

erfüllt sein. Da die Wellengleichung linear ist, können wir Lösungen

$$\psi_{\mathbf{k};\pm}(\mathbf{r},t) \equiv e^{i(\mathbf{kr}\pm\omega(k)t)} \tag{3.186}$$

beliebig zu Wellenpaketen überlagern;

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \mathbf{k} \left(a_+(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{kr} + \omega(k)t)} + a_-(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{kr} - \omega(k)t)} \right).$$
(3.187)

BEISPIEL:

$$a_{-}(\mathbf{k}) = \delta^{3}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{0}), \quad a_{+}(\mathbf{k}) = \delta^{3}(\mathbf{k} + \mathbf{k}_{0}) \rightsquigarrow \Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{d}} 2\cos(\mathbf{k}_{0}\mathbf{r} - \omega(k_{0})t) (3.188)$$

Die Wellenpakete werden häufig so konstruiert, dass gewisse Anfangsbedingungen der zugrundeliegenden Wellengleichung erfüllt werden.

AUFGABE: Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems der homogenen Wellengleichung

$$\ddot{\Phi}(\mathbf{x},t) + \Delta \Phi(\mathbf{x},t) = 0, \quad \Phi(\mathbf{x},t_0) = \Phi_0(\mathbf{x}), \quad \dot{\Phi}(\mathbf{x},t_0) = \Psi_0(\mathbf{x})$$
(3.189)

direkt mittels Fouriertransformation und vergleichen Sie mit dem Ergebnis Gl. (3.81).

3.5.2 Monochromatische ebene Wellen

Definition Eine raum-zeitliche Abhängigkeit der Form

$$f(\mathbf{r},t) \equiv e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} \tag{3.190}$$

heisst monochromatische ebene Welle zum Wellenvektor \mathbf{k} und zur Winkelfrequenz ω . Das Argument $\mathbf{kr} - \omega t$ heisst Phase.

Hierbei wurde bewusst der Vorfaktor weggelassen, da diese Art von Abhängigkeit wie erwähnt in vielen Bereichen der Physik eine Rolle spielt und sich dann je nach Situation andere Vorfaktoren ergeben. Weiterhin ist Gl. (3.190) sowieso eine komplexe Grösse und damit immer nur ein 'Zwischenglied' hin zu einer 'physikalischen' Grösse, wie z.B. dem obigen Wellenpaket als tatsächlicher Lösung einer Wellengleichung. Monochromatische ebene Wellen haben folgende Eigenschaften:

1. Für feste Zeiten t sind die Orte konstanter Phase $\mathbf{kr} - \omega t$ einer monochromatischen ebenen Welle durch

$$\mathbf{kr} - \omega t = \text{const} \tag{3.191}$$

definiert, was für t = const also eine Ebenengleichung wird: auf Ebenen senkrecht zum Wellenvektor **k** ist zu festen Zeiten t die Phase konstant.

2. Die Phase $\mathbf{kr} - \omega t$ kann um ein Vielfaches von 2π geändert werden, ohne den Wert von $f(\mathbf{r}, t) = e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}$ zu ändern. Es gilt die raum-zeitliche Periodizität $(n \in \mathbb{N})$
$$\begin{aligned} f(\mathbf{r},t) &= f(\mathbf{r},t+nT), \quad T \equiv \frac{2\pi}{\omega}, \quad \text{zeitliche Periode } T \\ f(\mathbf{r},t) &= f\left(\mathbf{r}+n\frac{\mathbf{k}}{k}\lambda,t\right), \quad \lambda \equiv \frac{2\pi}{k}, \quad \text{Wellenlänge } \lambda \ , \quad (3.192) \end{aligned}$$

was direkt aus $e^{in2\pi} = 1$ folgt. Insbesondere ist also die Richtung der räumlichen Periodizität durch die Richtung des Wellenvektors **k** bestimmt.

Ebene Wellen sind als Lösungen der *homogenen* Wellengleichung abstrakte zunächst einmal abstrakte mathematische Gebilde: Im Sinne eines Anfangswertproblems kann man sie und ihre Überlagerungen zwar mathematisch vorgeben und mit ihnen die homogene Wellengleichung lösen. Damit ist aber noch nicht erklärt, ob und wie sie überhaupt erzeugt werden können, d.h. woher z.B. solche Anfangswerte herrühren.

3.5.3 Kugelwellen und ebene Wellen

Definition Eine raum-zeitliche Abhängigkeit der Form

$$g(\mathbf{r},t) \equiv a(r)e^{i(kr-\omega t)}, \quad k = |\mathbf{k}|, \quad r = |\mathbf{r}|$$
(3.193)

heisst monochromatische Kugelwelle zum Wellenvektor \mathbf{k} und zur Winkelfrequenz ω . Das Argument $kr - \omega t$ heisst wieder Phase.

Im Gegensatz zur ebenen Welle ist hier die räumliche Abhängigkeit nur über die Beträge kr gegeben, woraus sphärische Symmetrie (Kugelsymmetrie) bezüglich des Ursprungs (r = 0) erfolgt. In der Definition Gl. (3.193) versuchen wir auch, den Fall anderer Dimensionen $d \neq 3$ gleich mit einzuschliessen.

Ein BEISPIEL hatten wir bereits beim Fernfeld des Hertzschen Dipols kennen gelernt. Dort war

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) \approx -\frac{q\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3} \frac{\sin(\omega t - kr)}{r} \sin\theta \mathbf{e}_{\phi}, \quad k = \frac{\omega}{c} \\
\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \approx -\frac{q\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{\sin(\omega t - kr)}{r} \sin\theta \mathbf{e}_{\theta}, \quad r \to \infty \tag{3.194}$$

mit der für Kugelwellen in drei Dimensionen typischen 1/r-Abhängigkeit. Hierbei liegt mit

$$\sin(\omega t - kr) = \frac{1}{2i} \left(e^{i(-kr + \omega t)} - e^{i(kr - \omega t)} \right)$$
(3.195)

eine einfache Linearkombination von komplexwertigen Kugelwellen Gl. (3.193) vor.

Für grosse Abstände vom Ursprung kann eine Kugelwelle durch eine ebene Welle approximiert werden. Zunächst schreiben wir formal

$$kr - \omega t = |\mathbf{k}||\mathbf{r}| - \omega t = \frac{\mathbf{kr}}{\cos\vartheta} - \omega t$$
 (3.196)

Jetzt wird für grosse r eine Richtung \mathbf{k} in r-Richtung fest gewählt und dann die Winkelabhängigkeit für *alle* \mathbf{r} vernachlässigt, d.h. $\cos \vartheta = 1$ gesetzt. In dieser fest gewählten Richtung sehen dann die Wellenfronten der Kugelwelle approximativ wie die Wellenfronten einer ebenen Welle mit Wellenvektor \mathbf{k} aus, mit Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = c\frac{2\pi}{\omega} = cT = \frac{c}{\nu} \tag{3.197}$$

mit der *Frequenz* (nicht Winkelfrequenz) $\nu \equiv \frac{\omega}{2\pi}$. Die 1/*r*-Abhängigkeit der Kugelwelle kann man dann als ein schwache, ortsabhängige Amplitudenänderung der ebenen Welle auffassen (SKIZZE).

3.5.4 Helmholtz-Gleichung

Die quellfreien Maxwell-Gleichungen liefern homogene Wellengleichungen, die ebene Wellen als Lösungen haben: das folgt bereits aus unserer bisherigen Diskussion. Wir lösen die quellfreien Maxwell-Gleichungen

div
$$\mathbf{E} = 0$$
, rot $\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}$, div $\mathbf{B} = 0$, rot $\mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}$ (3.198)

jetzt noch einmal direkt mit einem Ansatz (JACKSON)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega)$$
(3.199)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},\omega)$$
(3.200)

Das führt auf

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} - i\omega \tilde{\mathbf{B}} = 0, \quad \nabla \times \tilde{\mathbf{B}} + i\frac{\omega}{c^2}\tilde{\mathbf{E}} = 0$$
 (3.202)

und wieder wegen rot rot = grad div - Δ

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{\mathbf{E}} = 0, \quad \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{\mathbf{B}} = 0.$$
 (3.203)

Das sind sechs Gleichungen vom Typ

$$(\Delta + k^2) \Phi(\mathbf{r}) = 0$$
, Helmholtz-Gleichung, (3.204)

wobei $k^2 = \omega^2/c^2$ fest vorgegeben ist. Die Lösungen der Helmholtz-Gleichung sind bei Randwertproblemen, z.B. beim Phänomen der *Beugung*, von Interesse.

3.5.5 Ebene elektromagnetische Wellen

In Analogie zum Wellenpaket Gl. (3.187) schreiben wir jetzt die Lösung der quellfreien Maxwellgleichungen als

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{k} \left(\mathbf{E}_+(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega(k)t)} + \mathbf{E}_-(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} + \omega(k)t)} \right)$$
(3.205)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{k} \left(\mathbf{B}_+(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega(k)t)} + \mathbf{B}_-(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}+\omega(k)t)} \right)$$
(3.206)

Zunächst sollen die Felder reell sein, woraus folgt

$$\mathbf{E}_{-}(\mathbf{k}) = \mathbf{E}_{+}(-\mathbf{k})^{*}, \quad \mathbf{B}_{-}(\mathbf{k}) = \mathbf{B}_{+}(-\mathbf{k})^{*}.$$
 (3.207)

BEISPIEL: 'Realteil-Schreibweise' einer monochromatischen ebenen Welle;

$$\mathbf{E}_{+}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{3} \delta^{3}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{0}) \frac{1}{2} \mathbf{E}_{0}$$
(3.208)

$$\rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega(k_0)t)} + \frac{1}{2} \mathbf{E}_0^* e^{-i(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega(k_0)t)} = \Re \left[\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega(k_0)t)} \right] (3.209)$$

Weiterhin folgt aus $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ und $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$

$$\mathbf{k}\mathbf{E}_{\pm}(\mathbf{k}) = 0, \quad \mathbf{k}\mathbf{B}_{\pm}(\mathbf{k}) = 0, \tag{3.210}$$

und wieder durch Vergleich der Terme vor den linear unabhängigen Exponentialausdrücken $e^{i({\bf kr}\pm\omega(k)t)}$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \rightsquigarrow i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{-}(\mathbf{k}) = -i\omega(k)\mathbf{B}_{-}(\mathbf{k})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c^{2}}\dot{\mathbf{E}} \rightsquigarrow i\mathbf{k} \times \mathbf{B}_{-}(\mathbf{k}) = \frac{i\omega(k)}{c^{2}}\mathbf{E}_{-}(\mathbf{k})$$
(3.211)

(entsprechend für $\mathbf{E}_{+}(\mathbf{k})$ und $\mathbf{B}_{+}(\mathbf{k})$.) Es gilt also: \mathbf{k} , $\mathbf{E}_{+}(\mathbf{k})$ und $\mathbf{B}_{+}(\mathbf{k})$ sind orthogonal zueinander, ebenso \mathbf{k} , $\mathbf{E}_{-}(\mathbf{k})$ und $\mathbf{B}_{-}(\mathbf{k})$. Die ebenen Wellen $\mathbf{E}_{\mp}(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{kr}\pm\omega(k)t)}$ und $\mathbf{B}_{\mp}(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{kr}\pm\omega(k)t)}$ sind also *transversal*, d.h. die Feld-Amplituden $\mathbf{E}_{\mp}(\mathbf{k})$ und $\mathbf{B}_{\mp}(\mathbf{k})$ stehen senkrecht zur Propagationsrichtung \mathbf{k} der ebenen Welle.

Die Transversalitäts-Bedingung Gl. (3.207) legt den Vektor $\mathbf{E}_{+}(\mathbf{k})$ als eine komplexe Linearkombination aus zwei Basisvektoren in der zu \mathbf{k} senkrechten Ebene fest. Da die Magnetfeld-Amplituden $\mathbf{B}_{\pm}(\mathbf{k})$ über Gl. (3.211) aus den elektrischen Amplituden $\mathbf{E}_{\pm}(\mathbf{k})$ folgen, reicht es, z.B. nur $\mathbf{E}_{+}(\mathbf{k})$ zu diskutieren.

3.5.6 Polarisation

Wir betrachten die monochromatische ebene Welle des elektrischen Feldes Gl. (3.208)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \Re \left[\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega(k_0)t)} \right] = \Re \mathbf{E}_0 e^{i\phi}, \qquad (3.212)$$

wobei wir für einen Moment die Phase $\phi = \mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega(k_0)t$ als laufenden Parameter betrachten. Wir wollen die geometrische Form (Kurve) finden, die der Feldstärkevektor $\Re \mathbf{E}_0 e^{i\phi}$ in der zu \mathbf{k}_0 senkrechten Ebene durchläuft. Mit der Parametrisierung

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_x E_1 e^{i\alpha} + \mathbf{e}_y E_2 e^{i\beta} \tag{3.213}$$

durch reelle Feldamplituden E_x und E_y so
wie Phasenwinkel α und β folgt

$$\mathbf{E}(\phi) \equiv \Re \mathbf{E}_0 e^{i\phi} = \mathbf{e}_x E_1 \cos(\phi + \alpha) + \mathbf{e}_y E_2 \cos(\phi + \beta)$$
(3.214)

Durch Verschiebung der Phase $\phi \rightarrow \phi - \beta/2 - \alpha/2$

$$\cos(\phi + \alpha) \to \cos(\phi + \alpha/2 - \beta/2), \quad \cos(\phi + \beta) \to \cos(\phi - \alpha/2 + \beta/2) \tag{3.215}$$

und damit

$$\mathbf{E}(\phi + (\alpha + \beta)/2) = \mathbf{e}_x E_1 \cos(\phi + \delta) + \mathbf{e}_y E_2 \cos(\phi - \delta), \quad \delta \equiv \frac{\alpha - \beta}{2}.$$
(3.216)

Die x- und y-Komponenten des Feldes sind also

$$E_x = E_1 \left(\cos \phi \cos \delta - \sin \phi \sin \delta \right) \tag{3.217}$$

$$E_y = E_2 \left(\cos \phi \cos \delta + \sin \phi \sin \delta \right) \tag{3.218}$$

$$\rightsquigarrow \cos \phi = \left(\frac{E_x}{E_1} + \frac{E_y}{E_2}\right) \frac{1}{2\cos\delta}$$
(3.219)

$$\rightsquigarrow \sin\phi = -\left(\frac{E_x}{E_1} - \frac{E_y}{E_2}\right)\frac{1}{2\sin\delta}, \quad \delta \neq 0, \pm \frac{n\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad E_1, E_2 \neq 0. (3.220)$$

Daraus folgt

$$\left(\frac{E_x}{E_1} + \frac{E_y}{E_2}\right)^2 \frac{1}{4\cos^2\delta} + \left(\frac{E_x}{E_1} - \frac{E_y}{E_2}\right)^2 \frac{1}{4\sin^2\delta} = 1.$$
 (3.221)

3.5.6.1 Zirkulare Polarisation $\delta = \frac{\pi}{4}$, $E_1 = E_2$

Der Spezialfall $\delta=\frac{\pi}{4}$ (z.B. $\alpha=0,\,\beta=\frac{\pi}{2})$ führt wegen $\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ zu

$$\left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_2}\right)^2 = 1 \tag{3.222}$$

auf eine Ellipse mit Hauptachsen in x- und y-Richtung. Für $E_1 = E_2$ wird daraus ein Kreis, man spricht von zirkularer Polarisation.

3.5.6.2 Allgemeine elliptische Polarisation

Die Gleichung Gl. (3.221) ist eine *Ellipsengleichung* in der E_x - E_y -Ebene. Wir können sie z.B. in der Form

$$(E_x, E_y) \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = 1, \quad A, B > 0$$
(3.223)

schreiben, wobei man nachrechnet (AUFGABE), dass die Determinante der Matrix positiv ist. Man kann dann auf Hauptachsen transformieren und hat zwei positive Eigenwerte.

AUFGABE: Zur Parametrisierung kann man z.B.

$$E_1 = E\cos\theta, \quad E_2 = E\sin\theta \tag{3.224}$$

einführen. Berechen Sie hiermit die zwei Eigenwerte, d.h. die Längen der Hauptachsen der Ellipse.

3.5.6.3 Lineare Polarisation

Dieser Fall entspricht gerade dem bisher ausgeschlossenen $\delta = 0, \pm \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{N}$ oder $E_1 = 0$ oder $E_2 = 0$. Die Fälle $E_1 = 0$ oder $E_2 = 0$ sind klar: hier ist die Welle einfach in x- bzw. y-Richtung *linear polarisiert*, d.h. der elektrische Feldvektor schwingt stets längst der x- bzw. y-Achse. Der Fall $\delta = 0, \pm \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{N}$ entspricht gerade einer Phasendifferenz

$$\alpha - \beta = 0, \pm n\pi, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.225}$$

Für $\alpha = 0$ ist dann z.B.

$$\mathbf{E}(\phi) = (\mathbf{e}_x E_1 + \mathbf{e}_y E_2) \cos(\phi), \quad \beta = 0$$
(3.226)

$$\mathbf{E}(\phi) = (\mathbf{e}_x E_1 - \mathbf{e}_y E_2) \cos(\phi), \quad \beta = \pi, \tag{3.227}$$

also wieder eine lineare Polarisation, aber jetzt mit einem allgemeinen festen Vektor $\mathbf{e}_x E_1 \pm \mathbf{e}_y E_2$ in der x-y-Ebene.

4. ELEKTRODYNAMIK IN MATERIE

4.1 Elektrostatik

4.1.1 Vorbereitung: Geladene Platte

Ein dünne unendlich grosse Platte bei z = 0 habe die räumliche Ladungsdichte

$$\rho(\mathbf{x}) = \sigma \delta(z), \quad \text{Flächenladungsdichte } \sigma \ .$$
(4.1)

Das zugehörige elektrische Feld ist

$$\mathbf{E}_0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \mathbf{e}_z, \quad z > 0 \tag{4.2}$$

$$\mathbf{E}_0 = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \mathbf{e}_z, \quad z < 0. \tag{4.3}$$

4.1.2 Leiter

Ein von zwei Ebenen $z = z_+$, $z = z_-$ begrenzter *Leiter* befinde sich jetzt rechts von der geladenen Platte. Der Leiter sei insgesamt ungeladen. Nach Definition eines Leiters bilden sich dann auf dessen Oberflächen $z = z_{\pm}$ Ladungsdichten σ_{\pm} , so dass das elektrische Feld in seinem innern insgesamt verschwindet. Rechts des Leiters ist das elektrische Feld dann wieder ungeändert $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \mathbf{e}_z$.

Durch frei bewegliche Ladungen werden in Leitern elektrostatische Felder also perfekt abgeschirmt.

4.1.3 Isolatormodell

Wir beschreiben die elektrostatischen Eigenschaften eines ungeladenen, nicht-leitenden Körpers durch mikroskopische Dipolmomente $\mathbf{p}(\mathbf{R})$, die fest an den Stellen $\mathbf{R} \in K$ sitzen. Ansonsten enthalte K keine frei beweglichen Ladungen. Den einzelnen Dipolmomenten entspricht eine mikroskopische Ladungsdichte

$$\rho_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}) = -\operatorname{div}_{\mathbf{r}} \left[\mathbf{p}(\mathbf{R}) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \right]$$
(4.4)

Wir definieren die über ein Volumenelement V des Körpers K gemittelte Ladungsdichte;

$$\bar{\rho}_V(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{V} \int_V d^3 \mathbf{R} \rho_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}) = -\text{div}_{\mathbf{r}} \mathbf{P}_V(\mathbf{r})$$
(4.5)

$$\mathbf{P}_{V}(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \int_{V} d^{3} \mathbf{R} \mathbf{p}(\mathbf{R}) \delta^{3}(\mathbf{r} - \mathbf{R}), \quad \text{Polarisation} .$$
(4.6)

Das gemittelte elektrische Feld sollte jetzt der Maxwellgleichung

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\rho_f + \bar{\rho}_V}{\varepsilon_0} \tag{4.7}$$

genügen. Hierbei haben wir die gesamte Ladungsdichte in einen frei beweglichen Anteil, ρ_f , und den aus den Polarisationsladungen herrührenden Anteil $\bar{\rho}_V$ aufgeteilt. Es gilt also

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_V) = \rho_f. \tag{4.8}$$

Wir definieren

$$\mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_V, \quad \text{dielektrische Verschiebung } \mathbf{D}$$
(4.9)

Das **D**-Feld hat folgende wichtige Eigenschaft, die ganz in Analogie zum Vakuumfall steht:



wobei ρ_f die Ladungsdichte der frei beweglichen Ladungsträger ist. Aus Gl. (4.1.3) folgt die Sprungbedingung für das **D**-Feld an einer mit der Flächenladungsdichte σ geladenen Grenzfläche zwischen zwei Körpern,

$$\mathbf{n}(\mathbf{D}_{+} - \mathbf{D}_{-}) = \sigma. \tag{4.11}$$

4.1.4 Plattengeometrie

Ein von zwei Ebenen $z = z_+$, $z = z_-$ begrenzter, insgesamt ungeladener Körper K befinde sich rechts von der in Gl. (4.2) betrachteten geladenen Platte. Wir betrachten den Fall einer homogen Polarisation in z-Richtung;

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}) = \mathbf{p} = |\mathbf{p}|\mathbf{e}_z \tag{4.12}$$

$$\Rightarrow \bar{\rho}_V(\mathbf{r}) = -\frac{1}{V} \int_V d^3 \mathbf{R} \operatorname{div}_{\mathbf{r}} \left[\mathbf{p} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \right]$$
(4.13)

$$= \frac{1}{V} \int_{V} d^{3} \mathbf{R} \operatorname{div}_{\mathbf{R}} \left[\mathbf{p} \delta^{3} (\mathbf{r} - \mathbf{R}) \right]$$
(4.14)

$$= \frac{1}{V} \int_{\partial V} d^2 \mathbf{R} \mathbf{p} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{R}).$$
 (4.15)

Für unseren Körper K bedeutet das (SKIZZE)

$$\bar{\rho}_V(z) = \frac{-\mathbf{p}\mathbf{e}_z}{V}\delta(z-z_-) + \frac{\mathbf{p}\mathbf{e}_z}{V}\delta(z-z_+),\tag{4.16}$$

wobei $\pm \mathbf{e}_z$ die Normalenvektoren auf den Grenzflächen $z = z_{\pm}$ sind. Auf den Grenzflächen sitzen also durch die Polarisation **P** hervorgerufene *Flächenladungsdichten* σ_{\pm} ;

$$\bar{\rho}_V(z) = \sigma_-\delta(z-z_-) + \sigma_+\delta(z-z_+), \quad \sigma_\pm = \pm \mathbf{Pe}_z$$
 (4.17)

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{P}}{V},\tag{4.18}$$

die also betragsmässig gleich sind und das entgegengesetzte Vorzeichen haben. Der Ausdruck Gl. (4.17) zeigt weiterhin, dass innerhalb des Körpers K die mittlere Ladungsdichte verschwindet. Das ist auch anschaulich klar, da wir ja bereits von mikroskopischen Dipolen ausgegangen waren, in denen die einzige Variation der Ladungsdichte (zwei entgegengesetzte Punktladungen) wegen $\rho_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}) = -\mathbf{p}\nabla\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{R})$ jeweils in einem einzigen Punkt \mathbf{R} sitzt, so dass bei Volumen-Mittelung über diesen Punkt Null herauskommen muss. Wie die obigen Rechnung zeigt, gilt das aber tatsächlich nur für eine Volumenmittlung und nicht für die Beiträge an den Rändern des Volumens!

Die Oberflächenladungen σ_{-} und $\sigma_{+} = -\sigma_{-}$ erzeugen jetzt *im* Körper K ein elektrisches Feld \mathbf{E}_{p} . Wegen unserer (stark idealisierten) Annahme $\mathbf{p}(\mathbf{R}) = \mathbf{p}$ in K ist dieses Feld in K sogar räumlich homogen,

$$\mathbf{E}_{p} = \frac{\sigma_{-}}{2\varepsilon_{0}} \mathbf{e}_{z} - \frac{-\sigma_{-}}{2\varepsilon_{0}} \mathbf{e}_{z} = \frac{\sigma_{-}}{\varepsilon_{0}} \mathbf{e}_{z} = -\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_{0}}$$
(4.19)

(SKIZZE!) Dieses Feld addiert sich zu dem durch die geladene Platte z = 0 erzeugten Feld \mathbf{E}_0 , Gl. (4.2), so dass das gesamte Feld \mathbf{E} in K gegeben ist durch

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_p = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}.$$
(4.20)

4.1.5 Dielektrische Verschiebung

In unserem obigen Modell lassen wir jetzt zusätzliche, *frei bewegliche* Ladungen auf der Oberfläche von K zu, die z.B. von aussen aufgebracht sein können. Wie sehen dann die elektrischen Felder in K und ausserhalb von K aus?

Wir nehmen z.B. eine freie Ladungsdichte σ_f bei z = z - an, wieder natürlich der Einfachheit halber völlig homogen in x-y-Richtung. Die Ladungsdichte σ_f erzeugt dann wieder ein zusätzliches elektrisches Feld. Insgesamt haben wir jetzt für das gesamte elektrische Feld (SKIZZE)

$$\mathbf{E} = \frac{-\sigma - \sigma_f}{2\varepsilon_0} \mathbf{e}_z, \quad -\infty < z < 0 \tag{4.21}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma - \sigma_f}{2\varepsilon_0} \mathbf{e}_z, \quad 0 < z < z - \tag{4.22}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma + \sigma_f}{2\varepsilon_0} \mathbf{e}_z - \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}, \quad z_- < z < z +$$
(4.23)

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma + \sigma_f}{2\varepsilon_0} \mathbf{e}_z, \quad z_+ < z < \infty.$$
(4.24)

Wir erkennen jetzt: zum elektrischen Feld **E** gibt es offensichtlich zwei Beiträge: zunächst das Feld, das allein durch die freien Ladungsdichten σ und σ_f erzeugt wird, d.h. im Vakuum ohne den materiellen Körper K. Hinzu kommt das durch die Polarisation **P** in K erzeugte Feld **E**_p. Um beide Anteile voneinander zu unterscheiden, haben wir ja bereits das **D**-Feld definiert;

$$\mathbf{E} \equiv \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{D} + \mathbf{E}_p, \quad \text{dielektrische Verschiebung } \mathbf{D} . \tag{4.25}$$

Man überzeuge sich, dass die Sprungbedingung für das **D**- Feld an einer mit der freien Flächenladungsdichte σ_{frei} geladenen Grenzfläche zwischen zwei Körpern,

$$\mathbf{n}(\mathbf{D}_{+} - \mathbf{D}_{-}) = \sigma_{\text{frei}}.$$
(4.26)

in Gl. (4.21) erfüllt ist!

4.1.6 Dielektrizitätskonstante

Zwischen der Polarisation \mathbf{P} und dem elektrischen Feld \mathbf{E} besteht oft ein linearer Zusammenhang, der in der einfachsten Form als

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}, \quad \chi > 0 \tag{4.27}$$

mit einer Suszeptibilität χ geschrieben wird. Entsprechend folgt

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$
(4.28)

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_0(1+\chi) > \varepsilon_0$$
, Dielektrizitätskonstante . (4.29)

An der Grenzfläche wischen zwei Medien mit Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon_{1,2}$ folgt wegen der Sprungbedingung für das **D**-Feld für den Fall ohne freie Oberflächenladungen

$$\mathbf{n}(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0 \rightsquigarrow \mathbf{n}(\varepsilon_2 \mathbf{E}_2 - \varepsilon_1 \mathbf{E}_1) = 0.$$
(4.30)

Während die Normalkomponenten von \mathbf{D} stetig ist, springt die Normalkomponente von \mathbf{E} .

Anders herum ist es bei der Tangentialkomponente der Felder: Aus

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0 \tag{4.31}$$

folgt durch Anwenden der 'Stokesschen Fläche'

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \rightsquigarrow \mathbf{n} \times (\mathbf{D}_2 / \varepsilon_2 - \mathbf{D}_1 / \varepsilon_1) = 0.$$
(4.32)

Während die Tangentialkomponente von \mathbf{E} stetig ist, springt die Tangentialkomponente von \mathbf{D} .

4.1.7 Theorie der linearen Antwort

Bisher haben wir noch nichts Konkretes über die Entstehung der Polarisation **P** ausgesagt. Im Folgenden beschäftigen wir uns mit *induzierter*, d.h. von einem äusseren Feld bzw. Potential erzeugter Polarisation. Es werde beispielsweise eine Probeladung in einen polarisierbaren Körper eingebracht. Im Vakuum entspreche dieser Probeladung ein Potential $V_{\text{ext}}(\mathbf{r},t)$, wobei wir eine Orts- und Zeitabhängigkeit zulassen. Beispielsweise werde eine Punktladung q zum Zeitpunkt t = 0 an den Punkt **R** gebracht: dann ist $V_{\text{ext}}(\mathbf{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}\theta(t)$. Ein solches externes Potential wird in einem Körper mit einer Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ zu einer Änderung $\delta\rho$ dieser Ladungsdichte führen. Wir nehmen an, dass diese Änderung klein und linear in dem äusseren Potential $V_{\text{ext}}(\mathbf{r},t)$ ist. Dann besteht ein linearer Zusammenhang, der in allgemeinster Form als

$$\delta\rho(\mathbf{r},t) = -\int_{-\infty}^{t} dt' \int d^{3}\mathbf{r}' \chi_{\rho}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t') V_{\text{ext}}(\mathbf{r}',t')$$
(4.33)

geschrieben werden kann, wobei $-\chi_{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')$ den Proportionalitäts-Koeffizienten bezeichnet (das Minuszeichen ist Konvention). Das Zeitintegral läuft wegen der Kausalitätsforderung nur über frühere Zeiten und deshalb nur bis zur Obergrenze t.

Wir nehmen jetzt den einfachsten Fall $K = \mathbb{R}^3$ und räumliche Isotropie sowie Zeittranslationsinvarianz an. Dann ist

$$\delta\rho(\mathbf{r},t) = -\int_{-\infty}^{t} dt' \int d^{3}\mathbf{r}' \chi_{\rho}(\mathbf{r}-\mathbf{r}';t-t') V_{\text{ext}}(\mathbf{r}',t')$$

$$= -\int_{0}^{\infty} d\tau \int d^{3}\mathbf{r}' \chi_{\rho}(\mathbf{r}-\mathbf{r}';\tau) V_{\text{ext}}(\mathbf{r}',t-\tau)$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int d^{3}\mathbf{r}' \chi_{\rho}(\mathbf{r}';\tau) \theta(\tau) V_{\text{ext}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-\tau).$$
(4.34)

Das ist ein Faltungsintegral, so dass durch Fouriertransformation alles extrem vereinfacht wird;

$$\delta \tilde{\rho}(\mathbf{q},\omega) = -\tilde{\chi}_{\rho}(\mathbf{q},\omega) \tilde{V}_{\text{ext}}(\mathbf{q},\omega), \quad \text{Dichte-Response function } \tilde{\chi}_{\rho}(\mathbf{q},\omega) \quad (4.35)$$

mit den Definitionen der Fouriertransformation

$$\delta\tilde{\rho}(\mathbf{q},\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^{3}\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}+i\omega t} \delta\rho(\mathbf{r},t), \quad \tilde{V}_{\text{ext}}(\mathbf{q},\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^{3}\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}+i\omega t} V_{\text{ext}}(\mathbf{r},t)$$

$$\tilde{\chi}_{\rho}(\mathbf{q},\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^{3}\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}+i\omega t} \chi_{\rho}(\mathbf{r};t)\theta(t). \qquad (4.36)$$

AUFGABE: Wiederholung Faltungsintegrale, Faltungssatz.

Die Beziehung Gl. (4.35) drückt den oben eingeführten allgemeinen linearen Zusammenhang zwischen äusserem Potential und der Änderung der Ladungsdichte im Körper K aus. Aus der geänderten Ladungsdichte folgt eine Änderung δV des elektrostatischen Potential im Körper. Wir nehmen an, dass alle Änderungen zeitlich noch so langsam sind, dass wir nicht die vollen Maxwell-Gleichungen zu benutzen brauchen, sondern zeitabhängige Elektrostatik mit der Poissongleichung

$$\Delta_{\mathbf{r}} V(\mathbf{r}, t) = -\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0}$$
(4.37)

betreiben können. Dann gilt im Fourierraum ganz allgemein

$$\tilde{V}(\mathbf{q},\omega) = \frac{\tilde{\rho}(\mathbf{q},\omega)}{q^2\varepsilon_0}.$$
(4.38)

Insbesondere wird eine Änderung $\delta \tilde{\rho}(\mathbf{q}, \omega)$ mit einer Potentialänderung $\delta \tilde{V}(\mathbf{q}, \omega)$ verknüpft sein;

$$\delta \tilde{V}(\mathbf{q},\omega) = \frac{\delta \tilde{\rho}(\mathbf{q},\omega)}{q^2 \varepsilon_0}.$$
(4.39)

Wir wenden jetzt das Superpositionsprinzip der Elektrostatik an: Felder können superponiert werden. Da die Felder als Gradienten aus den Potentialen erzeugt werden, bedeutet das, dass die Summe aus externem Potential $\tilde{V}_{\text{ext}}(\mathbf{q},\omega)$ und $\delta \tilde{V}(\mathbf{q},\omega)$ in unserer linearen Näherung das gesamte Potential $\tilde{V}(\mathbf{q},\omega)$ im Körper K darstellt, d.h.

$$\tilde{V}(\mathbf{q},\omega) = \tilde{V}_{\text{ext}}(\mathbf{q},\omega) + \delta \tilde{V}(\mathbf{q},\omega) = \tilde{V}_{\text{ext}}(\mathbf{q},\omega) \left[1 + \frac{-\tilde{\chi}_{\rho}(\mathbf{q},\omega)}{q^2 \varepsilon_0}\right]$$
(4.40)

Es gilt also der Zusammenhang

$$\tilde{V}(\mathbf{q},\omega) = \frac{V_{\text{ext}}(\mathbf{q},\omega)}{\varepsilon_l(\mathbf{q},\omega)}, \quad \text{longitudinale dielektrische Funktion } \varepsilon_l(\mathbf{q},\omega) \quad (4.41)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_l(\mathbf{q},\omega)} \equiv 1 - \frac{\tilde{\chi}_{\rho}(\mathbf{q},\omega)}{q^2 \varepsilon_0}.$$
(4.42)

Wir erkennen also:

- Ein externes Potential $\tilde{V}_{\text{ext}}(\mathbf{q}, \omega)$ wird in einem polarisierbaren Körper *abgeschirmt*, so dass effektiv ein Potential $\frac{\tilde{V}_{\text{ext}}(\mathbf{q}, \omega)}{\varepsilon_l(\mathbf{q}, \omega)}$ entsteht.
- Das 'longitudinal' bezieht sich auf die elektrostatische Grundgleichung div $\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$: Fouriertrafo!
- Die dielektrische Funktion ist durch die Größe $\tilde{\chi}_{\rho}(\mathbf{q}, \omega)$ bestimmt, die die Ladungsdichteänderung durch Einwirken eines Potentials beschreibt.

4.1.8 Einfaches Modell für $\tilde{\chi}_{\rho}(\mathbf{q},\omega)$

Da offensichtlich alles durch die Dichte-Responsefunktion $\tilde{\chi}_{\rho}(\mathbf{q}, \omega)$, Gl. (4.35), bestimmt ist, benötigen wir hierfür ein einfaches Modell. Für die genaue Diskussion bräuchte man an dieser Stelle weitere mikroskopische Betrachtungen. Wir werden stattdessen ein einfaches Modell zur Abschirmung von Potentialen (*Thomas-Fermi-Abschirmung*) benutzen. Wir stellen uns wieder eine Probeladung der Stärke Q vor, deren Coulomb-Potential beim Einbringen in ein Medium mit vielen beweglichen entgegengesetzten Ladungen *abgeschirmt* werden soll. Dieser Effekt ist z.B. in Elektrolyten mit Ionen gut bestätigt. Für eine starke Abschirmung gehen wir phänomenologisch vor und setzen das abgeschirmte Potential als exponentiell abfallend an. Wir haben also

$$V_{\text{ext}}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r} \to V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \frac{e^{-\kappa r}}{r}, \quad \text{Yukawa-Potential, } \kappa^{-1} \text{ Abschirmlänge}(4.43)$$

mit dem Parameter κ .

Definition Ein nur mit einer Potenz vom Abstand r abfallendes Potential heisst langreichweitig. Ein exponentiell mit r abfallendes Potential heisst kurzreichweitig.

Das Coulomb-Potential ist also langreichweitig, das abgeschirmte Coulomb-Potential (Yukawa-Potential) hingegen kurzreichweitig.

Im Fourierraum gilt (kleine ÜBUNGSAUFGABE)

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \frac{1}{q^2 + \kappa^2} \tag{4.44}$$

Andererseits haben wir nun den Zusammenhang Gl. (4.41),

$$\tilde{V}(\mathbf{q},\omega) = \frac{\tilde{V}_{\text{ext}}(\mathbf{q},\omega)}{\varepsilon_l(\mathbf{q},\omega)}, \quad \frac{1}{\varepsilon_l(\mathbf{q},\omega)} \equiv 1 - \frac{\tilde{\chi}_{\rho}(\mathbf{q},\omega)}{q^2\varepsilon_0}, \quad (4.45)$$

der hier auch für $\omega=0$ (statische Potentiale) wieder erfüllt sein muss. Es muss also gelten

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \frac{1}{q^2 + \kappa^2} = \tilde{V}_{\text{ext}}(\mathbf{q}) \left[1 - \frac{\tilde{\chi}_{\rho}(\mathbf{q},\omega)}{q^2 \varepsilon_0} \right]$$
(4.46)

$$\leftrightarrow \frac{1}{\tilde{w}(\mathbf{q})^{-1} + \varepsilon_0 \kappa^2} = \tilde{w}(\mathbf{q}) \left[1 - \tilde{\chi}_{\rho}(\mathbf{q}, \omega) \tilde{w}(\mathbf{q}) \right], \quad \tilde{w}(\mathbf{q}) \equiv \frac{1}{q^2 \varepsilon_0}$$
(4.47)

$$\leftrightarrow \tilde{\chi}_{\rho}(\mathbf{q},\omega) = \frac{\varepsilon_0 \kappa^2}{1 + \tilde{w}(\mathbf{q})\varepsilon_0 \kappa^2}.$$
(4.48)

Damit haben wir die Dichte-Responsefunktion $\tilde{\chi}_{\rho}(\mathbf{q}, \omega)$ durch die Abschirmlänge κ^{-1} und die Fouriertransformierte des Coulombpotentials $\tilde{w}(\mathbf{q})$ ausgedrückt. Der Ausdruck für $\tilde{\chi}_{\rho}(\mathbf{q}, \omega)$ ist hier natürlich nicht exakt, da er ja phänomenologisch hergeleitet wurde, er motiviert aber den allgemeinen Ansatz

$$\tilde{\chi}_{\rho}^{\rm MF}(\mathbf{q},\omega) \equiv \frac{\chi_0(\mathbf{q},\omega)}{1+\tilde{w}(\mathbf{q})\chi_0(\mathbf{q},\omega)}, \quad \text{Mean-Field-Form von } \tilde{\chi}_{\rho} . \tag{4.49}$$

Hierbei ist $\chi_0(\mathbf{q} = 0, \omega = 0) = \varepsilon_0 \kappa^2$ für unser einfaches Abschirm-Modell oben. In der Festkörpertheorie (SKRIPT FESTKÖRPERTHEORIE) und statistischen Physik wird gezeigt, dass $\chi_0(\mathbf{q}, \omega)$ die Dichte-Responsefunktion eines Systems unabhängiger Teilchen ist, deren Coulomb-Wechselwirkung untereinander zunächst vernachlässigt wird. Die Coulomb-Wechselwirkung der Teilchen des Systems untereinander wird dann durch ein gemeinsam von allen Teilchen erzeugtes, mittleres elektrisches Feld (' mean field') ersetzt, was genau auf die Form Gl. (4.49) führt. Im Rahmen der Mean-Field-Näherung besteht die Aufgabe dann nur noch in der Berechnung von $\chi_0(\mathbf{q}, \omega)$, was für einfache Modelle häufig exakt möglich ist.

Im Rahmen der Mean-Field-Näherung Gl. (4.49) vereinfacht sich entsprechend auch die longitudinale dielektrische Funktion Gl. (4.41),

$$\varepsilon_l(\mathbf{q},\omega) = \frac{1}{1 - \tilde{w}(\mathbf{q})\tilde{\chi}_{\rho}^{\mathrm{MF}}(\mathbf{q},\omega)} = 1 + \tilde{w}(\mathbf{q})\tilde{\chi}_0(\mathbf{q},\omega).$$
(4.50)

Im Yukawa-Modell mit $\chi_0(\mathbf{q}=0,\omega=0) = \varepsilon_0 \kappa^2$ hat man also wegen $\tilde{w}(\mathbf{q}) = \frac{1}{q^2 \varepsilon_0}$

$$\varepsilon_l(\mathbf{q}, 0) = 1 + \frac{\kappa^2}{q^2}.\tag{4.51}$$

4.1.9 Polarisation und dielektrische Funktion

Wir stellen den Zusammenhang zwischen der obigen allgemeinen Betrachtung und unserem Isolatormodell her. Letzteres war von einer mikroskopischen Dipoldichte

$$\bar{\rho}_V(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{V} \int_V d^3 \mathbf{R} \rho_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}) = -\text{div}_{\mathbf{r}} \mathbf{P}_V(\mathbf{r})$$
 (4.52)

ausgegangen. Wir machen diese Gleichung zeitabhängig

$$\bar{\rho}_V(\mathbf{r},t) \equiv \frac{1}{V} \int_V d^3 \mathbf{R} \rho_{\mathbf{R}}(\mathbf{r},t) = -\text{div}_{\mathbf{r}} \mathbf{P}_V(\mathbf{r},t)$$
(4.53)

und gehen zur Fourierdarstellung über;

$$\bar{\rho}_V(\mathbf{r},t) = -\operatorname{div}_{\mathbf{r}} \mathbf{P}_V(\mathbf{r},t) \rightsquigarrow \tilde{\rho}_V(\mathbf{q},\omega) = -i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{P}}_V(\mathbf{q},\omega).$$
(4.54)

Für induzierte Polarisation fassen wir die gemittelte Ladungsdichte $\bar{\rho}_V(\mathbf{r}, t)$ als die von einem äusseren Potential $V_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$ erzeugte Änderung $\delta \rho$ Ladungsänderung auf;

$$\tilde{\bar{\rho}}_V(\mathbf{q},\omega) = -\tilde{\chi}_{\rho}(\mathbf{q},\omega)\tilde{V}_{\text{ext}}(\mathbf{q},\omega), \qquad (4.55)$$

vgl. Gl. (4.35). Dann folgt daraus

$$-i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{P}}_{V}(\mathbf{q},\omega) = -\tilde{\chi}_{\rho}(\mathbf{q},\omega)\tilde{V}_{\text{ext}}(\mathbf{q},\omega)$$
(4.56)

und wegen $\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r},t) = -\nabla V_{\text{ext}}(\mathbf{r},t)$ hat man

$$\mathbf{q}\tilde{\mathbf{E}}_{\text{ext}}(\mathbf{q},\omega) = -i\mathbf{q}\tilde{V}_{\text{ext}}(\mathbf{q},\omega) \rightsquigarrow \tilde{V}_{\text{ext}}(\mathbf{q},\omega) = i\frac{\mathbf{q}\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{q},\omega)}{q^2}$$
(4.57)

$$\rightsquigarrow \mathbf{q}\tilde{\mathbf{P}}_{V}(\mathbf{q},\omega) = \tilde{\chi}_{\rho}(\mathbf{q},\omega) \frac{\mathbf{q}\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{q},\omega)}{q^{2}}$$
(4.58)

Die longitudinale Polarisation ist also im Fourierraum proportional zum longitudinalen äusseren Feld. Diese Proportionalität möchte man üblicherweise auf das gesamte elektrische Feld beziehen, was aber einfach bewerkstelligt werden kann wegen

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{ext}} - \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0},\tag{4.59}$$

was nach einfacher Umstellung auf

$$\mathbf{q}\tilde{\mathbf{P}}_{V}(\mathbf{q},\omega) = \varepsilon_{0} \frac{\tilde{w}(q)\tilde{\chi}_{\rho}(\mathbf{q},\omega)}{1-\tilde{w}(q)\tilde{\chi}_{\rho}(\mathbf{q},\omega)} \mathbf{q}\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{q},\omega), \quad \tilde{w}(q) \equiv \frac{1}{q^{2}\varepsilon_{0}} \quad (4.60)$$

führt.

Im Rahmen der Mean-Field-Näherung Gl. (4.49) vereinfacht sich dieser Ausdruck wiederum. Wir fassen das gleich mit unseren bisherigen Ergebnissen zusammen;

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{P}}_{l}(\mathbf{q},\omega) &= \varepsilon_{0} \left(\varepsilon_{l}(\mathbf{q},\omega)-1\right) \tilde{\mathbf{E}}_{l}(\mathbf{q},\omega) \quad (4.61) \\
\tilde{\mathbf{D}}_{l}(\mathbf{q},\omega) &= \varepsilon_{0}\varepsilon_{l}(\mathbf{q},\omega) \tilde{\mathbf{E}}_{l}(\mathbf{q},\omega) \quad (4.62) \\
\varepsilon_{l}(\mathbf{q},\omega) &= 1+\tilde{w}(\mathbf{q})\chi_{0}(\mathbf{q},\omega) \quad (4.63)
\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet der Index l die longitudinale Komponente des entsprechenden Feldes, also z.B. $\tilde{\mathbf{E}}_{l}(\mathbf{q}, \omega) = \mathbf{q}\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{q}, \omega)/|\mathbf{q}|.$

AUFGABE 1:

a) Berechnen Sie die Ladungsdichteänderung $\delta\rho(\mathbf{r})$ eines Systems von Ladungen in drei Dimensionen bei Abschirmung einer punktförmigen Ladung Q gemäß dem Yukawa-Potential. Hinweis: benutzen Sie die lineare Beziehung zwischen $V_{\text{ext}}(\mathbf{q})$ und $\delta\rho(\mathbf{q})$ mit der Dichte-Responsefunktion in der mit dem Yukawa-Modell verträglichen Mean-Field-Näherung. Diskutieren Sie die Bedeutung der Abschirmlänge κ^{-1} . Wie gross ist die über den gesamten \mathbb{R}^3 integrierte Ladungsdichteänderung, d.h. gilt in diesem Modell Ladungserhaltung?

b) Wir nehmen an, dass die Ladungsdichteänderung $\delta \rho(\mathbf{r})$ aus Teil a durch mikroskopische induzierte Dipole erzeugt wird. Berechnen Sie die zugehörige longitudinale Polarisation $\mathbf{P}_l(\mathbf{r})$ im Ortsraum.

AUFGABE 2:

a) Leiten Sie die Poisson-Boltzmann-Gleichung

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = \frac{2}{\varepsilon_0} e n_0 \sinh \frac{e\Phi(\mathbf{r})}{k_B T}$$
(4.64)

für ein System von Punktladungen $\pm e$ mit Dichte $n_{\pm}(\mathbf{r})$ her. Hinweis: $n_{\pm}(\mathbf{r})$ soll durch eine 'barametrische Höhenformel' mit entsprechenden Boltzmannfaktoren gegeben sein, und $n_{\pm}(\mathbf{r}) = n_0$ bei Potential Null.

b) Linearisieren Sie die Poisson-Boltzmann-Gleichung in $\Phi(\mathbf{r})$ und lösen Sie die Gleichung für den Halbraum z > 0, wenn sich bei z = 0 eine mit einer Flächenladungsdichte $\sigma < 0$ geladene Wand befindet. Für das elektrische Feld soll E(z < 0) = 0 und $E(z = \infty) = 0$ gelten, weiterhin für das Potential $\Phi(z = \infty) = 0$. Zeigen Sie, dass das Potential der Wand exponentiell abgeschirmt wird, und berechnen Sie die entsprechende Abschirmlänge.

4.2 Maxwellgleichungen in Materie

Wie in der Elektrostatik beschreiben wir zunächst die magnetostatischen Eigenschaften eines Körpers in einfachster Näherung durch mikroskopische magnetische Dipolmomente $\mathbf{m}(\mathbf{R})$. Es ist sinnvoll, mit der Magnetostatik die Formeln zur Elektrostatik noch einmal parallel mit anzugeben. Wir beginnen also mit

$$\rho_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}) = -\operatorname{div}_{\mathbf{r}} \left[\mathbf{p}(\mathbf{R}) \delta^{3}(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \right] \quad (4.65)$$

$$\mathbf{j}_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot}_{\mathbf{r}} \left[\mathbf{m}(\mathbf{R}) \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \right], \quad (4.66)$$

wobei beide Formeln aus unserem Theorem Gl. (2.57) folgen, das andere Vorzeichen für $\mathbf{j}_{\mathbf{R}}(\mathbf{r})$ insbesondere wegen

$$\mathbf{j}_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}) = -\mathbf{m} \times \nabla \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{R}) = \operatorname{rot}_{\mathbf{r}} \left[\mathbf{m}(\mathbf{R}) \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \right].$$
(4.67)

In beiden Fällen wird jetzt über ein Volumene
lement Vdes KörpersKgemittelt, in dem sich viele mikroskopische Dipol
momente befinden sollen 1

$$\bar{\rho}_V(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{V} \int_V d^3 \mathbf{R} \rho_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}) = -\text{div}_{\mathbf{r}} \mathbf{P}_V(\mathbf{r})$$
(4.68)

$$\mathbf{P}_{V}(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \int_{V} d^{3} \mathbf{R} \mathbf{p}(\mathbf{R}) \delta^{3}(\mathbf{r} - \mathbf{R}), \quad \text{Polarisation}$$
(4.69)

$$\bar{\mathbf{j}}_V(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{V} \int_V d^3 \mathbf{R} \mathbf{j}_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot}_{\mathbf{r}} \mathbf{M}_V(\mathbf{r})$$
 (4.70)

$$\mathbf{M}_{V}(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \int_{V} d^{3}\mathbf{Rm}(\mathbf{R})\delta^{3}(\mathbf{r} - \mathbf{R}), \quad \text{Magnetisierung} .$$
(4.71)

¹ Diese Mittelung ist hier eigentliche eine Farce: da wir sowieso bereits mit mikroskopischen Dipolen arbeiten, gibt es keine mikroskopische Längenskala mehr, die ein Mittelungsvolumen festlegen könnte. Das ändert sich, wenn man tatsächlich z.B. Dipole endlicher Ausdehnung und mit einem endlichen mittleren Abstand betrachtet.

Die gemittelten Felder sollen wieder den entsprechenden statischen Maxwellgleichungen genügen;

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho_f + \bar{\rho}_V}{\varepsilon_0} \rightsquigarrow \operatorname{div}(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_V) = \rho_f \tag{4.72}$$

 $\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0(\bar{\mathbf{j}}_V + \mathbf{j}_f) \rightsquigarrow \operatorname{rot}(\mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}_V) = \mathbf{j}_f$ (4.73)

mit den freien Ladungsdichten ρ_f und Stromdichten \mathbf{j}_f , die nicht unmittelbar in den Mittelungsprozess zur Polarisation bzw. Magnetisierung eingehen. Entsprechend definiert man nun die abgeleiteten Felder **D** und **H**;

$$\mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_V, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_f \quad (4.74)$$
$$\mathbf{H} \equiv \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}_V, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_f. \quad (4.75)$$

Man beachte, dass die Definitionen wegen des Minuszeichens $-\mathbf{M}_V$ nicht ganz symmetrisch sind. Wir beachten, dass wir jetzt mit makroskopischen Gleichungen arbeiten, deren Grössen prinzipiell noch von dem Mittelungsprozess abhängig sind.

Entsprechend gibt es jetzt Koeffizienten in linearen Medien für die Proportionalität zwischen den Feldern;

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi), \quad \text{Dielektrizitätskonstante } \varepsilon, \text{ elektr. Suszeptibilität } \chi \quad (4.76)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu, \quad \mu = \mu_0 (1 + \kappa), \quad \text{Permeabilität } \mu, \text{ magn. Suszeptibilität } \kappa . \quad (4.77)$$

Die Maxwellgleichungen für Elektrodynamik in Materie haben wir damit jetzt vorliegen, bis auf den Verschiebungsstrom, der wieder für das Erfülltsein der Kontinuitätsgleichung eingeführt werden muss;

$$div \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho_f(\mathbf{r}, t), \quad div \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$$
(4.78)
$$rot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad rot \mathbf{H} = \mathbf{j}_f(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t).$$
(4.79)

In linearen Medien besteht wieder eine Proportionalität zwischen den Feldern \mathbf{D} und \mathbf{E} , die jetzt wie in unserer Diskussion der linearen Antwort in allgemeinster Form als

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \int d^{3}\mathbf{r}' \varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t') \mathbf{E}(\mathbf{r}',t')$$
(4.80)

angesetzt wird. Im Allgemeinen ist $\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')$ also eine Matrix, die von zwei Orts und zwei Zeitvariablen abhängt. Spezialfälle:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \int d^{3}\mathbf{r}' \varepsilon(\mathbf{r}-\mathbf{r}';t-t') \mathbf{E}(\mathbf{r}',t')$$
(4.81)

$$\stackrel{\sim}{\to} \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{q},\omega) = \tilde{\varepsilon}(\mathbf{q},\omega)\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{q},\omega), \quad \text{raum-zeitlich translations invariant.}$$
(4.82)

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \int_{-\infty} dt' \varepsilon(t-t') \mathbf{E}(\mathbf{r},t')$$
(4.83)

$$\rightarrow \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r},\omega) = \tilde{\varepsilon}(\omega)\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega), \quad \varepsilon \propto \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \text{ räumlich lokal.}$$
(4.84)

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \int d^3 \mathbf{r}' \varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}',t)$$
(4.85)

$$\rightsquigarrow \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{q}, t) = \tilde{\varepsilon}(\mathbf{q})\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{q}, t), \quad \varepsilon \propto \delta(t - t') \text{ zeitlich lokal.}$$
(4.86)
(4.87)

Entsprechend kann man jetzt eine Proportionalität zwischen B und H ansetzen,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \int d^{3}\mathbf{r}' \mu(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t') \mathbf{H}(\mathbf{r}',t'), \qquad (4.88)$$

in der jetzt allerdings die Rollen zwischen 'externem' und 'gesamtem' Feld im Vergleich zu Gl. (4.80) vertauscht sind.

4.3 Dispersion

4.3.1 Ebene Wellen

Wir lösen jetzt die Maxwellgleichungen

div
$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = 0$$
, div $\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0$, rot $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$, rot $\mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$
(4.89)

für ein homogenes Medium ohne freie Ladungen ($\rho_f = 0$, $\mathbf{j}_f = 0$). Wie bei der Herleitung der Helmholtzgleichungen Gl. (3.204) arbeiten wir mit den partiell Fouriertransformierten Felder

$$\mathbf{X}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{r},\omega), \qquad (4.90)$$

wobei \mathbf{X} jeweils für eines der Felder steht. Für die rot-Gleichungen führt das auf

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega) - i\omega\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},\omega) = 0, \quad \nabla \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r},\omega) + i\omega\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r},\omega) = 0, \tag{4.91}$$

was sich jetzt für *räumlich lokale* dielektrische Funktionen und Permeabilitäten sofort vereinfachen lässt: Man hat in diesem Fall nämlich den linearen Zusammenhang für die partiell Fourier-transformierten Felder

$$\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r},\omega) = \tilde{\varepsilon}(\omega)\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega), \quad \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},\omega) = \tilde{\mu}(\omega)\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r},\omega), \tag{4.92}$$

was durch Einsetzen auf

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega) - i\omega \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},\omega) = 0, \quad \nabla \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},\omega) + i\tilde{\mu}(\omega)\tilde{\varepsilon}(\omega)\omega\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega) = 0$$
(4.93)

führt. Wegen rot rot = grad div - Δ liefert das analog zu Gl. (3.204)

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{v_{\omega}^2}\right)\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega) = 0, \quad \left(\Delta + \frac{\omega^2}{v_{\omega}^2}\right)\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},\omega) = 0 \tag{4.94}$$

$$v_{\omega}^2 \equiv \frac{1}{\tilde{\mu}(\omega)\tilde{\varepsilon}(\omega)} \tag{4.95}$$

Für Vakuum erhalten wir wegen

$$\tilde{\mu}(\omega) = \mu_0, \quad \tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_0, \quad \text{Vakuum}$$

$$(4.96)$$

wegen $c^2 \mu_0 \varepsilon_0 = 1$ wieder die Lichtgeschwindigkeit $v_\omega = c$ als Ausbreitungsgeschwindigkeit. Ebene Wellen lösen Gl. (4.94)

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega') = \mathbf{E}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}2\pi\delta(\omega-\omega') \rightsquigarrow \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}-i\omega t}$$
(4.97)

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},\omega') = \mathbf{B}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}2\pi\delta(\omega-\omega') \rightsquigarrow \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}-i\omega t}, \qquad (4.98)$$

falls

$$\mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2 n^2(\omega)}{c^2}$$
, Dispersions-Beziehung (4.99)

$$n^2(\omega) = \frac{\tilde{\mu}(\omega)\tilde{\varepsilon}(\omega)}{\mu_0\varepsilon_0}, \quad \text{Brechungsindex } n(\omega).$$
 (4.100)

Durch die Dispersions-Beziehung wird der Betrag des **k**-Vektors bei vorgegebener Kreisfrequenz ω festgelegt. Beim Übergang zwischen zwei Medien mit unterschiedlichem Brechungsindex kann dann eine Lösung der Maxwellgleichung für ebene Wellen zu fester Kreisfrequenz ω durch Anpassen der entsprechenden **k**-Vektoren in den zwei Medien gefunden werden. Das führt auf das bekannte *Brechungsgesetz von Snellius*, das in einer ÜBUNGSAUFGABE behandelt wird.

Zweckmässiger ist manchmal die umgekehrte Angabe von $\omega(\mathbf{k})$ (Dispersionsrelation) als Funktion des Wellenvektors.

Die ebenen Wellen sind transversal, was aus den Divergenzgleichungen $\operatorname{div}(E) = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ sofort folgt, i.e.

$$\mathbf{k}\mathbf{E}(\mathbf{k}) = 0, \quad \mathbf{k}\mathbf{B}(\mathbf{k}) = 0. \tag{4.101}$$

Weiterhin folgt aus der ersten rot-Gleichung (Induktionsgesetz)

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega) - i\omega \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},\omega) = 0 \rightsquigarrow i\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}) - i\omega \mathbf{B}(\mathbf{k}) = 0 \quad (4.102)$$

$$\rightsquigarrow \mathbf{B}(\mathbf{k}) = \sqrt{\tilde{\mu}(\omega)\tilde{\varepsilon}(\omega)}\frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}), \qquad (4.103)$$

d.h. elektrisches und magnetisches Feld stehen wieder senkrecht aufeinander.

4.3.2 Lorentz-Modell für $\varepsilon(\omega)$

(JACKSON) Wir erstellen ein einfaches mikroskopischen Modell für ein Dipolmoment **p**: Eine Ladung -e < 0 führt gedämpfte harmonische Schwingungen um eine Ruhelage **R** mit Kreisfrequenz ω_0 und Dämpfungskonstante $\gamma > 0$ unter dem Einfluss der Kraft $-e\mathbf{E}$ aus. Die Bewegungsgleichung für Auslenkungen $\mathbf{x}(t)$ aus der Ruhelage lautet

$$\ddot{\mathbf{x}} + \gamma \dot{\mathbf{x}} + \omega_0^2 \mathbf{x} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}(t) \tag{4.104}$$

wobei ein räumlich homogenes aber zeitlich veränderliches elektrisches Feld $\mathbf{E}(t)$ angenommen wird. Daraus ergibt sich ein Dipolmoment $\mathbf{p}(t) = -e\mathbf{x}(t)$. Im Frequenzraum erhält man also den linearen Zusammenhang

$$\tilde{\mathbf{p}}(\omega) = \frac{e^2}{m} \frac{\tilde{\mathbf{E}}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}.$$
(4.105)

Hat man j = 1, ..., K Sorten von Ladungen e_j mit Massen m_j , Dämpfungskonstanten $\gamma_j > 0$, Frequenzen ω_j und Dichten n_j , so erhält man mit diesem Modell eine Polarisation (Dipolmoment pro Volumen)

$$\tilde{\mathbf{P}}(\omega) = \sum_{j=1}^{K} \frac{n_j e_j^2}{m_j} \frac{\tilde{\mathbf{E}}(\omega)}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j}$$
(4.106)

und dementsprechend eine dielektrische Verschiebung

$$\tilde{\mathbf{D}}(\omega) = \varepsilon_0 \tilde{\mathbf{E}}(\omega) + \tilde{\mathbf{P}}(\omega) = \tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\omega)$$
(4.107)

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 + \sum_{j=1}^K \frac{n_j e_j^2}{\varepsilon_0 m_j} \frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j} \right).$$
(4.108)

Die dielektrische Funktion $\tilde{\varepsilon}(\omega)$ hat für das Lorentz-Modell einige wichtige eigenschaften, die auch ganz allgemein gelten:

- $\tilde{\varepsilon}(\omega)$ ist komplexwertig, Real- und Imaginärteil von $\tilde{\varepsilon}(\omega)$ hängen über Hilbert-Integraltransformationen (*Kramers-Kronig-Relationen*) miteinander zusammen (z.B. FLIESSBACH).
- Die Pole von $\tilde{\varepsilon}(\omega)$ liegen in der unteren komplexen ω -Ebene.
- Es gilt

$$\Re \tilde{\varepsilon}(\omega) = \Re \tilde{\varepsilon}(-\omega), \quad \Im \tilde{\varepsilon}(\omega) = -\Im \tilde{\varepsilon}(-\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$
(4.109)

4.3.3 Komplexer Brechungsindex

Was sind die Konsequenzen einer komplexwertigen dielektrischen Funktion $\tilde{\varepsilon}(\omega)$? Wir betrachten die Ausbreitung von Wellen in einem homogenen Medium mit komplexwertigem Brechungsindex Gl. (4.99)

$$n^{2}(\omega) = \frac{\tilde{\mu}(\omega)\tilde{\varepsilon}(\omega)}{\mu_{0}\varepsilon_{0}}$$
(4.110)

Wegen $\mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2 n^2(\omega)}{c^2}$ ist also auch der Wellenvektor \mathbf{k} im Allgemeinen komplex (LANDAU VIII),

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}'', \quad \mathbf{k}^2 = \mathbf{k}'^2 - \mathbf{k}''^2 + 2i\mathbf{k}'\mathbf{k}'',$$
 (4.111)

und die 'ebene Welle'

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}}e^{-\mathbf{k}''\mathbf{r}} \tag{4.112}$$

ist nur formal 'eben', da die Flächen gleicher Phase durch $\mathbf{k'r} = \text{const}$ definiert werden, die Flächen gleicher Amplitude allerdings durch $\mathbf{k''r} = \text{const}$. Wenn $\mathbf{k'}$ und $\mathbf{k''}$ in verschiedene Richtungen weisen, spricht man deshalb von *inhomogenen ebenen Wellen*.

Falls \mathbf{k}' und \mathbf{k}'' parallel sind, schreiben wir mit dem Einheitsvektor l

$$\mathbf{k} = k\mathbf{l}, \quad k = (n(\omega) + i\kappa(\omega))\frac{\omega}{c}$$
(4.113)

mit dem reellen Brechungsindex $n(\omega)$ und dem Absorptionskoeffizienten $\kappa(\omega)$. Dann ist die Ortsabhängigkeit von der Form

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = e^{i\frac{n\omega}{c}\mathbf{l}\mathbf{r}}e^{-\kappa(\omega)\frac{\omega}{c}\mathbf{l}\mathbf{r}}.$$
(4.114)

Es ist klar, dass diese Form nur in einem Teilgebiet des \mathbb{R}^3 gültig sein kann, da sonst der Exponentialfaktor $e^{-\kappa(\omega)\frac{\omega}{c}\mathbf{lr}}$ divergieren würde. Typische Probleme, die mit diesem Ansatz für ebene Wellen behandelt werden, sind die Brechung, Transmission und Reflektion von Licht beim Übergang von einem Medium in ein anderes. Die Stetigkeits- bzw. Sprungbedingungen für die Felder legen dann die Form der **k**-Vektoren fest. Die dabei auftretenden Effekte sind vielfältig und komplex, vgl. z.B. LANDAU VIII.

4.3.4 Frequenzabhängige Leitfähigkeit, Metalle

(JACKSON) Falls frei bewegliche Ladungen im Medium vorhanden sind, hat man

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r},\omega) = \tilde{\mathbf{j}}_f(\mathbf{r},\omega) - i\omega\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r},\omega).$$
(4.115)

Wir nehmen an, dass die freie Stromdichte $\tilde{\mathbf{j}}_f(\mathbf{r}, \omega)$ proportional zum elektrischen Feld ist (*Ohmsches Gesetz*),

$$\mathbf{\tilde{j}}_{f}(\mathbf{r},\omega) = \sigma(\omega)\mathbf{\tilde{E}}(\mathbf{r},\omega), \quad \text{Leitfähigkeit } \sigma(\omega).$$
 (4.116)

Dann hat man

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},\omega) = \tilde{\mu}(\omega) \left[\sigma(\omega) - i\tilde{\varepsilon}(\omega)\omega\right] \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega)$$
(4.117)

$$= -i\tilde{\mu}(\omega)\tilde{\varepsilon}_{\text{tot}}(\omega)\omega\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)$$
(4.118)

mit der gesamten dielektrischen Funktion

$$\tilde{\varepsilon}_{tot}(\omega) \equiv \tilde{\varepsilon}(\omega) + i \frac{\sigma(\omega)}{\omega}.$$
 (4.119)

Damit diese im Rahmen des Lorentz-Modells wieder von der Form Gl. (4.107) ist, schreiben wir

$$\tilde{\varepsilon}_{\text{tot}}(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 + \sum_{j=1}^K \frac{n_j e_j^2}{\varepsilon_0 m_j} \frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j} \right) + \varepsilon_0 \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_f^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}$$
(4.120)

und identifizieren

$$\frac{ne^2}{m}\frac{1}{\omega_f^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} = i\frac{\sigma(\omega)}{\omega} \rightsquigarrow \omega_f = 0, \quad \sigma(\omega) = -i\omega\frac{ne^2}{m}\frac{1}{-\omega^2 - i\omega\gamma}, \quad (4.121)$$

also einem expliziten Ausdruck für die frequenzabhängige Leitfähigkeit der Form

$$\sigma(\omega) = \frac{ne^2}{m} \frac{\tau}{1 - i\omega\tau}, \tau \equiv \gamma^{-1}, \quad \text{Drude-Modell.}$$
(4.122)

Formal erhält man also einen Ausdruck für die *Leitfähigkeit* des Mediums im Rahmen des Lorentz-Modells für die *dielektrische Funktion* des Mediums, indem man für die freien Ladungsträger mit Dichte n, Masse m und Ladung e eine verschwindende Oszillatorfrequenz $\omega_f = 0$ ansetzt. Die im Lorentz-Modells auftretende Dämpfungskonstante γ^{-1} wird dabei als eine Streurate für die freien Ladungsträger interpretiert. Interessant ist hierbei, dass ein voll mikroskopisches Modell für die Ohmsche Leitfähigkeit $\sigma(\omega)$ eines Materials im Rahmen gewisser Näherungen auf dasselbe Ergebnis führt, freilich mit einem expliziten Ausdruck für τ (z.B. durch Elektron-Phonon-Wechselwirkung verursachte Streuung).

Wenn das Medium nur freie Ladungen enthält und keine Polarisation auftritt, hat man $\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_0$ und somit

$$\tilde{\varepsilon}_{tot}(\omega) = \varepsilon_0 + i \frac{\sigma(\omega)}{\omega}.$$
 (4.123)

Ein solches System wird häufig als *Metall* bezeichnet, es entspricht den Leitern, die wir in der Elektrostatik abstrakt eingeführt haben. Für Frequenzen mit $\omega \tau \gg 1$ gilt insbesondere

$$\frac{\tilde{\varepsilon}_{\text{tot}}(\omega)}{\varepsilon_0} \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega \tau \gg 1, \quad \omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}, \quad \text{Plasmafrequenz } \omega_p. \tag{4.124}$$

Für Frequenzen $\omega < \omega_p$ wird $\tilde{\varepsilon}_{tot}$ negativ und der Brechungsindex rein imaginär: Strahlung mit solchen Frequenzen kann im Metall nicht propagieren, das Metall ist für solche Frequenzen undurchsichtig. Oberhalb der Plasmafrequenz ($\omega > \omega_p$) hingegen wird $\tilde{\varepsilon}_{tot}$ positiv und der Brechungsindex rein reell - das Metall ist dann durchsichtig. Wir stellen uns das Metall als freie Elektronen mit einem festen positiven Hintergrund (Ionengitter) vor. Die Gesamtladung des Metalls ist Null, die Gesamtladungs*dichte* $\rho(\mathbf{r}, t)$ kann aber für Frequenzen oberhalb der Plasmafrequenz oszillieren, was einer kollektiven Schwingung aller Elektronen entspricht (z.B. SKRIPT FESTKÖRPERTHEORIE; ASHCROFT/MERMIN).

AUFGABE: Betrachte ein Medium mit nur freien Ladungen, in dem ein Ohmsches Gesetz

$$\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{q},\omega) = \sigma(\mathbf{q},\omega)\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{q},\omega), \text{ skalare Leitfähigkeit } \sigma(\mathbf{q},\omega)$$
 (4.125)

gelten soll.

1. Begründe die Form Gl. (4.125) aus dem allgemeinsten linearen Zusammenhang zwischen elektrischem Feld und Stromdichte im raum-zeitlich translationsinvarianten und isotropen Fall.

2. Ausgehend von der longitudinalen dielektrische Funktion $\varepsilon_l(\mathbf{q}, \omega)$, Gl. (4.41), soll der Zusammenhang

$$\varepsilon_l(\mathbf{q},\omega) = 1 + i \frac{\sigma(\mathbf{q},\omega)}{\varepsilon_0 \omega}$$
(4.126)

hergeleitet werden (beachte, dass die dielektrische Funktion hier dimensionslos definiert ist und deshalb im Vergleich zu Gl. (4.119) der Faktor ε_0 im Nenner auftritt). Benutze für die Herleitung den Zusammenhang zwischen externem elektrischen Potential V_{ext} und vollem elektrischen Potential V, sowie die Kontinuitätsgleichung.

4.3.5 Poyntingscher Satz in Materie

Der Poyntingscher Satz in Medien wird jetzt ganz analog zum Vakuumfall hergeleitet. Die Änderung der kinetischen Energie ist

$$P(t) \equiv \frac{d}{dt} W_{\rm kin} = \int d^3 \mathbf{r} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}(t)), \qquad (4.127)$$

man geht aus von

$$\mathbf{j} = \mathrm{rot}\mathbf{H} - \dot{\mathbf{D}} \rightsquigarrow \mathbf{j}\mathbf{E} = \mathbf{E}\mathrm{rot}\mathbf{H} - \mathbf{E}\dot{\mathbf{D}}$$
 (4.128)

und benutzt

$$\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\operatorname{div} \mathbf{E} \times \mathbf{H} + \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E}$$
(4.129)

$$\rightarrow \mathbf{jE} = -\mathrm{div}\mathbf{E} \times \mathbf{H} - \mathbf{E}\mathbf{D} - \mathbf{H}\mathbf{B}.$$
 (4.130)

Der Ausdruck $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ beschreibt hierbei eine Energiestromdichte,

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$
, Energiestromdichte (Poynting-Vektor). (4.131)

4.3.6 Wellenimpedanz

Wir betrachten ebene elektromagnetische Wellen in Materie,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}-i\omega t}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}-i\omega t}.$$
(4.132)

Die Amplitude des **B**-Feldes ist nach Gl. (4.102)

$$\mathbf{B}(\mathbf{k}) = \sqrt{\tilde{\mu}(\omega)\tilde{\varepsilon}(\omega)}\frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}).$$
(4.133)

Da der Poyntingvektor durch das **H**-Feld gegeben ist, ist es häufiger zweckmässiger, mit $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\tilde{\mu}(\omega)$ zu rechnen;

$$\mathbf{H}(\mathbf{k}) = \frac{1}{Z(\omega)} \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}), \quad Z(\omega) \equiv \sqrt{\frac{\tilde{\mu}(\omega)}{\tilde{\varepsilon}(\omega)}}, \quad \text{Impedanz } Z(\omega).$$
(4.134)

Die Impedanz $Z(\omega)$ hat die physikalische Dimension eines elektrischen Widerstandes, d.h. Ohm, und wird für elektromagnetische Wellen als Wellenwiderstand bezeichnet. Es gilt folgender

Satz 11. Eine ebene elektromagnetische Welle propagiert reflektionsfrei senkrecht zwischen zwei homogenen Medien mit gleicher Impedanz.

Für Vakuum hat der Wellenwiderstand den Wert

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376.7\Omega$$
, Vakuum-Wellenwiderstand. (4.135)

AUFGABE: Betrachten Sie die Propagation einer ebenen elektromagnetische Welle in z-Richtung, wobei die Ebene z = 0 die Grenze zwischen zwei Medien 1 und 2 mit dielektrischer Funktion und Permeabilität $\tilde{\varepsilon}_{1,2}$, $\tilde{\mu}_{1,2}(\omega)$ bezeichnet.

a) Leiten Sie die Stetigkeitsbedingungen für das E- und das H-Feld her.

b) Beweisen Sie das obige Theorem.

ZUSATZAUFGABE: Informieren Sie sich über den Begriff 'Wellenwiderstand' im Allgemeinen, insbesondere auch für andere Wellentypen.

4.4 Ausblick: Neuere Entwicklungen

Die Elektrodynamik der Materialien ist ein sehr lebendiges Gebiet, auf dem aktuell geforscht wird. Zwei neuere Entwicklungen seien hier kurz erwähnt. Ausführlichere Information sind z.B. in dem Review Artikel '*Periodic nanostructures for photonics*' von K. Busch, G. von Freymann, S. Linden, S.F. Mingaleev, L. Tkeshelashvili, und M. Wegener, Physics Reports 444 (2007) 101 – 202 enthalten.

4.4.1 Photonische Kristalle

Hier handelt es sich um künstliche Strukturen, in denen eine räumlich periodische Dielektrizitätskonstante $\varepsilon(\mathbf{r})$ erzeugt wird. Ähnlich wie in der Festkörperphysik kann hierduch eine *Bandstruktur*, d.h. eine Dispersionsrelation $\omega(\mathbf{k})$ entstehen, die für bestimmte Frequenzen Bandlücken aufweist, d.h. für bestimmte Frequenzen existiert kein **k**-Vektor, zu dem elektromagnetische Wellen durch die Struktur propagieren könnten.

4.4.2 Metamaterialien, negativer Brechungsindex

In anderen Materialsystemen ('Metamaterialien') wird versucht, $\tilde{\varepsilon}$ und $\tilde{\mu}$ beliebig 'einzustellen', also z.B.auch hin zu negativen Werten. Bei $\tilde{\varepsilon}$ hatten wir solch eine Möglichkeit bereits für Frequenzen unterhalb der Plasmafrequenz kennen gelernt.

Wir betrachten eine ebene elektromagnetische Welle, die von einem Medium 1 in ein Medium 2 (Halbräume z < 0, z > 0, keine freien Oberflächenladungen) propagiert, mit

$$\tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_0, \quad \tilde{\mu}_1 = \mu_0; \quad \tilde{\varepsilon}_2 = -\varepsilon_0, \quad \tilde{\mu}_2 = -\mu_0.$$
 (4.136)

Das **E**-Feld liege in der Einfallsebene ('p-Polarisation'). Es folgt aus den Stetigkeitsbedingungen bei z = 0

$$\mathbf{E}_t^1 = \mathbf{E}_t^2, \quad \mathbf{D}_n^1 = \mathbf{D}_n^2 \rightsquigarrow \mathbf{E}_n^1 = -\mathbf{E}_n^2$$
(4.137)

$$\mathbf{H}_t^1 = \mathbf{H}_t^2 \rightsquigarrow \mathbf{B}_t^1 = -\mathbf{B}_t^2. \tag{4.138}$$

(SKIZZE). Die Poyntingvektoren $\mathbf{S}^1 = \mathbf{E}^1 \times \mathbf{H}^1$ und $\mathbf{S}^2 = \mathbf{E}^2 \times \mathbf{H}^2$ sind also betragsmässig gleich, es wird also nichts reflektiert! Der 'Lichtstrahl' wird allerdings im Medium 2 'umgeklappt' und geht nicht geradlinig durch (SKIZZE). Der Brechungswinkel (bezüglich des Normalenvektors zur Trennfläche z = 0) ist gerade das *negative* des Einfallswinkels (SKIZZE), deshalb ist der Brechungsindex dieses Systems

$$n = -1 \tag{4.139}$$

und nicht n = 1. Hier sehen wir einen Fall, wo die Zweideutigkeit der Wurzel bei der Auflösung n^2 in der Dispersions-Beziehung Gl. (4.99) zu einem negativen Vorzeichen führt. Eine Anwendung hiervon ist die *'perfekte Linse'*: eine Platte der Dicke d mit $\tilde{\varepsilon} = -\varepsilon_0$, $\tilde{\mu} = -\mu_0$. Sie bildet ein Objekt (allerdings nur für Objekt-Abstand a < d) im Verhältnis 1 : 1 ideal ab.

5. STROMKREISE

5.1 Stationäre Stromkreise

Hier sind alle Felder, Ladungsdichten und Stromdichten zeitunabhängig. Insbesondere folgt aus der Kontinuitätsgleichung div $\mathbf{j} = 0$ (wie in der Magnetostatik). Angewendet auf ein Leitersystem mit Strömen folgt daraus

$$\int \mathbf{j} d^2 \mathbf{r} = \sum_n I_n = 0, \quad 1. \text{ Kirchhoffsche Regel}, \tag{5.1}$$

wobei die Ströme I_n hier in einen Verzweigungspunkt hin
ein- bzw. hinausfliessen (SKIZ-ZE).

Wir betrachten jetzt einen tatsächlichen Strom'kreis' C ('Stromröhre') zunächst ohne Verzweigungen. Zunächst ist der Strom I durch jede Querschnittsfläche der Stromröhre konstant (vgl. das Kapitel 'stationäre Ströme' in der Magnetostatik). Weiterhin gilt im stationären Fall rot $\mathbf{E} = 0$. Wir betrachten nun das Kurvenintegral $\int_C \mathbf{E} d\mathbf{r}$ über den gesamten Stromkreis. Jetzt gibt es zwei Fälle:

a) Die Kurve C liegt in einem einfach zusammenhängenden Gebiet, windet sich also z.B. nicht in einer Ebene um ein 'Loch' bzw. im Raum um einen Zylinder (das ist der Fall b unten). Dann ist das Kurvenintegral $\int_C \mathbf{E} d\mathbf{r} = \int d^2 \mathbf{r} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ nach dem Satz von Stokes. Jetzt betrachten wir den Zusammenhang zwischen Stromdichte und elektrischem Feld. Ein Zusammenhang $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ wie beim Ohmschen Gesetz kann dann nicht *überall* im gesamten Stromkreis gelten: es muss Stellen geben, an denen \mathbf{E} und \mathbf{j} entgegengesetzt gerichtet sind (SKIZZE), damit $\int_C \mathbf{E} d\mathbf{r} = 0$ erfüllt ist. Diese Stellen sind die 'Batterie(n)', die vorhandensein müssen, um den Stromkreis antreiben.

b) Die Kurve C liegt in einem Gebiet mit 'Loch'. Der einfachste Fall ist ein Stromkreis, der ringförmig um eine unendlich lange Zylinderspule liegt. In der Spule werde ein Strom konstant mit der Zeit t hochgefahren: das erzeugt innerhalb (nicht ausserhalb) der Spule ein Magnetfeld $\mathbf{B}(t) = \alpha t$ mit einer Konstanten α , also $\dot{\mathbf{B}}(t) = \alpha$, so dass wegen des Induktionsgesetzes rot $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}(t) = -\alpha$ gilt. Dann gilt für das Kurvenintegral entlang des Stromkreises

$$\int_C \mathbf{E} d\mathbf{r} = \int d^2 \mathbf{r} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{const} \neq 0.$$
(5.2)

Entlang des Ringes wird ein elektrisches Feld induziert, die ganze Situation entspricht einem speziellen 'Transformator' mit nur einer Sekundärwicklung C (REBHAN) und einem

'pathologischem 'Wechselstrom

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{I_0}{\omega} \sin \omega t \tag{5.3}$$

in der Primärwindungen (unendlich lange Spule). Für eine symmetrische Geometrie ist das Feld \mathbf{E} entlang des Ringes konstant und hat überall den gleichen Wert. Falls dann das Ohmsche Gesetz gilt, erhält man somit eine konstante Stromdichte \mathbf{j} entlang des Leiters C, ohne dass dieser irgendwo eine Batterie enthielte. Im Fall b) spielt also die Topologie des Systems eine Rolle - das ist in gewisser Weise analog zum in der QUAN-TENMECHANIK (SKRIPT) diskutieren Aharonov-Bohm-Effekt.

5.1.1 'Batterien'

Der oben diskutierte Fall a) ist für Anwendungen mit Gleichstrom wohl meist wichtiger. Im Batterieteil ist das elektrische Feld entgegengesetzt zum Feld im Rest des Kreises C.

5.1.1.1 Galvanisches Element

Der einfachste Fall sind zwei Zellen mit Lösungen eines Metallsalzes mit unterschiedlichen Konzentrationen n_- und $n_+ > n_-$, jeweils in Kontakt mit Elektroden aus dem entsprechenden Metall (z.B.Kupferelektroden in Kupfersulfatlösungen, Konzentrationszelle). Beide Zellen sind so miteinander verbunden, dass z.B. nur die negativen Sulfat-Ionen zwischen ihnen diffundieren können. Beim 'Kurzschliessen' der Batterie z.B. über einen Widerstand strebt das System ins thermodynamische Gleichgewicht, d.h. einem globalen Konzentrationsausgleich entgegen. Auf der n_- -Seite werden hierzu Kupferionen in die Lösung abgeschieden ($Cu \rightarrow Cu^{++} + 2e^-$, Oxidation) und somit Elektronen freigesetzt (Minuspol), auf der n_+ -Seite lagern sich umgekehrt Kupferionen als Kupfer an der Elektrode ab ($Cu^{++} + 2e^- \rightarrow Cu$, Reduktion, Pluspol). In der Batterie wandern, z.B. über eine osmotische Brücke, die negativen Sulfat-Ionen vom Pluspol zum Minuspol, also entlang des Konzentrationsgefälles, aber entgegen dem elektrischen Feld. Dadurch setzt sich der negative Strom der Elektronen im äusseren Stromkreis innerhalb der Batterie fort, und zwar getragen durch die negativen Sulfat-Ionen, so wie es nach div $\mathbf{j} = 0$ sein muss.

Falls an das Element kein äusserer Verbraucher angeschlossen ist, wirkt das innere elektrische Feld gerade dem Konzentrationsgefälle entgegen, so dass im Gleichgewicht zwischen den Zellen kein Strom fliesst. Falls ein äusserer Verbraucher angeschlossen ist, sieht man auch, dass ein stationärer Zustand strenggenommen gar nicht existieren kann, da sich die Batterie ja entlädt und alles dem thermodynamischen Gleichgewicht zustrebt: Das Aufrechterhalten eines stationären Stromkreises erfordert eine unendlich grosse Batterie, d.h. hier kommt es auf die Reihenfolge der Limites 'Batterievolumen gegen Unendlich' (zuerst) und 'Zeit gegen unendlich' (danach) an.

5.2 Wechselstromkreise

(REBHAN) Wir betrachten einen geschlossenen Stromkreis aus einer rotierenden Generatorschleife (G) und einem 'Verbraucher' (V). Das Induktionsgesetz besagt dann

$$\oint \mathbf{E}d\mathbf{r} = -\dot{\Phi},\tag{5.4}$$

wobei Φ der gesamte magnetische Fluss durch den Stromkreis ist. Wir zerlegen nach Anteilen G und V,

$$\dot{\Phi}_V + \int_V \mathbf{E} d\mathbf{r} = -\left(\dot{\Phi}_G + \int_G \mathbf{E} d\mathbf{r}\right) \equiv U_e(t), \tag{5.5}$$

wobei $U_e(t)$ als *elektromotorische Spannung* bezeichnet wird. Wir setzen weiterhin voraus, dass $U_e(t)$ eine vorgegebene Funktion ist, z.B. $U_e(t) = U_0 \sin \omega t$. Das funktioniert i.A. nur, wenn die Rückwirkung des Verbrauchers auf G vernachlässigt werden darf, bzw. wenn mittels eines Regelmechanismus z.B. die Drehgeschwindigkeit der Generatorschleife dem Verbraucher angepasst wird.

5.2.1 Induktivitäten, Kapazitäten und ohmsche Widerstände

Der Anteil Φ_V in Gl. (5.5) kann durch eine effektive Induktivität des Stromkreises ausgedrückt werden, die man in einem *Ersatzschaltbild* als Spule darstellt. Von der unendlich langen Spule (Länge l, N Windungen, Windungsdichte n = N/l, Fläche A) wissen wir aus Gl. (3.151)

$$B = \mu_0 n I, \quad L = \mu_0 n^2 l A \rightsquigarrow \Phi_V = N B A, \tag{5.6}$$

also

$$\Phi_V(t) = LI(t). \tag{5.7}$$

Dieser Zusammenhang wird jetzt auf allgemeinere Stromkreise verallgemeinert, indem L > 0 entsprechend als Parameter gewählt wird.

Der Anteil $\int_{V} \mathbf{E}(t) d\mathbf{r}$ in Gl. (5.5) kann jetzt weiterhin als Summe eines ohmschen und eines kapazitiven Anteils dargestellt werden,

$$\int_{V} \mathbf{E}(t) d\mathbf{r} = RI(t) + \frac{1}{C}Q(t), \qquad (5.8)$$

wobei Q(t) die Ladung auf einer Platte eines idealisierten Plattenkondensators der Kapazität C > 0 ist, die wieder als Parameter aufgefasst wird. Weiterhin ist der Parameter R > 0 der ohmsche Widerstand des Stromkreises. Insgesamt folgt zusammen mit Gl. (5.5) und Differentiation nach der Zeit

$$L\ddot{I}(t) + R\dot{I}(t) + \frac{1}{C}I(t) = \dot{U}_e(t), \quad \text{Stromkreis-Gleichung},$$
(5.9)

in der wie oben erwähnt L, R und C reelle positive Parameter sind, die an die tatsächliche Situation angepasst werden müssen.

Es ist klar, dass hier effektiv elektrostatisch bzw. magnetostatisch gerechnet wurde und die Zeitabhängigkeiten z.B. so langsam sein müssen, dass man die Abstrahlung elektromagnetischer Wellen vernachlässigen kann. Eine genauere Herleitung der Stromkreis-Gleichung und genauere Abschätzungen sind gar nicht so trivial und teils z.B. in REBHAN diskutiert.

Die Stromkreisgleichung ist mathematisch äquivalent zur Gleichung des linearen gedämpften harmonischen Oszillators

$$m\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + kx(t) = F_e(t) \tag{5.10}$$

mit externer Kraft $F_e(t)$, Oszillatormasse m, Federkonstante k und Reibungskonstante γ . Wir lesen deshalb sofort die Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ beim ungedämpften (R = 0) Schwingkreises $(U_e(t) \equiv 0)$ ab;

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$
 Eigenfrequenz (ungedämpfter Schwingkreis). (5.11)

5.2.2 Impedanz

Die Stromkreisgleichung $L\ddot{I}(t) + R\dot{I}(t) + \frac{1}{C}I(t) = \dot{U}(t)$ kann als lineare DGL vollständig gelöst werden. Wir interessieren uns im Folgenden nur für einen stationären, eingeschwungenen Zustand bei monofrequenter Zeitabhängigkeit der äusseren Spannung, z.B. $U_e(t) = U_e \cos \omega t$. Da die Gleichung linear ist, lösen wir sie mit dem Ansatz

$$U(t) = U_{\omega}e^{i\omega t}, \quad I(t) = I_{\omega}e^{i\omega t}, \quad U_{\omega} \in \mathbb{R}, \quad I_{\omega} \in \mathbb{C},$$
(5.12)

wobei hier das Pluszeichen in $e^{+i\omega t}$ die übliche Konvention ist. Ist I(t) eine Lösung zu U(t), so ist das komplex Konjugierte $I^*(t)$ eine Lösung zur komplex konjugierten Gleichung, in der $U(t) \rightarrow U^*(t)$ und die reellen Koeffizienten dieselben bleiben: beide Lösungen können dann einfach zu einer reellen Lösung für den Strom zu reeller Spannung superponiert werden, die reellen Spannungen und Ströme erhält man also aus

$$U_r(t) = \Re U(t) = \Re U_\omega e^{i\omega t}, \quad I_r(t) \equiv \Re I(t) = \Re I_\omega e^{i\omega t}.$$
(5.13)

Mit den komplexen Exponentialfunktionen werden die Rechnungen aber sehr viel einfacher: Wir erhalten

$$\left(-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C}\right)I_\omega = i\omega U_\omega \tag{5.14}$$

und daraus

$$Z(\omega) \equiv \frac{U_{\omega}}{I_{\omega}} = R + iX, \quad X \equiv \omega L - \frac{1}{\omega C}, \quad \text{Impedanz } Z(\omega) \text{ (Schwingkreis).}$$
(5.15)

Die Impedanz ist ein komplexwertiger Widerstand. Er setzt sich hier aus den Impedanzen der einzelnen Elemente des Schaltkreises zusammen:

$$Z_R \equiv R, \quad Z_L(\omega) \equiv i\omega L, \quad Z_C(\omega) \equiv -i\frac{1}{\omega C},$$
 (5.16)

Zum Beispiel ist für eine reine Kapazität

$$I_r(t) \equiv \Re I_\omega e^{i\omega t} = \Re \frac{1}{Z_C(\omega)} U_\omega e^{i\omega t}$$
(5.17)

$$\rightsquigarrow I_r(t) = \Re \left(i \omega C U_\omega e^{i \omega t} \right) = \omega C U_\omega \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$
 (5.18)

Die reelle Spannung $U_r(t) \equiv \Re U_{\omega} e^{i\omega t} = U_{\omega} \cos(\omega t)$ hat also eine Phase ωt , die der Phase $\omega t + \frac{\pi}{2}$ des Stroms um $\frac{\pi}{2}$ 'hinterherläuft'¹. Technologisch wichtig ist die Frequenzabhängigkeit von $Z_C(\omega)$ und $Z_L(\omega)$ (Frequenzfilter).

5.3 Wellenleiter ('transmission lines')

Wir betrachten ebene monochromatische elektromagnetische Wellen der Frequenz ω in einem homogenen Medium ohne freie Ladungen, die in z-Richtung laufen sollen;

$$\mathbf{\tilde{E}}(\mathbf{r},\omega) \equiv \mathbf{E}(x,y)e^{ikz}; \quad \mathbf{\tilde{B}}(\mathbf{r},\omega) \equiv \mathbf{B}(x,y)e^{ikz}.$$
(5.19)

Hierbei ist $\mathbf{E}(x, y)$ ($\mathbf{B}(x, y)$) der räumliche Anteil des elektrischen (magnetischen) Feldes. Mit Gl. (4.94) hatten wir bereits die entsprechenden Wellengleichungen aufgestellt, ohne über Randbedingungen zu sprechen. Wir betrachten jetzt solche Randbedingungen, für die transversale elektromagnetische Wellen (TEM), d.h. Wellen der Form Gl. (5.19), die Gl. (4.94) erfüllen, auch existieren. Die Ränder sollen von z unabhängig sein, so dass sich wie z.B. bei einem *Koaxialkabel* immer derselbe Querschnitt in x-y-Richtung ergibt.

Im Folgenden soll stets $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ und $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ mit im Medium räumlich und zeitlich konstantem und reellem ε, μ gelten. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen ist dann nach der Wellengleichung Gl. (4.94)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}},\tag{5.20}$$

also für TEM unabhängig von den Randbedingungen. Ebenso ist die Dispersion $\omega = vk$ für TEM unabhängig von den Randbedingungen.

Wir nehmen folgende Randbedingung für die *Tangentialkomponente* des elektrischen Feldes an,

$$\mathbf{E}_{\parallel} = 0, \quad \text{auf dem Rand.}$$
 (5.21)

Der Rand kann z.B. aus einem idealen Leiter bestehen, in dem kein elektrisches Feld existieren kann, so dass wegen der Stetigkeit von \mathbf{E}_{\parallel} diese Randbedingung immer erfüllt ist.

¹ Ein entsprechender Merkspruch lautet 'Sie läuft ihm hinterher, wenn er eine Kapazität ist'.

Zunächst folgt aus den Maxwellgleichungen

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0 = 0 \rightsquigarrow \operatorname{div}_2\mathbf{E}(x, y) = 0 \tag{5.22}$$

$$\mathbf{e}_z \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{e}_z \mathbf{B} = 0 \rightsquigarrow \operatorname{rot}_2 \mathbf{E}(x, y) = 0, \tag{5.23}$$

wobei die Divergenz und Rotation jetzt nur für die x-y-Komponenten benötigt wird. Der räumliche Anteil des elektrischen Feldes ist also Divergenz- und Rotations-frei und kann deshalb als Gradient eines skalaren Potentials $\Phi(x, y)$ geschrieben werden, $\mathbf{E}(x, y) = -\nabla \Phi(x, y)$, das einer Laplace-Gleichung $\Delta \Phi(x, y) = 0$ genügt. Damit ist alles auf ein zweidimensionales elektrostatisches Problem reduziert. Falls es nur einen Rand gäbe (z.B. einfacher Hohlzylinder), wäre dieser Rand eine Äquipotentialfläche und damit wegen der Eindeutigkeit der Lösung der Laplacegleichung auch im Inneren das Potential $\Phi(x, y)$ konstant und somit das Feld Null: *in einfach zusammenhängenden* zylinderförmigen Hohlräumen existieren keine TEM. Deshalb benötigt man wie beim Koaxialkabel mindestens zwei Ränder (z.B. die 'Seele' des Koaxialkabels in seiner Mitte und der Leiter aussen).

5.3.1 Plattengeometrie

Wir betrachten zwei in z-Richtung unendliche ebene Platten bei $x = \pm \frac{a}{2}$ im Abstand *a* mit endlicher Breite $b \gg a$ (Randeffekte vernachlässigen) in y-Richtung (SKIZZE). Die TEM läuft dann zwischen den Platten in z-Richtung, das elektrische Feld **E** zeigt in die x-Richtung, da es senkrecht auf den Rändern (Platten) stehen muss. Das magnetische Feld **H** zeigt in die y-Richtung parallel zu den Platten. Das entsprechende zweidimensionale elektrostatische Problem sind die Scharen von je zwei parallelen Geraden im Abstand *a*, die das Plattenpaar 'aufbauen' (SKIZZE), und zwischen denen je eine Potentialdifferenz V(z) besteht, so dass

$$\mathbf{E}(x,y) = konst \rightsquigarrow \mathbf{e}_x \mathbf{E}(x,y) e^{ikz} = V(z)/a.$$
(5.24)

Entsprechend ist das magnetische Feld **H** parallel zu den Geradenpaaren. Es erzeugt auf der Oberfläche der Platten Ströme, die das Magnetfeld so abschirmen müssen, das es ausserhalb, d.h. für $|x| > \frac{a}{2}$, verschwindet. Die entsprechenden Stromdichten **j** in den Platten zeigen in z-Richtung. Strom und Magnetfeld hängen dann (für festes z, SKIZZE) zusammen über

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} \rightsquigarrow I(z) = \mathbf{e}_{y}\mathbf{H}(x, y)e^{ikz}b.$$
(5.25)

(Stokes, WARUM DARF MAN MAGNETOSTATISCH RECHNEN?) Die Ströme zeigen in den zwei gegenüberstehenden Platten jeweils in entgegengesetzte Richtung (Orientierung der Stokesschen Integrationsschleife). Die gesamte TEM läuft in z-Richtung, deshalb sind die Spannung V(z) und der Strom I(z) wie die Felder gemäss e^{ikz} räumlich moduliert, die zeitliche Abhängigkeit ist ebenfalls einfach durch den $e^{-i\omega t}$ -Faktor der Felder gegeben. Für diese Plattengeometrie definieren wir eine Impedanz Z_p analog zu den Wechselstromkreisen,

$$Z_p \equiv \frac{V}{I} = \frac{\mathbf{e}_x \mathbf{E}(x, y)}{\mathbf{e}_y \mathbf{H}(x, y)} \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{a}{b}.$$
(5.26)

Hierbei haben wir die Wellenimpedanz $Z = Z(\omega)$, Gl. (4.3.6), für TEM in homogenen Medien benutzt.

5.3.2 Ersatzschaltbild

Das obige Plattenpaar fassen wir als Aneinanderreihung von parallelen Geraden der Länge b im Abstand a auf, die Gesamthöhe in z-Richtung sei $l \gg b \gg a$. Die Kapazität des Plattenpaares pro Länge, also per Geradenpaar, ist

$$\frac{C}{l} = \varepsilon \frac{bl}{al} = \varepsilon \frac{b}{a},\tag{5.27}$$

den die Kapazität des Plattenpaares ist $C = \varepsilon \frac{bl}{a}$. Die Induktivität L des Plattenpaares pro Länge erhalten wir am besten aus der magnetischen Energie,

$$W_{mag} = \frac{1}{2}\mu \int d^3 \mathbf{r} |\mathbf{H}|^2 = \frac{1}{2}LI^2 \rightsquigarrow \frac{1}{2}\mu lab|\mathbf{H}(x,y)|^2 = \frac{1}{2}LI^2 \rightsquigarrow \frac{L}{l} = \mu \frac{a}{b}, \qquad (5.28)$$

wobei wir Gl. (5.25) benutzt haben. Daraus ergibt sich folgendes Ersatzschaltbild: wir ersetzen jedes Geradenpaar durch einen idealen (ohmscher Widerstand R = 0) offenen Schwingkreis mit Induktivität L und Kapazität C. Die unendliche Aneinanderkettung der Geradenpaare zum Plattenpaar in z-Richtung entspricht einer unendlichen Aneinanderkettung von identischen Schwingkreisen (SKIZZE) mit Kapazität und Induktivität pro Länge,

$$\frac{C}{l} = \varepsilon \frac{b}{a}, \quad \frac{L}{l} = \mu \frac{a}{b}.$$
(5.29)

Wir wissen bereits, dass wegen Gl. (5.24) und Gl. (5.25) Strom I(z,t) und Spannung V(z,t) je einer Wellengleichung mit Ausbreitungsgeschwindigkeit v, Gl. (5.20),

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{l}{\sqrt{LC}} \tag{5.30}$$

genügen müssen.

AUFGABE: Betrachten Sie ein Koaxialkabel in z-Richtung mit Radien a (innere 'Seele') und b (aussen). Das Kabel soll aus idealen Leitern bestehen. Leiten Sie in Analogie zur Plattengeometrie für TEM-Wellen den Zusammenhang zwischen elektrischem Feld/magnetischem Feld (SKIZZE) und Spannung V(z)/Strom I(z) her, und berechnen Sie die Impedanz Z = V/I.

5.3.3 Die Telegrafengleichung

Wir können das obige Beispiel weiter abstrahieren und ein allgemeines Ersatzschaltbild aus einer unendlichen Kette hintereinandergeschalteter Schwingkreise n mit (zeitlich konstanten) Induktivitäten L_n , Ohmschen Widerständen R_n und Kapazitäten C_n betrachten (in der SKIZZE ohne Ohmsche Widerstände). Die 1. Kirchhoffsche Regel für die Ströme besagt hier

$$I_n(t) = I_{n+1}(t) + C_n U_n(t), (5.31)$$



Fig. 5.1: Ersatzschaltbild für Wellenleiter (hier ohne Ohmsche Widerstände).

wobei der letzte Term von der zeitlichen Ableitung der Ladung $Q_n(t) = C_n U_n(t)$ herrührt. Weiterhin benutzten wir Gl. (5.5), das manchmal auch als 2. Kirchhoffsche Regel bezeichnet wird,

$$\dot{\Phi}_V + \int_V \mathbf{E} d\mathbf{r} = U_e(t), \quad 2. \text{ Kirchhoffsche Regel.}$$
(5.32)

Wir wenden die 2. Kirchhoffsche Regel auf jeden geschlossenen Teilkreis n des Schaltbildes an, wobei hier die externe Spannung $U_e(t)$ Null sein soll, und erhalten

$$L_n I_n(t) + R_n I_n(t) + U_n(t) - U_{n-1}(t) = 0.$$
(5.33)

Damit hat man im Prinzip ein geschlossenes System von Gleichungen;

$$C_n \dot{U}_n(t) + I_{n+1}(t) - I_n(t) = 0$$
(5.34)

$$L_n \dot{I}_n(t) + R_n I_n(t) + U_n(t) - U_{n-1}(t) = 0.$$
(5.35)

Wir können hiervon ausgehend zu einer kontinuierlichen Beschreibung übergehen, in der der diskrete Index n zu einer kontinuierlichen Variable x wird,

$$U_n(t) \rightarrow U(x,t), \quad U_{n+1}(t) \rightarrow U(x + \Delta x, t)$$

$$(5.36)$$

$$I_n(t) \rightarrow I(x,t), \quad I_{n+1}(t) \rightarrow I(x + \Delta x, t)$$
 (5.37)

$$C_n \rightarrow C(x)\Delta x, \quad L_n \rightarrow L(x)\Delta x, \quad R_n \rightarrow R(x)\Delta x$$
 (5.38)

wobei C(x), L(x) und R(x) hier Kapazitäten bzw. Induktivitäten bzw. Ohmsche Widerstände pro Länge darstellen, analog zum oben diskutierten Beispiel der Plattengeometrie. Damit erhalten wir im Limes $\Delta x \to 0$

$$C(x)\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = 0$$
(5.39)

$$L(x)\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} + R(x)I(x,t) + \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = 0.$$
(5.40)

Für konstante C(x) = C, L(x) = L und R(x) = R können wir das durch Differenzieren zu einer Gleichung zusammenfassen, nämlich

$$LC\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial t^2} + RC\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad \text{Telegrafengleichung}$$
(5.41)

Die Telegrafengleichung ist also eine verallgemeinerte eindimensionale Wellengleichung, für R = 0 wird sie eine Wellengleichung mit Ausbreitungsgeschwindigkeit $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Im physikalischen Wellenleiter im Medium mit ε, μ galt Gl. (5.20), $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, wir bekommen also den Zusammenhang

$$LC = \varepsilon \mu. \tag{5.42}$$

Aus einer Ebene-Wellen-Lösung (wieder für R = 0)

$$U(x,t) = U_{\omega}e^{i(kx-\omega t)}, \quad I(x,t) = I_{\omega}e^{i(kx-\omega t)}, \quad \omega = vk$$
(5.43)

$$\rightsquigarrow -C\omega U_{\omega} + \frac{\omega}{v}I_{\omega} = 0 \tag{5.44}$$

erhalten wir mit $v=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ ebenfalls die Impedanz des Wellenleiters,

$$Z(\omega) \equiv \frac{U_{\omega}}{I_{\omega}} = \sqrt{\frac{L}{C}},$$
 Wellenleiter-Impedanz $(R = 0).$ (5.45)

AUFGABE: Leiten Sie aus den Maxwellschen Gleichungen für $\rho = 0$ und $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ die Telegrafengleichung für das elektromagnetische Feld her,

$$\left(\Delta - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{E} = 0$$
(5.46)

$$\left(\Delta - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{B} = 0.$$
(5.47)

6. SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

6.1 Einführung (MECHANIK-SKRIPT)

Neben mechanischen Vorgängen spielen in der Physik elektromagnetische Phänomene eine große Rolle; bei diesen tritt mit der Lichtgeschwindigkeit *c* eine gegenüber 'normalen' mechanischen Bewegungen sehr hohe Geschwindigkeit auf. Es zeigt sich, dass die Mechanik wegen der Forderung der Gleichwertigkeit aller Inertialsysteme für alle (nicht nur die mechanischen) physikalischen Vorgänge abgeändert werden muss.

6.2 Galilei-Transformationen (MECHANIK-SKRIPT)

Bei der Diskussion der Newtonsche Bewegungsgleichungen hatten wir bereits die aus Sicht der Mechanik besonders ausgezeichneten Koordinatensysteme, nämlich **Inertialsysteme**, kennen gelernt. Inertialsysteme bewegen sich gleichförmig mit konstanter Geschwindigkeit gegeneinander. Die Zeit t und die Ortskoordinaten x, y, z zwischen Inertialsystemen werden mittels (spezieller) Galilei-Transformationen umgerechnet, z.B. gemäß

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z$$

 $t' = t,$ (6.1)

wenn sich beide Systeme relativ zueinander mit der Geschwindigkeit v bewegen.

Allgemein wird in drei Raumdimensionen der Übergang von einem Inertialsystem Kzu einem Inertialsystem K' durch

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x} - \mathbf{v}t + \mathbf{a}, \quad R \in SO(3), \quad \mathbf{v}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$$
(6.2)

$$t' = t + t_0, \quad t_0 \in \mathbb{R}, \quad \text{Galilei-Transformation}$$
(6.3)

beschrieben, wobei R eine orthogonale Drehmatrix, **a** ein Verschiebungsvektor, **v** der Vektor der Relativgeschwindigkeit zwischen K und K' und t_0 eine Verschiebung des Zeit-Nullpunkts ist. Alle Parameter der Galilei-Transformation sind selbst *zeitunabhängig*, im Gegensatz etwa zu unserem zeitabhängigen Basiswechsel bei der Diskussion rotierender starrer Körper mit Nichtinertialsystemen in Kapitel 3¹. Nichtinertialsysteme sind beschleunigt und haben hier in dieser Diskussion zunächst einmal nichts zu suchen.

Die Zeit besitzt in der Newtonschen Mechanik einen absoluten Charakter - die Zeit t wird (bis auf die triviale Verschiebung t_0) nicht 'rotiert', insbesondere wird sie durch die

¹ Dort war R = R(t) und $\mathbf{x} = R(t)\mathbf{x}'$ - in der obigen Notation also \mathbf{x} und \mathbf{x}' vertauscht.

Galilei-Transformationen nicht mit den anderen Koordinaten x, y, z vermischt, während letztere z.B. bei den räumlichen Rotationen R der Galilei-Transformationen vermischt werden.

6.2.1 Invarianz der Bewegungsgleichungen

Die Galilei-Transformationen sind durch insgesamt zehn reelle Parameter gekennzeichnet: drei Drehwinkel, je drei Komponenten von \mathbf{v} , \mathbf{a} , und die Verschiebung des Zeit-Nullpunkts t_0 . Für konservative Vielteilchensysteme mit Zweiteilchen-Wechselwirkungen bleiben die Newtonschen Gleichungen unter Galilei-Transformationen *invariant*. Explizit bedeutet das (z.B. GOENNER, 'Spezielle Relativitätstheorie')

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i(\{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|\}) \rightsquigarrow m'_i \ddot{\mathbf{x}}_i' = \mathbf{F}'_i(\{|\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_j|\})$$

$$m_i = m'_i, \quad \mathbf{F}'_i = R\mathbf{F}_i, \qquad (6.4)$$

d.h. die Massen m_i selbst werden bei Galilei-Transformationen überhaupt nicht geändert. Die Vektoren der Kräfte \mathbf{F}_i werden einfach wie die Ortsvektoren \mathbf{x}_i mit der Rotationsmatrix gedreht, falls das System K' gegenüber dem System K gedreht ist. Die mikroskopische Beschreibung der Welt erfolgt gemäß der Newtonschen Mechanik durch die Gleichungen Gl. (6.4), zu verstehen als 'nackte' Newtonschen Gleichungen mit mikroskopischen Ausdrücken für die konservativen Kräfte \mathbf{F}_i , und ohne irgendwelche Zwangsbedingungen. Wir sprechen hier also immer über *abgeschlossene Systeme* (vgl. MECHANIK-SKRIPT), also ohne äußere Kräfte. Uns geht es jetzt um das 'Ganze'! Wir sind also wieder ganz am Anfang angelangt, was wir auch daran sehen, das wir hier alles in kartesischen Koordinaten formuliert haben.

Alternativ formulieren wir die obige Invarianz nochmal im Lagrange-Formalismus: Die Lagrange-Funktion eines konservativen Vielteilchensystems mit Zweiteilchen-Wechselwirkungen ist unter Galilei-Transformationen invariant - nach dem Noether-Theorem existieren deshalb die entsprechenden Erhaltungsgrößen, vgl. FLIESSBACH. Die sind die zehn Erhaltungsgrößen Gesamtenergie, Gesamtimpuls, Gesamtdrehimpuls, und eine Anfangskoordinate \mathbf{x}_0 des Schwerpunkts, denn die Galilei-Gruppe hat zehn reelle Parameter.

Nochmals alternativ kann man die Galilei-Invarianz und die zugehörigen Erhaltungssätze auch im Phasenraum und mit Hilfe von kanonischen Transformationen und erzeugenden Funktionen ausdrücken (z.B. STRAUMANN, oder als AUFGABE).

6.2.2 Mathematischer Einschub: Gruppen

Die Galilei-Transformationen bilden eine Gruppe: Wir definieren (z.B. BRONSTEIN)

Definition Eine Menge G, die mit einer assoziativen Operation $*: G \times G \to G, (a, b) \to a * b \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$ versehen ist, heißt **Gruppe**, falls es ein neutrales Element e gibt und zu jedem Element $g \in G$ ein inverses Element $g^{-1} \in G$ mit

$$g * g^{-1} = g^{-1} * g = e \tag{6.5}$$

existiert.

Beispiele:

- Komplexe Zahlen $\mathbb{C}\setminus 0$ bezüglich der Multiplikation.
- Die ganzen Zahlen \mathbb{Z} bezüglich der Operation + (Addition)
- Komplexe $n \times n$ Matrizen A mit $det(A) \neq 0$ bezüglich der Matrix-Multiplikation.

AUFGABE: Zeige, dass die Galilei-Transformationen eine Gruppe bilden. Eine nützliche Benennung ist

Definition Eine Gruppe heißt **abelsch**, falls ihre Operation * kommutativ ist, d.h. falls a * b = b * a für alle Gruppenelemente.

AUFGABE: Zeige, dass die Rotationen in der zweidimensionalen Ebene eine abelsche Gruppe bilden, die Rotationen in drei Dimensionen aber nicht.

6.3 Die Lorentz-Transformation

6.3.1 Einleitung

Elektromagnetische Phänomene werden durch die Maxwellschen Gleichungen beschrieben, die im 19. Jahrhundert entdeckt wurden (vgl. auch MM). Typische Anwendungen sind z.B. Wellengleichungen vom Typ

$$\Delta u(\mathbf{x},t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(\mathbf{x},t) = 0, \qquad (6.6)$$

wie wir sie bereits in MM und in der geometrischen Optik kennen gelernt hatten, vgl. MECHANIK-SKRIPT. Man stellte bald fest, dass solche Gleichungen *nicht* invariant sind unter Transformationen zwischen Inertialsystemen $K \to K'$ mittels Galilei-Transformationen. Da die Elektrodynamik jung, die Newtonsche Mechanik aber wohletabliert war, suchte man wohl zunächst nach Fehlern in ersterer, was nicht gelang. Offensichtlich waren nicht alle Inertialsysteme gleichberechtigt, falls Gl. (6.6) und die Galileitransformationen gelten sollten: es lag deshalb nicht fern, die Existenz eines ausgezeichneten Inertialsystems (**Äther**) zu postulieren, in dem Licht und elektromagnetische Wellen allgemein sich ausbreiteten.

Das führte allerdings zu Widersprüchen mit Hochpräzisionsexperimenten (Michelson-Morley) zur Messung der Lichtgeschwindigkeit. Weiterhin war das ganze Ätherkonzept (GOENNER) wegen widersprüchlicher physikalischer Eigenschaften ('hart wie Stahl, aber ohne Reibung gegenüber der Planetenbewegung') fragwürdig und ist heute wohl eher von wissenschaftshistorischem Interesse ²

² Vgl. auch unrühmliche Fehlentwicklungen wie die von Philipp Lenard propagierte 'Deutsche Physik' und sein Lehrbuch gleichen Titels, in dem der 'Äther und die Geisterwelt' diskutiert werden (Band 4, Lehmanns Verlag, München 1937).
Ein Vorläufer der Lorentz-Transformation ist die **Voigt-Transformation** für die Schwingungsgleichung für Wellenausbreitung in einem Kristall (SCHECK). Mathematisch gesehen handelt es sich bei den gesuchten Transformationen, die die Galilei-Transformationen ersetzen und verallgemeinern sollen, also um die **Invarianzgruppe des d'Alembert-Operators**, d.h. des Differentialoperators

$$\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{6.7}$$

der Wellengleichung. Wieder ist es erstaunlich, dass wir es hier bei unserem Vorstoss von der Newtonschen Mechanik auf (relativistisches) Neuland mit einer Wellengleichung zu tun haben, so wie es auch beim Vorstoss von der Mechanik über die Eikonalgleichung zur Quantenmechanik der Fall war.

6.3.2 Einsteinsches Relativitätsprinzip

(GOENNER) Einstein erweiterte das Relativitätsprinzip der Mechanik in seiner berühmten Arbeit 'Zur Elektrodynamik bewegter Körper', indem er forderte

Sämtliche physikalischen Vorgänge laufen in allen Inertialsystemen gleich ab.

(Einsteinsches Relativitätsprinzip). Damit sind also nicht nur mechanisches, sondern auch elektromagnetische Vorgänge gemeint. Da für letztere die Galilei-Transformationen nicht funktionieren, müssen neue Transformationen zwischen Inertialsystemen $K \to K'$ gefunden werden, die mit dem Einsteinschen Relativitätsprinzip konsistent sind. Die Lorentz-Transformationen, die das bewirken, stellen sich dann als Verallgemeinerungen der Galilei-Transformationen heraus.

Als zweites Prinzip kommt hinzu:

Die Vakuumlichtgeschindigkeit c ist unabhängig vom Inertialsystem.

(Konstanz der Vakuumlichtgeschindigkeit c).

6.3.3 Konstruktion der Lorentz-Transformation

(GOENNER)

6.3.3.1 Newtonscher Schritt

Wir betrachten zwei Inertialsysteme K und K', die sich mit Relativgeschwindigkeit v in Richtung der parallel gelegten x- und x'-Achsen bewegen. Wie bei der Galilei-Transformation gelte für die beiden anderen Raumachsen y = y', z = z'. Wir beschreiben raum-zeitliche Ereignisse entlang der x- und x'-Achsen, also zunächst räumlich eindimensionale Bewegungen. Für Bewegungen eines freien Teilchens gelten in K und K'Geradengleichungen vom Typ

$$x = \alpha t + \delta, \quad x' = \alpha' t' + \delta', \tag{6.8}$$

in beiden Systemen sind das lineare Gleichungen (mit konstanten Termen δ, δ'). Die der Galilei-Transformation entsprechende gesuchte Transformation von Koordinaten $x \to x'$ sollte also wieder linear sein,

$$x' = \gamma(v)(x - vt), \tag{6.9}$$

wobei wir bereits ausnutzen, dass der Koordinatenursprung von K', d.h der Punkt x' = 0, im K-System durch x = vt gegeben ist ³. Hierbei wurde der Zeitnullpunkt so gelegt, dass bei t = 0 beide Koordinatenursprünge x = x' = 0 zusammenfallen. Der Parameter $\gamma(v)$ hängt nur von der Relativgeschwindigkeit ab und muss noch bestimmt werden.

Nach dem *Relativitätsprinzip* muss die Transformation von $x' \to x$, d.h. von $K' \to K$, die gleiche Form wie Gl. (6.9) haben, nur dass jetzt v durch -v ersetzt wird und die Rollen von x und x' bzw. t und t' vertauscht sind, d.h.

$$x = \gamma(-v)(x' + vt').$$
(6.10)

Jetzt nutzt man die *Isotropie des Raums* aus, um mehr über $\gamma(v)$ zu erfahren: bei Ersetzung von x' und x durch ihre gespiegelten Werte -x' und -x sowie Ersetzung von v durch -v darf sich nichts ändern, aus Gl. (6.9) folgt also

$$-x' = \gamma(-v)(-x+vt) \rightsquigarrow \gamma(-v) = \gamma(v).$$
(6.11)

Damit hat man aber auch eine Transformationsgleichung für t' gefunden, denn Einsetzen von Gl. (6.9) in Gl. (6.10) liefert (wir schreiben jetzt abkürzend γ statt $\gamma(v)$)

$$x = \gamma(x' + vt') = \gamma(\gamma(x - vt) + vt') \rightsquigarrow t' = \gamma t + \frac{1 - \gamma^2}{v\gamma}x.$$
(6.12)

Bis hierhin fassen wir erst einmal zusammen;

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma t + \frac{1 - \gamma^2}{v\gamma}x.$$
(6.13)

Wichtig ist die Tatsache, dass man bis hier nur die Newtonsche Mechanik und die Isotropie des Raumes ausgenutzt hat. Das volle *Einsteinsche* Relativitätsprinzip (bezogen auf elektromagnetische Vorgänge) spielt bis hier keine Rolle. Ausgenutzt wurde nur die Invarianz des Trägheitssatzes: Geraden werden auf Geraden transformiert.

6.3.3.2 Bestimmung von $\gamma(v)$: Gruppeneigenschaft

Wir schalten zwei Transformationen Gl. (6.13) hintereinander,

$$t'' = \gamma' t' + \frac{1 - \gamma'^2}{v' \gamma'} x' = \gamma' [\gamma t + \frac{1 - \gamma^2}{v \gamma} x] + \frac{1 - \gamma'^2}{v' \gamma'} \gamma (x - vt)$$
(6.14)

$$x'' = \gamma'(x' - v't') = \gamma'\left[\gamma(x - vt) - v'\left(\gamma t + \frac{1 - \gamma^2}{v\gamma}x\right)\right].$$
(6.15)

 $^{^{3}}$ Weiterhin werden die etwas allgemeineren *projektiven* Transformationen ausgeschlossen, bei denen man auch Punkte im Endlichen ins Unendliche transformieren kann.

Wenn die Transformationen die *Gruppeneigenschaft* haben, muss das wieder die Form Gl. (6.13) haben, also

$$x'' = \gamma''(x - v''t), \quad t'' = \gamma''t + \frac{1 - (\gamma'')^2}{v''\gamma''}x$$
(6.16)

mit irgendwelchen neuen v'' und $\gamma''.$ Der Vergleich z.B. für den Vorfaktor γ'' ergibt

$$\gamma' \gamma \left(1 - v \frac{1 - \gamma'^2}{v' \gamma'^2} \right) = \gamma' \gamma \left(1 - v' \frac{1 - \gamma^2}{v \gamma^2} \right)$$
(6.17)

Trennung beider Seiten liefert

$$\frac{1-\gamma^2}{v^2\gamma^2} = \frac{1-\gamma'^2}{(v')^2\gamma'^2} = \text{const},$$
(6.18)

denn das muss ja für beliebige Relativgeschwindigkeiten gelten. Deshalb also

$$\frac{1-\gamma^2}{v^2\gamma^2} = K = \text{const} \rightsquigarrow \gamma(v) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+Kv^2}}.$$
(6.19)

Die negative Wurzel verwerfen wir, da bei v = 0 nichts passiert und $\gamma(0) = 1$ gelten muss, also

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 + Kv^2}}.$$
(6.20)

Die Konstante K muss die Dimension eines inversen Geschwindigkeits-Quadrats haben. Der Fall K = 0 entspricht den *Galilei-Transformationen*,

$$K = 0 \rightsquigarrow x' = x - vt, \quad t' = t. \tag{6.21}$$

Jetzt könnte man z.B. sagen, dass man *experimentell* $K = -\frac{1}{c^2}$ findet. Alternativ kann man Einsteins Postulat von der Konstanz der Vakuumlichtgeschindigkeit c benutzen.

6.3.3.3 Bestimmung von $\gamma(v)$: Konstanz von c

Benutzt man die Konstanz der Vakuumlichtgeschindigkeit c, so kommt man sowieso schneller an das Ziel, $\gamma(v)$ zu bestimmen: zu den Zeiten t = t' = 0 fallen die Koordinatenursprünge x = x' = 0 zusammen, dort werde eine Lichtwelle ausgesandt. Die Front x = ct der Lichtwelle (ausgedrückt durch K-Koordinaten) muss im System K' durch x' = ct' mit demselben c beschrieben werden. Es gilt also

$$x = ct, \quad x' = ct' \quad \rightsquigarrow \quad ct' = \gamma(ct - vt), \quad ct = \gamma(ct' + vt')$$
 (6.22)

$$c^2 = \gamma^2 (c^2 - v^2). \tag{6.23}$$

Einfaches Umstellen und die Forderung $\gamma > 0$ führt auf

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$
(6.24)

Insgesamt haben wir damit

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right).$$
 (6.25)

6.3.4 Matrix-Form

In Matrix-Form lautet unsere spezielle Lorentz-Transformation für eine Relativbewegung entlang der parallel gelegten x- und x'-Achsen

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}, \quad \beta \equiv \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$
 (6.26)

Ausgeschrieben für alle Komponenten haben wir natürlich eine 4×4 -Matrix,

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
(6.27)

6.4 Folgerungen aus der Lorentz-Transformation

Hier werden Folgerungen aus der Lorentz-Transformation vorgestellt, die für unsere Alltagserfahrung sehr ungewöhnlich oder sogar widersprüchlich erscheinen und zunächst 'gegen den gesunden Menschenverstand' zu sprechen scheinen.

Im Folgenden betrachten wir wieder unsere spezielle Lorentz-Transformation für eine Relativbewegung entlang der parallel gelegten x- und x'-Achsen. Wegen y' = y und z' = z nehmen wir wieder nur die 2 × 2-Form Gl. (6.26).

6.4.1 Minkowski-Diagramm

Wir stellen die raumzeitliche Bewegung von Punkten in einem **Minkowski-Diagramm** dar. Im ruhenden System K betrachten wir Teilchen, die sich mit gleicher Relativgeschwindigkeit v entlang der x-Achse bewegen. Im Diagramm tragen wir ct (vertikal) und x (horizontal) auf. Die Teilchen werden also durch Geraden vom Typ $x = vt + x_0$ bzw.

$$ct = \frac{c}{v}x + ct_0 \tag{6.28}$$

beschrieben. Solche Geraden nennt man dann *Weltlinien*. Lichtausbreitung wird durch den Lichtkegel $x = \pm ct$ beschrieben, in drei räumlichen Dimensionen ist das durch $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$ zu ersetzen.

6.4.2 Relativität der 'Gleichzeitigkeit'

Wir betrachten ein Gedankenexperiment, in dem sich ein symmetrisches 'Flugzeug' K', d.h. drei starr verbundene Punkte H (hinten), M (Mitte) und V (vorne) an uns von links nach rechts vorbeibewegen. Im Flugzeug, d.h. im System K' werden Lichtstrahlen je von hinten und vorne zur Mitte ausgesendet ⁴, und zwar so, dass die Wellenfronten für einen Beobachter in K' zeitgleich bei M ankommen.

⁴ vgl. DUDEN zum Gebrauch von 'gesendet' versus 'gesandt'



Fig. 6.1: Minkowski-Diagramm zur Gleichzeitigkeit: zwei Lichtstrahlen, die vom Hinterteil H und Vorderteil V eines Flugzeugs ausgesendet werden, treffen sich in der Mitte M.

Im Minkowski-Diagramm bedeutet das Folgendes: zwei Lichtstrahlen mit Steigung 1 bzw. -1 schneiden die Weltlinie von M im selben Punkt (SKIZZE) unter einem rechten Winkel. Zurückverfolgen der Lichtstrahlen zu ihren Ursprüngen H und V zeigt, dass sie für Beobachter in K niemals gleichzeitig ausgesendet werden konnten: der Strahl von H wurde früher als der von V ausgesendet: das muss ja auch so sein, denn V rennt dem Licht entgegen, während H ihm hinterher rennen muss. Während die beiden Ereignisse für K' gleichzeitig sind, sind sie für K nicht gleichzeitig. Dieses Phänomen bezeichnet man als Relativität der Gleichzeitigkeit, wobei letztere hier 'operational' durch eine (Gedanken)- experimentelle Vorschrift quasi definiert wurde (vgl. GOENNER zur Definition des Gleichzeitigkeitsbegriffs).

Im Minkowski-Diagramm sind die Weltlinien des Flugzeugs (H M V) Geraden, die mit der ct-Achse den Winkel ϕ einschließen, für den

$$\tan\phi = \frac{v}{c} \tag{6.29}$$

gilt. Die beiden in K' gleichzeitigen Ereignisse definieren eine Gerade x', die nach der Dreieckskonstruktion (SKIZZE) mit der x-Achse ebenfalls denselbem Winkel ϕ einschließt. Die Gerade x' bezeichnen wir als Gleichzeitigkeits-Gerade, die Geraden ct' als Zeitachsen des bewegten Beobachter. Die Benennung x', ct' ist hier etwas salopp und sollte nicht mit den eigentlichen Werten der Koordinaten in K' durcheinander gebracht werden.

6.4.3 Längenkontraktion

Im System K' ruhe ein Maßstab der Länge $l_0 \equiv \Delta x'$, wobei $\Delta x'$ der Abstand zwischen Spitze und Ende des Stabes sei. K' bewegt sich relativ zu K mit der Geschwindigkeit v. Ein Beobachter in K misst nun Stabspitze und -ende gleichzeitig, d.h. bestimmt Δx für $\Delta t = 0$. Dann folgt aus der Lorentz-Transformation

$$l_{0} \equiv \Delta x' = \gamma (\Delta x - v \Delta t) = \gamma \Delta x$$

$$\rightsquigarrow \quad \Delta x = \frac{l_{0}}{\gamma} = l_{0} \sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}} \le l_{0}, \quad \text{Längenkontraktion} .$$
(6.30)

Die gleichzeitige Messung in K mit $\Delta t = 0$ ist allerdings für einen Beobachter in K'nicht gleichzeitig, denn

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) = -\gamma \frac{v}{c^2} \Delta x = -\frac{v}{c^2} l_0 \neq 0.$$
(6.31)

Der Begriff **Gleichzeitigkeit** hängt also vom Beobachtungssystem ab! Das steht im starken Kontrast zur Newtonschen Mechanik, wo Gleichzeitigkeit, wie die Zeit selbst, ein absolutes (systemunabhängiges) Konzept ist. Durch die Lorentz-Transformation werden sowohl der Ort als auch die Zeit transformiert - man muss sich davor hüten, jeweil naiv nur eine der Transformationsgleichungen von $K \to K'$,

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$
(6.32)

$$\Delta x' = \gamma (\Delta x - v \Delta t), \quad \Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right), \tag{6.33}$$

oder entsprechend von $K' \to K$

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$
(6.34)

$$\Delta x = \gamma (\Delta x' + v \Delta t'), \quad \Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right)$$
(6.35)

anzuwenden. Man könnte z.B. naiv die Gleichung $\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$ mit $\Delta t' = 0$ (Gleichzeitigkeit in K') anwenden und dann für die Stablänge in K folgern $\Delta x = \gamma\Delta x' = \gamma l_0 \geq l_0$ (falsch!). Dieses Δx ist zwar eine in K korrekt ausgerechnete Länge; sie ist aber nicht die Länge, die ein Beobachter in K dem mit der Geschwindigkeit v vorbeifliegenden Stab zuordnen würde, denn dieses Δx entspricht zwei verschiedenen Zeiten in K mit Zeitdifferenz $\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right) = \gamma \frac{v}{c^2} l_0$. Die richtige Längenbestimmung mittels Gl. (6.35) lautet also

$$0 = \Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right) \rightsquigarrow \Delta t' = -\frac{v}{c^2} \Delta x'$$
$$\rightsquigarrow \Delta x = \gamma (\Delta x' + v \Delta t') = \gamma \left(1 - v \frac{v}{c^2} \right) \Delta x' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta x' \le \Delta x', \quad (6.36)$$

was mit dem obigen Ergebnis übereinstimmt.

6.4.4 Zeitdilatation

Im System K', das sich an K mit Geschwindigkeit v vorbeibewegt, ruhe bei x' = 0 eine Uhr. Ein Beobachter in K' messe das periodische 'Schlagen' der Uhr, d.h. Ereignisse mit Zeitintervall $\Delta t'$. Dann findet ein Beobachter in K für das Zeitintervall Δt dieser Ereignisse in seinem Bezugssystem

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right) = \gamma \Delta t' \ge \Delta t', \tag{6.37}$$

wenn z.B. $\Delta t' = 1$ s, so ist bei hohen Relativgeschwindigkeiten $\Delta t \gg 1$ s, d.h. für den Beobachter in K geht die bewegte Uhr langsamer.

Die Zeitdilatation scheint interessanterweise - aus experimenteller Sicht - wesentlich wichtiger als die Längenkontraktion zu sein (Zeit und Raum sind auch in der SRT *nicht* gleichberechtigt). Experimente zur Zeitdilatation: Flug von Präzisionsuhren um die Erde ost- und westwärts (Hafele, Keating 1972), sowie die Lebensdauer von Elementarteilchen (π^0 -Mesonen, μ^{\pm} -Mesonen), vgl. GOENNER.

6.5 Der Minkowskiraum

Wir fassen hier die wichtigsten Eigenschaften zusammen. Der Minkowskiraum ist in der SRT der Raum der **Vierervektoren**. Diese bezeichnen raumzeitliche Ereignisse, d.h. Vektoren mit vier Komponenten

$$x^{\alpha} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z).$$
(6.38)

Die x^{α} sind die **kontravarianten** Komponenten des Vierervektors (vgl. MM) bezüglich eines Inertialsystems K.

Die Transformation der Komponenten zwischen zwei verschiedenen Inertialsystemen K und K' erfolgt gemäß einer Lorentztransformation

$$x' = \Lambda x + b, \quad x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\delta} x^{\delta} + b^{\alpha}, \quad (\text{Einsteinsche Summationskonvention})$$
(6.39)

mit der Matrix der Lorentztransformation Λ . Der Fall b = 0 heißt homogene Lorentztransformation, der Fall $b \neq 0$ heißt inhomogene Lorentztransformation. Die spezielle LT mit Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_1$ hat die Form

$$\Lambda(v) = (\Lambda_{\delta}^{\alpha}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0\\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta \equiv \frac{v}{c}.$$
 (6.40)

LTs haben die Gruppeneigenschaft. Die inhomogenen LTs bilden die **Poincaré-Gruppe**, die homogenen LTs die **Lorentz-Gruppe**.

6.5.1 Vierdimensionaler Abstand

Wir definieren den vierdimensionalen Abstand zweier Ereignisse mit den Koordinaten x^{α}, y^{α} im selben System K als

$$\Delta z^2 \equiv (z^0)^2 - (z^1)^2 - (z^2)^2 - (z^3)^2, \quad z^\alpha \equiv x^\alpha - y^\alpha.$$
(6.41)

Es gilt $\Delta z^2 = 0$, falls sich das z.B. auf das Aussenden (bei x^{α}) und Messen eines Lichtstrahls (bei y^{α}) bezieht. Der hier definierte Abstand ist also anders definiert als z.B. der übliche euklidishe Abstand zweier Vektoren im \mathbb{R}^3 .

Wir schreiben die quadratische Form Gl. (6.41) mit Hilfe des **metrischen Tensors** g,

$$\Delta z^{2} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} z^{\alpha} g_{\alpha\beta} z^{\beta} \equiv z^{\alpha} g_{\alpha\beta} z^{\beta}, \quad g = (g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
(6.42)

Eine der wichtigsten Eigenschaften der LTs ist, dass sie den vierdimensionalen Abstand invariant lassen. Wir überprüfen das mit der speziellen LT Gl. (6.40),

$$\begin{split} \Delta z'^2 &= (z'^0, z'^1, z'^2, z'^3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z'^0 \\ z'^1 \\ z'^2 \\ z'^3 \end{pmatrix} \\ &= (z^0, z^1, z^2, z^3) \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^2(1-\beta^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2(\beta^2-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^0 \\ z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix} = \Delta z^2. \end{split}$$
(6.43)

Die (homogenen) LTs haben also die wichtige Eigenschaft

$$\Lambda^T g \Lambda = g. \quad (6.44)$$

Für infinitesimal benachbarte Ereignisse mit Koordinaten x^α und $x^\alpha + dx^\alpha$ wird dieser Abstand zu

$$ds^2 \equiv g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}. \qquad (6.45)$$

Wieder ist dieser infinitesimale Abstand der zwei Ereignisse unabhängig vom Bezugssystem, d.h. invariant gegenüber LTs;

$$ds^2 \equiv g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = g_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx'^{\beta} \tag{6.46}$$

6.5.2 Die Eigenzeit

Der infinitesimale Abstand ds^2 zweier Ereignisse hängt eng mit der Bogenlänge einer Kurve C im Minkowskiraum zusammen.

Im euklidischen Raum \mathbf{R}^d (SKRIPT MATHEMATISCHE METHODEN) war die Bogenlänge als Länge eines Kurvenstücks der Kurve $C : t' \to \mathbf{r}(t')$ beim zeitlichen Durchlaufen (Anfangszeit t_0 , Endzeit t) definiert;

$$s(t,t_0) \equiv \int_{t_0}^t dt' |\dot{\mathbf{r}}(t')| = \int_{t_0}^t dt' \sqrt{\dot{x}(t')^2 + \dot{y}(t')^2 + \dot{z}(t')^2}$$
(6.47)

$$\rightsquigarrow ds \equiv |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt. \tag{6.48}$$

Im Minkowskiraum betrachtet man eine Kurve als Abfolge von Ereignissen mit Viererkoordinaten x^{α} , die sowohl räumliche als auch zeitliche Anteile haben können. Solche Kurven $C: u \to x^{\alpha}$ werden wieder mit einem reellen Kurvenparameter (u) beschrieben, der jetzt aber nicht mehr die Bedeutung einer Zeit zu haben braucht. BEISPIELE in 1 + 1 Dimensionen: a) die geradlinige Bahn $(x^0, x^1) = (u, uv/c)$ eines Teilchens mit Geschwindigkeit v; b) Lichtstrahl $(x^0, x^1) = (u, u)$; c) in einem IS gleichzeitige Ereignisse $(x^0, x^1) = (0, u)$.

Die Bogenlänge einer Kurve im Minkowskiraum wird definiert durch

$$s(u_1, u_2) \equiv \int_{u_1}^{u_2} du \sqrt{\left|g_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{du} \frac{dx^{\beta}}{du}\right|}$$
(6.49)

$$= \int_{u_1}^{u_2} du \sqrt{\left| \left(\frac{dx^0}{du} \right)^2 - \left(\frac{d\mathbf{x}}{du} \right)^2 \right|}, \tag{6.50}$$

wobe
i ${\bf x}$ die drei räumlichen Komponenten abkürzt. In Analogie zu Kurven im euklidischen Raum schreibt man das Element der Bogenlinie nun

$$ds \equiv \sqrt{|g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}|}.$$
(6.51)

Falls wir nun tatsächlich nach der Zeit t in einem IS parametrisieren, erhalten wir

$$s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\left|c^2 - \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2\right|}$$
(6.52)

$$\frac{1}{c}ds = \sqrt{\left|1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2\right|}dt \tag{6.53}$$

Wird durch die Kurve die Bewegung eines physikalischen Objektes geschrieben, so muss $|\frac{d\mathbf{x}}{dt}| \leq c$ gelten (GOENNER, Kapitel über Tachyonen). Dann können wir die Betragsstriche unter der Wurzel weglassen und definieren

$$d\tau \equiv \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2} dt$$
, Eigenzeit (infinitesimal), (6.54)

man spricht dann von einer durch ihre Eigenzeit parametrisierte Kurve im Minkowskiraum.

Zur Interpretation von Gl. (6.54) erkennen wir, dass diese Gleichung gerade die uns bereits bekannte Zeitdilatation Gl. (6.37) zumindest für infinitesimale Zeitintervalle beschreibt, falls $\left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right| = v$ eine konstante Geschwindigkeit darstellt, d.h. wegen

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt < dt \tag{6.55}$$

geht die Uhr im bewegten System langsamer. Wir betrachten jetzt eine Kurve eines physikalischen Objektes, die in einem IS durch $C: t \to \mathbf{x}(t)$ nach der Zeit parametrisiert werde. Die Eigenzeit für diese Bewegung wird dann als

$$\tau \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2} \tag{6.56}$$

definiert. Diese Eigenzeit - und das ist ihr grosser Vorteil - ist nach Konstruktion wegen der Lorentzinvarianz des Abstands unabhängig vom Inertialsystem, in dem die Kurve beobachtet wird. Man beachte, dass bei dieser Definition auch physikalische Objekte zugelassen werden, die sich nicht mit konstanter Geschwindigkeit, sondern auch beschleunigt bewegen dürfen. Man muss jetzt noch prüfen, dass auch für solche Fälle eine Interpretation der Eigenzeit als die an Uhren des bewegten Systems abgelesene Zeit Sinn macht (GOENNER).

6.5.3 Lorentztensoren

(FLIESSBACH). Wir wollen jetzt den Begriff des Vierervektors etwas präzisieren und verallgemeinern, um nicht nur 'Ereignisse' x^{α} beschreiben zu können, sondern z.B. auch physikalische Grössen wie Kräfte, elektrischen und magnetische Felder etc.

Definition Ein Vierervektor v^{α} ist eine (vierfach indizierte) Grösse, die sich beim Übergang zwischen zwei IS wie die Koordinaten eines Ereignisses x^{α} mittels Lorentz-transformationen transformiert, d.h.

$$v^{\prime \alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} v^{\beta}. \tag{6.57}$$

Ein Vierervektor heisst auch Lorentztensor 1. Stufe. Weiterhin ist ein Vierertensor (Lorentztensor) N-ter Stufe eine N-fach indizierte Grösse $T^{\alpha_1...\alpha_N}$, die sich wie

$$T^{\prime\alpha_1\dots\alpha_N} = \Lambda^{\alpha_1}_{\beta_1}\dots\Lambda^{\alpha_N}_{\beta_N}T^{\beta_1\dots\beta_N} \tag{6.58}$$

transformiert (jeweils Einsteinsche Summationskonvention, über gemeinsame Indizes wird summiert).

Ein Tensor nullter Stufe ist ein *Lorentzskalar*, der sich unter Lorentztransformationen nicht ändert. Die Matrix Λ der Lorentztransformation ist selbst kein Tensor, denn sie beschreibt gerade den Übergang zwischen zwei verschiedenen IS. Lorentztensoren sind also zunächst

6.5.4 Ko- und kontravariante Komponenten

Tensoren können in ko- und kontravariante Komponenten angegeben sein;

$$T^{\alpha_1...\alpha_N}$$
, kontravariante Komponenten (6.59)

$$T_{\alpha_1...\alpha_N}$$
, kovariante Komponenten . (6.60)

Indizes können mit Hilfe des metrischen Tensors hinauf- bzw. heruntergezogen werden, z.B.

$$v^{\alpha} = g^{\alpha\beta} v_{\beta}, \quad v_{\alpha} = g_{\alpha\beta} v^{\beta}, \tag{6.61}$$

wobei die Inverse des metrischen Tensors mit Komponenten $g^{\alpha\beta}$

$$g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta^{\gamma}_{\alpha} \tag{6.62}$$

erfüllt und δ_{α}^{γ} einfach das Kronecker-Symbol ist.

Satz 12. Die kontravarianten Komponenten eines Vierervektors transformieren sich mit $v^{\prime \alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} v^{\beta}$, während sich die kovarianten Komponenten eines Vierervektors mit der Umkehrung $\overline{\Lambda}$ der Lorentztransformation transformieren, $v^{\prime}_{\alpha} = \overline{\Lambda}^{\beta}_{\alpha} v_{\beta}$.

BEWEIS: Für die kontravarianten Komponenten ist das gerade die Definition eines Vierervektors. Für die kovarianten Komponenten folgt das aus

$$v'_{\alpha} = g_{\alpha\beta}v'^{\beta} = g_{\alpha\beta}\Lambda^{\beta}_{\gamma}v^{\gamma} = g_{\alpha\beta}\Lambda^{\beta}_{\gamma}g^{\gamma\delta}v_{\delta} \equiv \bar{\Lambda}^{\delta}_{\alpha}v_{\delta}$$
(6.63)

Tatsächlich ist $\overline{\Lambda}$, die Umkehrung von Λ , denn es gilt

$$\bar{\Lambda}^{\delta}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\epsilon} = g_{\alpha\beta}\Lambda^{\beta}_{\gamma}g^{\gamma\delta}\Lambda^{\alpha}_{\epsilon}.$$
(6.64)

Die Lorentzinvarianz des 'Lorentzquadrats' (vgl. Abstand) besagte

$$x^{\prime \alpha} g_{\alpha \beta} x^{\prime \beta} = \Lambda^{\alpha}_{\gamma} x^{\gamma} g_{\alpha \beta} \Lambda^{\beta}_{\delta} x^{\delta} = x^{\gamma} g_{\gamma \delta} x^{\delta}, \qquad (6.65)$$

also

$$\Lambda^{\alpha}_{\gamma}g_{\alpha\beta}\Lambda^{\beta}_{\delta} = g_{\gamma\delta},\tag{6.66}$$

also

$$\bar{\Lambda}^{\delta}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\epsilon} = \Lambda^{\alpha}_{\epsilon}g_{\alpha\beta}\Lambda^{\beta}_{\gamma}g^{\gamma\delta} = g_{\epsilon\gamma}g^{\gamma\delta} = \delta^{\delta}_{\epsilon}, \qquad (6.67)$$

was zu beweisen war.

6.5.5 Tensorfelder und Ableitungen

(FLIESSBACH) Hier sind die Definitionen ganz analog,

$$s'(x') = s(x),$$
 Skalarfeld (6.68)

$$v^{\prime \alpha}(x^{\prime}) = \Lambda^{\alpha}_{\beta} v^{\beta}(x), \quad \text{Vierer-Vektorfeld}$$
 (6.69)

$$T^{\prime\alpha\beta}(x^{\prime}) = \Lambda^{\alpha}_{\gamma}\Lambda^{\beta}_{\delta}T^{\gamma\delta}(x), \quad \text{Vierer-Tensorfeld 2. Stufe}$$
(6.70)

mit jeweils transformierten Koordinaten $x^{\prime \alpha} = \Lambda_{\beta}^{\alpha} x^{\beta}$.

Wichtig ist die Transformationseigenschaft der partiellen Ableitungen, weil Gradienten physikalisch eine grosse Rolle spielen. Dazu betrachten wir eine Lorentztransformation der Ereigniskoordinaten von K nach K',

$$x^{\prime \alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} x^{\beta} \rightsquigarrow \frac{\partial x^{\prime \alpha}}{\partial x^{\beta}} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} \tag{6.71}$$

oder mit der Umkehrung $\bar{\Lambda}$ der Lorentztransformation von K' nach K

$$x^{\alpha} = \bar{\Lambda}^{\alpha}_{\beta} x^{\prime\beta} \rightsquigarrow \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\prime\beta}} = \bar{\Lambda}^{\alpha}_{\beta}.$$
(6.72)

Als Operator angewendet, gilt für die partielle Ableitung also

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\beta}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \bar{\Lambda}^{\alpha}_{\beta} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}.$$
(6.73)

Es gilt also

Satz 13. Der 'Vierergradient' $\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$, d.h. die partielle Ableitung nach den (kontravarianten) x^{α} , transformiert sich unter LT wie ein kovarianter Vektor.

6.6 Relativistische Dynamik

(RUDER) Im Folgenden sollen die Gesetze der Newtonschen Mechanik auf den relativistischen Bereich verallgemeinert werden. Zumindest sollen in den einfachsten Fällen und für Punktteilchen Größen wie Geschwingigkeit, Beschleunigung, Kraft, Impuls, Energie etc. diskutiert werden. Alles soll so formuliert sein, dass Lorentzinvarianz erfüllt ist.

6.6.1 Die Vierergeschwindigkeit, Viererimpuls

Wir betrachten die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}(t)$ eines Punktteilchens in der Newtonschen Mechanik. Wie wird aus dem Vektor $\dot{\mathbf{x}}(t)$ eine Lorentzinvariante Größe? Wir definieren

Definition Die Vierergeschwindigkeit eines Punktteilchens ist definiert durch

$$u^{\alpha}(\tau) = \frac{dx^{\alpha}(\tau)}{d\tau},\tag{6.74}$$

d.h. durch die erste Ableitung nach der Eigenzeit τ längs der durch τ parametrisierten Bahnkurve $x^{\alpha}(\tau)$.

Die so definierte Vierergeschwindigkeit ist ein Lorentztensor 1. Stufe (Vierervektor), denn τ ist ein Lorentzskalar und dx^{α} als infinitesimale Differenz zweier Ereignisse x^{α} , $x^{\alpha} + dx^{\alpha}$ ein Vierervektor. Wie ist der Zusammenhang mit der üblichen Geschwindigkeit? Dazu schreiben wir mit der Kettenregel, indem wir $x^{\alpha}(\tau) = \tilde{x}^{\alpha}(t(\tau))$ schreiben (und die Tilde der Bequemlichkeit halber wieder weglassen),

$$u^{\alpha}(\tau) = \frac{dx^{\alpha}(\tau)}{d\tau} = \frac{dx^{\alpha}(t)}{dt}\frac{dt}{d\tau} = (c, \dot{\mathbf{x}}(t))\frac{dt}{d\tau} = (\gamma c, \gamma \dot{\mathbf{x}}(t))$$
(6.75)

$$\gamma \equiv \gamma(\dot{\mathbf{x}}(t)) = \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}(t)^2/c^2}}.$$
(6.76)

Hierin ist alles in der Parametrisierung $\mathbf{x}(t)$ nach der 'Inertialzeit t' (nicht Eigenzeit τ) eines bestimmten Inertialsystems ausgedrückt. Weiterhin ist hier und im Folgenden der relativistische Faktor $\gamma = \gamma(\dot{\mathbf{x}}(t))$ im Allgemeinen immer zeitabhängig. Im nichtrelativistischen Grenzfall geht wegen $\gamma \to 1$ der räumliche Anteil der Vierergeschwindigkeit also in den üblichen Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{x}}(t)$ über.

Weiterhin definieren wir

Definition Der Viererimpuls eines Punktteilchens ist definiert durch

$$p^{\alpha}(\tau) \equiv m u^{\alpha}(\tau). \tag{6.77}$$

Hierbei wird die Ruhmasse m des Punktteilchens als Lorentzskalar eingeführt.

In der Parametrisierung nach der Inertialzeit t gilt analog zur Vierergeschwindigkeit

$$p^{\alpha}(\tau) = (\gamma mc, \gamma m \dot{\mathbf{x}}(t)) \equiv (\gamma mc, \mathbf{p}(t))$$
(6.78)

$$\mathbf{p}(t) = \frac{m\dot{\mathbf{x}}(t)}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}(t)^2/c^2}}, \quad \text{relativistischer Impuls} . \tag{6.79}$$

6.6.2 Die Viererbeschleunigung

(RUDER)

Definition Die Viererbeschleunigung eines Punktteilchens ist definiert durch

$$b^{\alpha}(\tau) \equiv \frac{d^2 x^{\alpha}(\tau)}{d\tau^2} \tag{6.80}$$

d.h. durch die zweite Ableitung nach der Eigenzeit τ längs der durch τ parametrisierten Bahnkurve $x^{\alpha}(\tau)$.

Wiederum ist das ein Vierervektor, denn $b^{\alpha}(\tau) = \frac{du^{\alpha}(\tau)}{d\tau}$ und $u^{\alpha}(\tau)$ ist ein Vierervektor. Als Analogon zu den Newtonschen Bewegungsgleichungen setzt man jetzt an

$$m\frac{d^2x^{\alpha}(\tau)}{d\tau^2} = \frac{d}{dt}p^{\alpha}(\tau) = K^{\alpha}(x^{\alpha}(\tau)).$$
(6.81)

Dann muss die rechte Seite der Bewegungsgleichung ein Vierervektor sein, genauer: ein Vierer-Vektorfeld, das als *Minkowski-Kraft* bezeichnet wird. Wie ist deren Zusammenhang mit der in den Newtonschen Gleichungen auftretenden Kraft? Wir schreiben für die räumlichen Komponenten i = 1, 2, 3

$$m\frac{du^{i}(\tau)}{d\tau} = m\frac{du^{i}(t)}{dt}\frac{dt}{d\tau} = m\gamma\frac{d}{dt}\left(\gamma\dot{\mathbf{x}}^{i}(t)\right)$$
(6.82)

$$\rightsquigarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{m \dot{\mathbf{x}}^i(t)}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}(t)^2/c^2}} \right) = K^i(x^\alpha(\tau)) \sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}(t)^2/c^2}$$
(6.83)

Im nichtrelativistischen Grenzfall geht diese Gleichung über in

$$\frac{d}{dt}m\dot{\mathbf{x}}^{i}(t) = K^{i}(x^{\alpha}(t)); \qquad (6.84)$$

allgemein schreiben wir für die räumlichen Komponenten

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) = \mathbf{K}(t), \qquad (6.85)$$

wobei $\mathbf{K}^{i}(t) = K^{i}(x^{\alpha}(\tau))\sqrt{1-\dot{\mathbf{x}}(t)^{2}/c^{2}}$ der üblichen Newtonschen Kraft entspricht.

6.6.3 Relativistische Energie

Die zeitlichen Komponenten der Viererkraft (Minkowski-Kraft) erhalten wir wie folgt. Zunächst ist $p^{\alpha}p_{\alpha}$ ein konstanter Lorentzskalar,

$$p^{\alpha}p_{\alpha} = m^2 \left(\gamma^2 c^2 - \gamma^2 \dot{\mathbf{x}}(t)^2\right) = m^2 c^2.$$
 (6.86)

Deshalb gilt

$$0 = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} p^{\alpha}(\tau) p_{\alpha}(\tau) = p_{\alpha}(\tau) \frac{d}{d\tau} p^{\alpha}(\tau) = p_{\alpha}(\tau) K^{\alpha}(x^{\alpha}(\tau))$$
(6.87)

Daraus folgt

$$u^{0}K^{0} - \sum_{i=1}^{3} u^{i}K^{i} = 0 \rightsquigarrow K^{0} = \frac{1}{u^{0}} \sum_{i=1}^{3} u^{i}K^{i} = \frac{1}{\gamma c} \sum_{i=1}^{3} \gamma \dot{\mathbf{x}}^{i}K^{i} = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{3} \dot{\mathbf{x}}^{i}K^{i}.$$
 (6.88)

Die Viererkraft läßt sich also durch den Dreiervektor der üblichen Newtonschen Kraft $\mathbf{K} = (\mathbf{K}^1, \mathbf{K}^2, \mathbf{K}^3)$ wie folgt ausdrücken:

$$K^{\alpha} = (K^{0}, K^{1}, K^{2}, K^{3}) = \left(\frac{1}{c} \sum_{i=1}^{3} \dot{\mathbf{x}}^{i} K^{i}, K^{1}, K^{2}, K^{3}\right) = \gamma\left(\frac{1}{c} (\dot{\mathbf{x}} \mathbf{K}), \mathbf{K}^{1}, \mathbf{K}^{2}, \mathbf{K}^{3}\right).$$
(6.89)

Hierbei ist die Zeitkomponente durch das übliche euklidische Skalarprodukt $\dot{\mathbf{x}}\mathbf{K}$ gegeben. Die zeitliche Komponente der Bewegungsgleichung wird damit (beachte, dass γ zeitabhängig ist!)

$$m\frac{du^{0}(\tau)}{d\tau} = \gamma \frac{1}{c} \dot{\mathbf{x}} \mathbf{K} \rightsquigarrow m\gamma \frac{d}{dt} (\gamma c) = \gamma \frac{1}{c} \dot{\mathbf{x}} \mathbf{K}, \qquad (6.90)$$

und daraus

$$\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\dot{\mathbf{x}}(t)^2/c^2}} = \dot{\mathbf{x}}(t)\mathbf{K}(t).$$
(6.91)

Die rechte Seite ist die pro Zeit geleistete Arbeit, also muss der Ausdruck unter dem d/dt auf der linken Seite eine Energie sein. Wir haben also die wichtigen Ausdrücke für Impuls und Energie

$$\mathbf{p}(t) = \frac{m\dot{\mathbf{x}}(t)}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}(t)^2/c^2}}, \quad \text{relativistischer Impuls} \quad (6.92)$$
$$E(t) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}(t)^2/c^2}}, \quad \text{relativistische Energie} . \quad (6.93)$$

Der Viererimpuls schreibt sich also mit Hilfe der relativistischen Energie und des relativistischen Impulses als

$$p^{\alpha} = mu^{\alpha} = m\gamma(c, \dot{\mathbf{x}}) = (E/c, \mathbf{p}).$$
(6.94)

Die Formel für die relativistische Energie ist eins der wichtigsten Ergebnisse der Relativitätstheorie. In $E(t) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\dot{\mathbf{x}}(t)^2/c^2}}$ ist *m* die Ruhmasse des Teilchens. Wir können diese zusammen mit dem Faktor $1/\sqrt{1-\dot{\mathbf{x}}(t)^2/c^2}$ auch als geschwindigkeitsabhängige Masse auffassen. Entwickeln der Wurzel ergibt

$$E = mc^{2} + \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}(t)^{2} + O(\dot{\mathbf{x}}(t)^{4}/c^{4}).$$
(6.95)

Der erste Anteil mc^2 wird häufig als Ruhenergie bezeichnet. Der zweite Anteil ist die übliche kinetische Energie, die darüber hinausgehenden Anteile sind Korrekturen bei höheren Geschwindigkeiten.

Wegen
$$p^{\alpha}p_{\alpha} = m^2 \left(\gamma^2 c^2 - \gamma^2 \dot{\mathbf{x}}(t)^2\right) = m^2 c^2$$
, Gl. (6.86), gilt mit Gl. (6.94)
 $\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2$ (6.96)

und damit die Dispersionsrelation

$$E = c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2},$$
 (6.97)

wobei nur die positive Lösung berücksichtigt wird, da negative Gesamtenergien in der klassischen Theorie als unphysikalisch verworfen werden. Für Ruhemasse $m \to 0$ erhalten wir

$$E = c|\mathbf{p}|,\tag{6.98}$$

d.h. die z.B. von den Photonen bekannte lineare Dispersionsrelation.

6.7 Die Kovarianz der Maxwellgleichungen

(FLIESSBACH) Die Form der Maxwellgleichungen bleibt invariant unter Lorentztransformationen. Weiterhin sind elektrische und magnetische Felder eigentlich keine Vektorfelder, sondern Komponenten eines Lorentztensors zweiter Stufe, des Feldstärketensors. Dieses sind die im Zusammenhang mit der SRT wichtigsten Aussagen bezüglich des Elektromagnetismus.

6.7.1 Kontinuitätsgleichung und Ladung

Aus den Maxwellgleichungen folgt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{x},t) = 0.$$
(6.99)

Zunächst soll die Stromdichte \mathbf{j} als ein Vierervektor geschrieben werden. Dazu setzen wir an

$$j^{\alpha}(x^{\alpha}) = (c\rho(x^{\alpha}), \mathbf{j}(x^{\alpha})) = (c\rho(x^{\alpha}), \rho(x^{\alpha})\dot{\mathbf{x}})$$
(6.100)

Die Stromdichte wird hierbei durch einen geladenen Körper K' erzeugt, der sich (von einem System K aus gesehen) mit der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}$ längs der Kurve $\mathbf{x}(t)$ bewegt. Damit daraus ein Vierervektor wird, erinnern wir uns an die Vierergeschwindigkeit

$$u^{\alpha} = (c\gamma, \gamma \dot{\mathbf{x}}). \tag{6.101}$$

Da die Stromdichte dimensionsmässig Geschwindigkeit mal Dichte ist, setzen wir

$$j^{\alpha}(x^{\alpha}) = \rho_0(x^{\alpha})u^{\alpha} = \rho_0(x^{\alpha})(c\gamma, \gamma \dot{\mathbf{x}}).$$
(6.102)

Hierbei wird die Ruhdichte $\rho_0(x^{\alpha})$ als Lorentz-Skalarfeld angenommen. Sie entspricht der Ladungsdichte im Ruhsystems des geladenen Körpers K', mit der Stromdichte

$$j^{\prime\alpha}(x^{\prime\alpha}) = (c\rho_0(x^{\prime\alpha}), 0), \quad \text{im Ruhsystem} .$$
(6.103)

Die Transformation vom Ruhsystem K' eines mit der Ladungsdichte $\rho_0(x'^{\alpha})$ geladenen Körpers auf ein System K, das sich diesem gegenüber mit der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}$ bewegt, hat also zwei Effekte:

1. Die Ladungsdichte in K wird zu $\gamma \rho_0(x^{\alpha})$: zunächst ändern sich natürlich die Variablen $x'^{\alpha} \to x^{\alpha}$. Weiterhin ändert sich die Ladungsdichte um den Skalierungsfaktor γ , d.h. die Ladungsdichte erscheint in K grösser als in K'. Gleichzeitig erscheint in K aber wegen der Lorentzkontraktion jedes Volumenelement um den Faktor $1/\gamma$ kleiner als in K'. Die Ladung als Ladungsdichte mal Volumen ist deshalb unverändert!

2. Im System K erscheint ein Konvektionsterm $\mathbf{j}(x^{\alpha})$ im räumlichen Anteil der Stromdichte, $\mathbf{j}(x^{\alpha}) = \gamma \rho_0(x^{\alpha}) \dot{\mathbf{x}}$, der wieder durch die vergrösserte Ladungsdichte $\gamma \rho_0(x^{\alpha})$ bestimmt ist. Insgesamt finden wir: die Stromdichte ist ein Vierervektor. Die Kontinuitätsgleichung schreibt sich

$$\partial_{\alpha}j^{\alpha} = 0, \tag{6.104}$$

in der Tat ist dieser Ausdruck als relativistisches Skalarprodukt von ∂_{α} und j^{α} ein Lorentzskalar, wie es sein muss, denn die Kontinuitätsgleichung muss ja in allen IS dieselbe Form haben.

6.8 Potentiale

(FLIESSBACH, RUDER) Wir erinnern uns an die Gleichungen Gl. (3.46) für die Potentiale der Elektrodynamik

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \ddot{\Phi} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{6.105}$$

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} = -\mu_0 \mathbf{j} \tag{6.106}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\Phi} = 0$$
, Lorenz-Eichung. (6.107)

Wir definieren für die Potentiale ein vierkomponentiges Vektorfeld (SI-Einheiten)

$$A^{\alpha} = \left(\frac{1}{c}\Phi, \mathbf{A}\right),\tag{6.108}$$

das folgende Gleichung erfüllt:

$$\Box A^{\alpha}(x) = \mu_0 j^{\alpha}(x), \quad \text{Kovariante Maxwellgleichungen für Potentiale}$$
(6.109)

wobei wir x abkürzend für die Komponenten x^{α} schreiben und $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$ sowie $j^{\alpha} = (c\rho, \mathbf{j})$ benutzen. Weiterhin wird der Operator

$$\Box \equiv \partial_{\alpha} \partial^{\alpha} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \quad \text{d'Alembert-Operator}$$
(6.110)

definiert. Wegen des relativistischen Skalarprodukts $\partial_{\alpha}\partial^{\alpha}$ ist der d'Alembert-Operator wieder ein Lorentzskalar, weiterhin ist die Stromdichte $j^{\alpha}(x)$ ein Vierervektor. Da Gl. (6.109) mit den in allen IS gültigen Maxwellgleichungen äquivalent ist, muss Gl. (6.109) in allen IS gelten und $A^{\alpha}(x)$ folglich ein Vierer-Vektorfeld sein. In der Lorenzeichung

$$\partial_{\alpha}A^{\alpha}(x) = 0 \tag{6.111}$$

ist $\partial_{\alpha} A^{\alpha}(x)$ damit ebenfalls ein Lorentzskalar, und die Lorenzeichung gilt äquivalent in allen IS.

6.8.1 Feldstärketensor

In einem zweiten Schritt geht man jetzt von den Potentialen zu den Feldern E und B,

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \dot{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}. \tag{6.112}$$

Hierfür definiert man den Feldstärketensor als einen Lorentztensor zweiter Stufe,

$$F^{\alpha\beta} \equiv \partial^{\alpha}A^{\beta} - \partial^{\beta}A^{\alpha}$$
, Feldstärketensor, (6.113)

wobei zu beachten ist, dass hier die kontravarianten Komponenten $F^{\alpha\beta}$ stehen und die Ableitungen $\partial^{\alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}$ nach den kovarianten Komponenten x_{α} sind:

$$\partial^{\alpha} = g^{\alpha\beta}\partial_{\beta} \rightsquigarrow \partial^{0} = \partial_{0} = \frac{\partial}{\partial ct}, \quad \partial^{i} = -\partial_{i} = -\frac{\partial}{\partial x^{i}}.$$
 (6.114)

Wir haben also die Komponenten

$$F^{01} = \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 = \frac{\partial}{\partial ct} A^1 + \frac{\partial}{\partial x^1} A^0 = -\frac{1}{c} (\mathbf{E})^1 \equiv -\frac{1}{c} E_x \qquad (6.115)$$

$$F^{02} = \partial^0 A^2 - \partial^2 A^0 = \frac{\partial}{\partial ct} A^2 + \frac{\partial}{\partial x^2} A^0 = -\frac{1}{c} (\mathbf{E})^2 \equiv -\frac{1}{c} E_y \tag{6.116}$$

$$F^{03} = \partial^0 A^3 - \partial^3 A^0 = \frac{\partial}{\partial ct} A^3 + \frac{\partial}{\partial x^3} A^0 = -\frac{1}{c} (\mathbf{E})^3 \equiv -\frac{1}{c} E_z$$
(6.117)

$$F^{12} = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 = -\frac{\partial}{\partial x^1} A^2 + \frac{\partial}{\partial x^2} A^1 = -(\operatorname{rot} \mathbf{A})^3 = -B_z \qquad (6.118)$$

$$F^{13} = \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 = -\frac{\partial}{\partial x^1} A^3 + \frac{\partial}{\partial x^3} A^1 = (\operatorname{rot} \mathbf{A})^2 = B_y$$
(6.119)

$$F^{23} = \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 = -\frac{\partial}{\partial x^2} A^3 + \frac{\partial}{\partial x^3} A^2 = -(\operatorname{rot} \mathbf{A})^1 = -B_x \qquad (6.120)$$

Alle anderen Komponenten folgen aus der *Antisymmetrie* des Feldstärketensors. Insbesondere sind seine Diagonalelemente Null,

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$
 (6.121)

Wegen der hier verwendeten SI-Einheiten bekommt man das etwas hässliche $\frac{1}{c}$ vor den Komponenten des elektrischen Feldes, was in cgs-Einheiten nicht auftreten würde.

Mit Hilfe des Feldstärketensors lassen sich jetzt zunächst die inhomogenen Maxwellgleichungen formulieren: Von Gl. (6.109), $\partial_{\beta}\partial^{\beta}A^{\alpha}(x) = \Box A^{\alpha}(x) = \mu_{0}j^{\alpha}(x)$ subtrahieren wir den Term

$$\partial_{\beta}\partial^{\alpha}A^{\beta}(x) = \partial^{\alpha}\partial_{\beta}A^{\beta}(x) = 0 \tag{6.122}$$

(Lorenz-Eichung) und erhalten

$$\partial_{\beta} \left(\partial^{\beta} A^{\alpha}(x) - \partial^{\alpha} A^{\beta}(x) \right) = \mu_0 j^{\alpha}(x).$$
(6.123)

Das bedeutet

$$\partial_{\beta}F^{\beta\alpha}(x) = \mu_0 j^{\alpha}(x), \quad (6.124)$$

und ausgeschrieben

$$\alpha = 0: \left(\frac{\partial}{\partial x^1} F^{10}(x) + \frac{\partial}{\partial x^2} F^{20}(x) + \frac{\partial}{\partial x^3} F^{30}(x)\right) = \mu_0 c \rho(x), \qquad (6.125)$$

also die Maxwellgleichung

div
$$\mathbf{E} = \mu_0 c^2 \rho(x) = \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}.$$
 (6.126)

Entsprechend erhalten wir aus den räumlichen Komponenten i = 1, 2, 3 von Gl. (6.124) die Maxwellgleichung (NACHRECHNEN)

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$
(6.127)

Die Gleichung Gl. (6.124) ist also äquivalent zu den beiden inhomogenen Maxwellgleichungen, d.h. den zwei Gleichungen mit Quelltermen (Gaußsches Gesetz sowie Amperesches Gesetz mit Ergänzungsstrom).

Die beiden homogenen Maxwellgleichungen ohne Quellterme (Abwesenheit magnetischer Monopole sowie Faradaysches Induktionsgesetz) lassen sich ebenfalls formal mit dem Feldstärketensor schreiben, und zwar in der Form

$$\partial_{\alpha} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta} = 0, \quad (6.128)$$

wobei $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ der Levi-Civita-Tensor ist mit $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = 1$, falls $\alpha\beta\gamma\delta$ eine gerade Permutation von 0123, $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -1$, falls $\alpha\beta\gamma\delta$ eine ungerade Permutation von 0123, und 0 sonst.

6.8.2 Transformation der Felder

Aus dem Transformationsverhalten

$$F^{\prime \alpha_1 \alpha_2} = \Lambda^{\alpha_1}_{\beta_1} \Lambda^{\alpha_2}_{\beta_2} F^{\beta_1 \beta_2} \tag{6.129}$$

des Feldstärketensors

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$
(6.130)

folgt die Transformation der Felder beim Übergang zwischen zwei gegeneinander bewegte Inertialsysteme K und K'. Wir betrachten z.B. eine Lorentztransformation für eine Bewegung von x parallel zu x',

$$\Lambda_{\beta_1}^{\alpha_1} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0\\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z\\ \frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y\\ \frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x\\ \frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$
(6.131)

Das führt auf

$$\frac{1}{c}E'_{x} = F'^{10} = \Lambda^{1}_{\beta_{1}}\Lambda^{0}_{\beta_{2}}F^{\beta_{1}\beta_{2}} = \Lambda^{1}_{0}\Lambda^{0}_{0}F^{00} + \Lambda^{1}_{0}\Lambda^{0}_{1}F^{01} + \Lambda^{1}_{1}\Lambda^{0}_{0}F^{10} + \Lambda^{1}_{1}\Lambda^{0}_{1}F^{11}$$

$$= \Lambda^{1}_{0}\Lambda^{0}_{1}F^{01} + \Lambda^{1}_{1}\Lambda^{0}_{0}F^{10} = (-\gamma\beta)^{2}\left(-\frac{1}{c}E_{x}\right) + \gamma^{2}\frac{1}{c}E_{x} = \gamma^{2}(1-\beta^{2})\frac{1}{c}E_{x}$$

$$= \frac{1}{c}E_{x}.$$
(6.132)

$$\frac{1}{c}E'_{y} = F'^{20} = \Lambda^{2}_{\beta_{1}}\Lambda^{0}_{\beta_{2}}F^{\beta_{1}\beta_{2}} = \Lambda^{2}_{2}\Lambda^{0}_{0}F^{20} + \Lambda^{2}_{2}\Lambda^{0}_{1}F^{21}
= \gamma \frac{1}{c}E_{y} - \gamma\beta B_{z}.$$
(6.133)

$$\frac{1}{c}E'_{z} = F'^{30} = \Lambda^{3}_{\beta_{1}}\Lambda^{0}_{\beta_{2}}F^{\beta_{1}\beta_{2}} = \Lambda^{3}_{3}\Lambda^{0}_{0}F^{30} + \Lambda^{3}_{3}\Lambda^{0}_{1}F^{31}
= \gamma^{1}_{c}E_{z} + \gamma\beta B_{y}.$$
(6.134)

$$B'_{x} = F'^{32} = \Lambda^{3}_{\beta_{1}}\Lambda^{2}_{\beta_{2}}F^{\beta_{1}\beta_{2}} = \Lambda^{3}_{3}\Lambda^{2}_{2}F^{32} = B_{x}$$
(6.135)

$$B'_{y} = F'^{13} = \Lambda^{1}_{\beta_{1}}\Lambda^{3}_{\beta_{2}}F^{\beta_{1}\beta_{2}} = \Lambda^{1}_{0}\Lambda^{3}_{3}F^{03} + \Lambda^{1}_{1}\Lambda^{3}_{3}F^{13}$$

$$= -\gamma\beta(-\frac{1}{c}E_{z}) + \gamma B_{y}$$
(6.136)

$$B'_{z} = F'^{21} = \Lambda^{2}_{\beta_{1}}\Lambda^{1}_{\beta_{2}}F^{\beta_{1}\beta_{2}} = \Lambda^{2}_{2}\Lambda^{1}_{0}F^{20} + \Lambda^{2}_{2}\Lambda^{1}_{1}F^{21}$$

$$= -\gamma\beta\frac{1}{c}E_{y} + \gamma B_{z}$$
(6.137)

Zusammengefasst also

$$E'_x = E_x \tag{6.138}$$

$$E'_y = \gamma E_y - \gamma c\beta B_z \tag{6.139}$$

$$E'_z = \gamma E_z + \gamma c\beta B_y \tag{6.140}$$

$$B'_x = B_x \tag{6.141}$$

$$B'_{y} = \gamma B_{y} + \gamma \beta \frac{1}{c} E_{z}$$
(6.142)

$$B'_{z} = \gamma B_{z} - \gamma \beta \frac{1}{c} E_{y}. \tag{6.143}$$

Hiervon diskutieren wir ein paar Spezialfälle:

6.8.2.1 **B** = 0, **E** = $(E_x, 0, 0)$ in K

Dieser Fall wird z.B. durch eine homogen geladenene Platte parallel zur *y-z*-Ebene erzeugt. Das einzige Feld im bewegten System K' ist $\mathbf{E}' = (E'_x, 0, 0)$.

6.8.2.2
$$\mathbf{B} = 0$$
, $\mathbf{E} = (0, 0, E_z)$ in K

In diesem Fall hat man

$$\mathbf{E}' = (0, 0, \gamma E_z), \quad \mathbf{B}' = (0, \gamma \frac{v}{c^2} E_z, 0). \tag{6.144}$$

Der Beobachter in K' sieht sowohl ein elektrisches als auch ein magnetisches Feld. Das elektrische Feld in K könnte z.B. durch eine unendlich grosse Platte mit Ladungsdichte σ parallel zur x-y-Ebene erzeugt werden, $E_z = \sigma/2\varepsilon_0$. Die Viererstromdichte in K ist $j^{\alpha} = (c\rho, 0)$ mit $\rho = \sigma\delta(z - z_0)$, wobei z_0 die Position der Platte ist. Dann ist in K' die Viererstromdichte $j'^{\alpha} = (c\gamma\rho, \gamma v\rho)$. Der Ladungsanteil $c\gamma\rho$ erzeugt das statische elektrische Feld $E'_z = \gamma E_z$ in z-Richtung. Die Ladungen bewegen sich, von K' aus gesehen, mit der Geschwindigkeit v und erzeugen deshalb die Konvektionsstromdichte $\gamma v\rho$, die wiederum in K' ein Magnetfeld B_y erzeugt (bewegte Ladungen erzeugen ein Magnetfeld), das in die y-Richtung zeigen muss. Die Stärke von B_y können wir mit dem Ampereschen Gesetz der Magnetostatik überprüfen,

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \rightsquigarrow 2B_y l = \mu_0 \int d^2 r \mathbf{j} = \mu_0 \gamma v l \int dz \rho(z) = \mu_0 \gamma v l \sigma \qquad (6.145)$$

$$\rightsquigarrow B_y = \frac{1}{2}\mu_0\gamma v\sigma = \mu_0\varepsilon_0\gamma vE_z = \gamma \frac{v}{c^2}E_z.$$
(6.146)

Hierbei haben wir über ein Stokessches Schleifchen der Breite l durch die geladene Platte $z = z_0$ integriert (SKIZZE), der Faktor 2 rührt von den zwei Seiten der Platte her.

6.8.2.3 **E** = 0, **B** = (B_x, B_y, B_z) in K

In K gebe es nur ein Magnetfeld **B**. In K' wird daraus ein Magnetfeld

$$\mathbf{B}' = (B_x, \gamma B_y, \gamma B_z). \tag{6.147}$$

Zusätzlich erscheint auch ein elektrisches Feld

$$\mathbf{E}' = (0, -\gamma c\beta B_z, \gamma c\beta B_y) = \gamma(v, 0, 0) \times (B_x, B_y, B_z) = \gamma \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$
(6.148)

das auch für kleine Geschwindigkeiten ($\gamma \rightarrow 1$) bestehen bleibt.

Eine in K' ruhende Ladung e erfährt in K' die 'rein elektrische' Kraft

$$\mathbf{F}' = e\mathbf{E}'.\tag{6.149}$$

Andererseits bewegt sich diese Ladung von K aus gesehen mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} und erfährt in K deshalb die 'rein magnetische' Kraft

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}.\tag{6.150}$$

Es gilt $\mathbf{F}' = \gamma \mathbf{F}$.

7. ELEKTRODYNAMIK ALS FELDTHEORIE

7.1 Euler-Lagrange-Gleichungen

7.1.1 Das Hamiltonsche Prinzip in der klassischen Mechanik

Aus diesem Prinzip werden die Lagrange-Gleichungen 2. Art der Mechanik wie folgt abgeleitet: Gegeben sei ein festes Zeitintervall $[t_1, t_2]$ und ein mechanisches System mit f Freiheitsgraden und Lagrangefunktion $L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$ mit dem Vektor der verallgemeinerten Koordinaten $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), ..., q_f(t))$. Üblicherweise ist in der klassischen, nichtrelativistischen Mechanik L = T - V die Differenz von kinetischer und potentieller Energie. Dann definieren wir das **Wirkungsfunktional**

$$S[\mathbf{q}] \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t), \quad \text{Wirkung(sintegral)}.$$
(7.1)

Dann besagt das Hamiltonsche Prinzip: Die Dynamik des mechanisches Systems in der Zeit von t_1 nach t_2 wird durch einen stationären Punkt $\mathbf{q}(t)$ der Wirkung beschrieben. Anders gesagt: Die Natur wählt die 'Bahn' $\mathbf{q}(t)$ derart, dass die zu dieser Bahn gehörige Wirkung extremal im Vergleich zu allen anderen benachbarten Bahnen $\mathbf{q}(t) + \varepsilon \mathbf{h}(t)$ wird, wobei immer $\mathbf{h}(t_1) = \mathbf{h}(t_2) = 0$ gelten muss, d.h. die Endpunkte werden festgehalten.

Es folgen aus der Stationarität des Wirkungsintegrals (MECHANIK-SKRIPT) die Lagrange-Gleichungen 2. Art

$$\delta S[\mathbf{q}] = 0, \quad \text{Hamiltonsches Prinzip}$$

$$\approx \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, ..., f, \quad \text{Lagrange-Gleichungen 2. Art.}$$
(7.2)

Das Hamiltonsche Prinzip ist ein Integralprinzip, in dem die Bahn des Systems zur Zeit tdurch die Wirkung für *alle* Zeiten $t \in [t_1, t_2]$ festgelegt wird, insbesondere also auch durch zukünftige Zeiten (SOMMERFELD): 'Das Hamiltonsche Prinzip ist scheinbar nicht kausal, sondern teleologisch'. Die Bahn folgt letztlich aber als Lösung der Lagrangegleichungen. Diese können als Anfangswertproblem (kausal, Orte und Geschwindigkeiten zur Zeit t_1 vorgeben) bzw. als Randwertproblem (Orte zu den zwei Zeiten t_1 und t_2 vorgeben) gelöst werden. Beide Problemarten werden vom Hamiltonschen Prinzip erfaßt.

7.1.2 Freies relativistisches Teilchen

Die Bewegungsgleichung eines freien relativistischen Teilchens mit Ruhmasse m lautet

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) = \frac{d}{dt}\frac{m\dot{\mathbf{x}}(t)}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}(t)^2/c^2}} = 0,$$
(7.4)

was sicher nicht aus der nichtrelativistischen Lagrange-Funktion

$$L_{\rm nr} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2\tag{7.5}$$

hergeleitet werden kann. Wir müssen $L_{\rm nr}$ so verallgemeinern, dass die Lagrange-Gleichungen 2. Art Gl. (7.4) ergeben. Eine Möglichkeit ist, die Lagrange-Funktion zu 'erraten': wir schreiben

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2/c^2} \rightsquigarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{d}{dt} \frac{m \dot{\mathbf{x}}(t)}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}(t)^2/c^2}} = 0,$$
(7.6)

wie es sein muss.

Wenn wir vom Wirkungsintegral

$$S[\mathbf{x}] \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt L(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t)$$
(7.7)

ausgehen, erkennen wir zunächst, dass dort über eine Zeitvariable t integriert wird, die sich auf ein bestimmtes Inertialsystem bezieht. Mit dem Übergang zur Eigenzeit τ schreibt sich das wegen $dt = \gamma d\tau$

$$S[\mathbf{x}] \equiv \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \gamma L(\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau), \tau), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2/c^2}}.$$
 (7.8)

(JACKSON) Damit die Wirkung S eine Lorentz-invariante Grösse ist, muss γL ein Lorentzskalar sein, denn $d\tau$ ist als Differential der Eigenzeit ein Lorentzskalar. Also setzen wir γL = konst. Die Konstante ist aus Dimensionsgründen eine Energie und muss ein Lorentzskalar sein, also fällt die Wahl auf mc^2 , was bis auf das Vorzeichen schon die Lagrangefunktion liefert:

$$\gamma L = -mc^2 \rightsquigarrow L = -mc^2 \sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2/c^2} \tag{7.9}$$

wie in Gl. (7.6). Das Wirkungsprinzip lautet für das freie, relativistische Teilchen also einfach wegen $-mc^2 = konst$

$$\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = 0, \tag{7.10}$$

es ist also ein Prinzip der extremalen Eigenzeit. Tatsächlich ist die Bahnkurve des freien Teilchens zwischen zwei gegebenen Orten x_1 , x_2 und Zeiten t_1 , t_2 ja eine Gerade, die eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit beschreibt. Für diese Bewegung ist die Eigenzeit maximal im Vergleich mit allen anderen Bahnen (FREDENHAGEN). Dass sie maximal ist, sieht man z.B. am Spezialfall $x_1 = x_2$: Die Eigenzeit eines ruhenden Beobachters ist stets grösser als die Eigenzeit eines 'Zwillings'-Beobachters, der sich im gleichen Zeitraum von x_1 wegbewegt und dann wieder bei x_2 ankommt ('Zwillings-Paradoxon').

7.1.3 Teilchen im elektromagnetischen Feld

Die potentielle Energie $V(\mathbf{x}, t)$ einer Ladung e im Potential $\Phi(\mathbf{x}, t)$ ist $V = e\Phi(\mathbf{x}, t)$, und eine entsprechende nichtrelativistische Lagrangefunktion ist

$$L_{\rm nr} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - e\Phi(\mathbf{x}, t).$$
 (7.11)

Wiederum sollte im Wirkungsintegral $S = \int d\tau \gamma L$ der Ausdruck γL ein Lorentzskalar sein. Das Potential Φ ist bis auf den Faktor c die zeitliche Komponente des Viererpotentials A^{α} , deshalb ersetzen wir den nicht Lorentzinvarianten Term

$$-e\Phi = -ecA^0 \to -eu_{\alpha}A^{\alpha}, \tag{7.12}$$

d.h. durch das kovariante Skalarprodukt der Vierergeschwindigkeit mit dem Vierer-Potential. Die Lagrange-Funktion wird dann, zusammen mit dem Term für die freie Bewegung (A^{α})

$$L = -mc^{2}\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^{2}/c^{2}} - e\frac{1}{\gamma}u_{\alpha}A^{\alpha} = -mc^{2}\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^{2}/c^{2}} - e\Phi(\mathbf{x}, t) + e\dot{\mathbf{x}}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \quad (7.13)$$

(hierbei hat sich das $1/\gamma$ gegen das γ aus der Vierergeschwindigkeit u_{α} gekürzt). Diese Form

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2/c^2} - e\Phi(\mathbf{x}, t) + e\dot{\mathbf{x}}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$$
(7.14)

führt über die Euler-Lagrange-Gleichungen (NACHRECHNEN) auf die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{m \dot{\mathbf{x}}(t)}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}(t)^2/c^2}} = \mathbf{F}_L(\mathbf{x}, t)$$
(7.15)
$$\mathbf{F}_L(\mathbf{x}, t) = e(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{x}}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)).$$
(7.16)

mit der Lorentz-Kraft $\mathbf{F}_L(\mathbf{x}, t)$, wie es sein muss.

7.1.4 Die Lorentz-Kraft

Tatsächlich ist die korrekte Form der Lorentz-Kraft, also der Kraft auf eine bewegte Punktladung im elektromagnetischen Feld, gar keine so ganz triviale Angelegenheit. Insbesondere unsere Diskussion der relativistischen Minkowskikraft und der zugehörigen Newtonschen Kraft lassen zunächst die Frage aufkommen, ob im relativistischen Fall z.B. noch irgendwelche Faktoren γ in die Definiton der Lorentz-Kraft $\mathbf{F}_L(\mathbf{x}, t)$ hineinmüssen. Das ist allerdings nicht der Fall, Gl. (7.15) ist relativistisch korrekt. Im Sinne der obigen Unterscheidung zwischen Minkowskikraft und Newtonscher Kraft, Gl. (6.82), ist die Lorentz-Kraft eine Newtonsche Kraft. Wieso ist Gl. (7.15) relativistisch korrekt? RUDER gehen z.B. von einer im Inertialsytem K' ruhenden Ladung e aus, auf die ein elektrisches Feld \mathbf{E}' wirkt. Durch Transformation zwischen K' und einem relativ hierzu bewegten System ergibt sich über den Umweg von Newton- und Minkowskikraft die korrekte Lorentz-Kraft, allerdings in etwas unbefriedigender Weise, denn am Schluss wird ein Magnetfeld-Term ($\mathbf{v} \times \mathbf{B}$) addiert, der sowieso Null ist.

Man geht besser folgendermassen vor: Gl. (7.15) ist der räumliche Anteil der kovarianten Gleichung (in Eigenzeit τ)

$$m\frac{du^{\alpha}}{d\tau} = eF^{\alpha\beta}u_{\beta},\tag{7.17}$$

denn der räumliche Anteil der linken Seite hiervon ist (in Inertialzeit t) $m\gamma \frac{d}{dt}(\gamma \dot{\mathbf{x}})$, und der räumliche Anteil der rechten Seite ist wegen $u_{\beta} = \gamma(c, -\mathbf{v})$ und der Definition von $F^{\alpha\beta}$

$$\alpha = 1 : eF^{1\beta}u_{\beta} = \gamma(\frac{1}{c}E_xc + B_zv_y - B_yv_z) = \gamma[E_x + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x]$$
(7.18)

$$\alpha = 2 : eF^{2\beta}u_{\beta} = \gamma(\frac{1}{c}E_yc - B_zv_x + B_xv_z) = \gamma[E_y + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_y]$$
(7.19)

$$\alpha = 3: eF^{3\beta}u_{\beta} = \gamma(\frac{1}{c}E_zc + B_yv_x - B_xv_y) = \gamma[E_y + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_z].$$
(7.20)

Der Faktor γ kürzt sich also gerade heraus und wir erhalten genau Gl. (7.15) (in Inertialzeit). Da wir Gl. (7.15) aus dem Hamiltonschen Wirkungsprinzip mit einer kovarianten Lagrangefunktion hergeleitet haben, ist sichergestellt, dass wir die relativistisch korrekte Form haben. Man sieht das auch direkt daran, dass Gl. (7.17) eine kovariante Gleichung ist, denn beide Seiten transformieren sich wie Vierervektoren. Insbesondere können wir uns in das Ruhsystem K' der Punktladung transformieren (FLIESSBACH). Dort ist die momentane Vierergeschwindigkeit $u'_{\beta} = (c, 0, 0, 0), \gamma = 1$, und der räumliche Anteil der Bewegungsgleichung Gl. (7.17) wird zu

$$m\frac{d^2}{dt'^2}\mathbf{x}'(t') = e\mathbf{E}'(\mathbf{x}', t').$$
(7.21)

Diese Gleichung war der Ausgangspunkt des Elektromagnetismus sowie die Definition des elektrischen Feldes: auf eine ruhende Punktladung wirkt eine Kraft, die durch das Produkt von Ladung und elektrischer Feldstärke am Ort der Ladung gegeben ist.

7.2 Hamiltonsches Prinzip und Lagrange-Dichte für Felder

Der Lagrangeformalismus für ein mechanisches System mit $f < \infty$ Freiheitsgraden lässt sich auf 'kontinuierliche' Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden erweitern. Wir diskutieren das an folgendem Beispiel.

7.2.1 Wellengleichung eines elastischen Stabs

(GOLDSTEIN, MECHANIK) Wir betrachten die Bewegung von Massen m im gleichen Abstand a entlang der x-Achse, die durch masselose Federn mit Federkonstante k gekoppelt sind. Die Bewegungsgleichung für die Auslenkung u_i der i-ten Masse lautet (AUFGABE)

$$m\ddot{u}_i = k(u_{i+1} - u_i) - k(u_i - u_{i-1}).$$
(7.22)

Wir fassen die Auslenkung u jetzt als (stetige und differenzierbare) Funktion von x mit kontinuierlichem x anstelle des diskreten i auf. Die Funktion u(x) ist also ein (skalares) *Feld.* Aus der obigen Beschreibung anzählbar vieler Freiheitsgrade i wird jetzt eine *Feldtheorie*, der eine einzige Funktion u(x), das Feld, zugrunde liegt. Konkret haben wir also den Übergang

$$u_{i} \rightarrow u(x), \quad u_{i+1} \rightarrow u(x+a), \quad u_{i-1} \rightarrow u(x-a)$$
$$u_{i+1} - 2u_{i} + u_{i-1} \rightarrow u(x+a) - 2u(x) + u(x-a) = a^{2}u''(x) + O(a^{3}), \quad (7.23)$$

d.h.

$$\lim_{a \to 0} \frac{u(x+a) - 2u(x) + u(x-a)}{a^2} = u''(x).$$
(7.24)

Aus den gekoppelten Bewegungsgleichungen der unendlich vielen Oszillatoren wird eine einzige partielle Differentialgleichung, nämlich die Wellengleichung des elastisches Stabes

$$\ddot{u}_{i} = \frac{ka^{2}}{m} \frac{u_{i+1} - 2u_{i} + u_{i-1}}{a^{2}}$$
$$\rightsquigarrow \frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}} u(x,t) = c^{2} \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} u(x,t), \quad c^{2} = \lim_{a \to 0} \frac{ka^{2}}{m}, \quad (7.25)$$

wobei sich k und m so verhalten müssen, dass der Limes $c^2 = \lim_{a \to 0} \frac{ka^2}{m}$ existiert. Hierzu definieren wir

$$\mu \equiv \frac{m}{a}$$
, Massendichte (7.26)

$$Y \equiv ka$$
, Young-Modul. (7.27)

Die Schallgeschwindigkeit wird also

$$c^2 = \frac{Y}{\mu}.\tag{7.28}$$

Die zu den Bewegungsgleichungen Gl. (7.22) gehörige Lagrangefunktion L lautet

$$L = \sum_{i} a \left[\frac{1}{2} \frac{m}{a} \dot{u}_{i}^{2} - \frac{1}{2} ka \left(\frac{u_{i+1} - u_{i}}{a} \right)^{2} \right].$$
(7.29)

Wieder sind wir am Limes $a \to 0$ interessiert, in dem die Summe \sum_i in ein Integral übergeht,

$$\lim_{a \to 0} L = \int dx \mathcal{L} \tag{7.30}$$

$$\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}Y \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2, \quad \text{Lagrangedichte.}$$
(7.31)

In den Bewegungsgleichungen Gl. (7.22) kann man für die 'Ränder', z.B. i = 0 und i = N für N Massen, spezifizieren und dann eine endliche Länge L im Kontinuumslimes des elastischen Stabes einführen. Das Integral über die Lagrangedichte erstreckt sich dann z.B. von 0 bis L.

Die Lagrangedichte \mathcal{L} ist ein Funktional des Feldes u(x). Es erhebt sich jetzt die Frage, wie wir das Hamiltonsche Prinzip und die Euler-Lagrange-Gleichungen direkt auf solche Lagrangedichten anwenden können.

7.2.2 Funktionale und Variationsableitungen

Wir definieren das zunächst relativ allgemein (VOGELSANG, VL Göttingen 1988), um z.B. später auch die Maxwell- Gleichungen oder die Schrödinger-Gleichung aus einem Variationsprinzip herleiten zu können: Statt eines skalaren Feldes u(x) betrachten wir allgemeiner Vektorfelder, d.h. vektorwertige Funktionen $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, d.h. m Funktionen $(u_1(\mathbf{x}), ..., u_m(\mathbf{x}))$ mit $u_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (sprechen aber trotzdem noch salopp von 'Funktion'). Das Wirkungsintegral $S = \int dt L = \int dt \int dx \mathcal{L}$ schreiben wir als ein Integral über ein Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^n$,

$$S[\mathbf{u}] \equiv \int_{\Omega} d^{n} \mathbf{x} \mathcal{L}(\mathbf{x}, u_{1}(\mathbf{x}), ..., u_{m}(\mathbf{x}), \nabla u_{1}(\mathbf{x}), ..., \nabla u_{m}(\mathbf{x}))$$
(7.32)

mit einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion \mathcal{L} als Integrand und einmal stetig differenzierbarem $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Hierbei ist

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad n = d+1 \tag{7.33}$$

mit *d* räumlichen und einer zeitlichen Dimension. Der Fall d = 0, $\mathbf{x} = t$, $\nabla = \frac{\partial}{\partial t}$ entspricht also z.B. der 'herkömmlichen' Lagrangefunktion der Mechanik mit *m* diskreten Freiheitsgrade.

Das Integral $S[\mathbf{u}]$ wird als **Funktional** aufgefaßt: jeder Funktion $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ wird eine reelle Zahl $S[\mathbf{u}]$ zugeordnet.

Definition Das Argument $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ werde ein wenig variiert, d.h. $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \to \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{h}(\mathbf{x})$ mit $\epsilon > 0$ und $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), ..., h_m(\mathbf{x}))$. Dann heißt

$$\delta S_{\mathbf{u}}[\mathbf{h}] \equiv \left. \frac{d}{d\varepsilon} S[\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{h}] \right|_{\varepsilon = 0} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{S[\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{h}] - S[\mathbf{u}]}{\varepsilon}$$
(7.34)

die 1. Variation von S im Punkt **u** in Richtung $\mathbf{h}(\mathbf{x})$.

Grob hat man folgende Analogie (vgl MM zur Richtungsableitung):

- Function $f(\mathbf{x})$ Functional $S[\mathbf{u}]$
- Punkt **x** ist ein Vektor $\in \mathbb{R}^n$ | Punkt **u** ist eine Funktion
- Gradient $\nabla f(\mathbf{x})$ (als lineares Functional) 1. Variation $\delta S_{\mathbf{u}}$ (als lineares Functional)

Richtungsableitung $\mathbf{v}\nabla f(\mathbf{x})$ in Richtung \mathbf{v} 1. Variation $\delta S_{\mathbf{u}}[\mathbf{h}]$ in Richtung \mathbf{h} .

Definition Die Funktion $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ heißt stationärer Punkt des Funktionals S[u], wenn $\delta S_{\mathbf{u}}[\mathbf{h}] = 0$ für alle $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, die auf dem Rand des Gebiets Ω verschwinden.

Satz 14. Ein stationärer Punkt $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ des Funktionals S[u] genügt den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_{k}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{1,k}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{1}} = 0$$

... = ...
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_{k}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{m,k}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{m}} = 0, \quad u_{i,k} \equiv \frac{\partial u_{i}}{\partial x_{k}}.$$
 (7.35)

Beweis: wir betrachten zunächst m = 1, d.h. $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x})$,

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} S[u_1 + \varepsilon h_1] \bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\Omega} d^n \mathbf{x} \mathcal{L}(\mathbf{x}, u_1 + \varepsilon h_1, \nabla u_1 + \varepsilon \nabla h_1) \bigg|_{\varepsilon=0}$$
$$= \int_{\Omega} d^n \mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} h_1 + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{1,k}} \frac{\partial h_1}{\partial x_k} \right)$$
$$= \int_{\Omega} d^n \mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{1,k}} \right) \right) h_1, \text{ part. Int., } h_1 = 0 \text{ auf dem Ran}(\overline{u}.36)$$

Da das für beliebige $h_1(\mathbf{x})$ gelten muss, folgt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{1,k}} \right) = 0.$$
(7.37)

Für m > 1 geht das entsprechend, nur hat man da eine Summe über die m verschiedenen h_i , und es folgen die Euler-Lagrange-Gleichungen Gl. (7.35). Ende des Beweises. Die hier vorgestellten Ableitungen sind Teil der **Variationsrechnung** in der Mathematik.

7.2.2.1 Spezialfall n = 1 ('nulldimensionale Feldtheorie')

Im Spezialfall n = 1, also d = 0, wo $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(t)$ eine einparametrige Kurve im \mathbb{R}^m ist, lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_{1}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{1}} = 0$$

$$\dots = \dots$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_{m}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{m}} = 0, \quad \dot{u}_{i} \equiv \frac{\partial u_{i}}{\partial t}.$$
(7.38)

Wie bereits oben erwähnt sind das die 'herkömmlichen' Euler-Lagrange-Gleichungen eines Systems mit m diskreten Freiheitsgraden.

7.2.2.2 Spezialfall n = d + 1, m = 1 (d-dimensionale Feldtheorie, skalares Feld)

Hier gibt es wegen m = 1 nur eine Komponente $u = u_1$ des Feldes, also einzige Gleichung, nämlich

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u}{\partial x_k}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0.$$
(7.39)

Wenn wir $x_n = t$ als zeitliche und $x_1, ..., x_d$ mit d = n - 1 als räumliche Variablen bezeichnen, erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} + \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_{i}}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u}{\partial x_{i}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0, \quad \text{Euler-Lagrange-Gl. (Skalarfeld).}$$
(7.40)

AUFGABE: Leite daraus die Wellengleichung $\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$ des eindimensionalen Stabes mit Lagrangedichte $\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}Y \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2$ her.

7.3 Lagrangedichte für das elektromagnetische Feld

7.3.1 Elektrostatik

Wir kennen die Energiedichte eines elektrostatischen Feldes $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, das von einem Potential $\Phi(\mathbf{r})$ erzeugt wird,

$$w_{\rm el}(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2.$$
(7.41)

Ist zusätzlich eine Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ vorhanden, so hat diese im Potential eine potentielle Energiedichte $\rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})$. Als Ansatz für eine Lagrangefunktion im elektrostatischen Falle nehmen wir

$$L_{\rm ES} \equiv \int d^3 \mathbf{r} \mathcal{L}_{\rm ES}(\mathbf{r}), \quad \mathcal{L}_{\rm ES}(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2} (\nabla \Phi(\mathbf{r}))^2 - \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}).$$
(7.42)

Hier liegt also nur ein skalares Feld $\Phi(\mathbf{r})$ vor, und die Euler-Lagrange-Gleichungen Gl. (7.40) ergeben mit den Ableitungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\rm ES}}{\partial \Phi} = -\rho, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{\rm ES}}{\partial \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} = \frac{\varepsilon_0}{2} 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = -\varepsilon_0 E_i \tag{7.43}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_{i}} \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{ES}}}{\partial \frac{\partial \Phi}{\partial x_{i}}} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{ES}}}{\partial \Phi} \rightsquigarrow \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_{0}}.$$
(7.44)

Wir erhalten also die erste Maxwellsche Gleichung, d.h. das Gaußsche Gesetz der Elektrostatik.

7.3.2 Magnetostatik

Analog zur Elektrostatik nehmen die Energiedichte des magnetostatischen Feldes $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, das von einem Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ erzeugt wird,

$$w_{\rm m}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}(\mathbf{r})|^2.$$
 (7.45)

Ist zusätzlich eine Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ vorhanden, so fügen wir analog zum Ansatz für $L_{\rm ES}$ einen Kopplungsterm hinzu und setzen

$$L_{\rm m} \equiv \int d^3 \mathbf{r} \mathcal{L}_{\rm m}(\mathbf{r}), \quad \mathcal{L}_{\rm m}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}))^2 - \mathbf{j}(\mathbf{r}) \mathbf{A}(\mathbf{r}).$$
(7.46)

Die Euler-Lagrange-Gleichungen Gl. (7.40) ergeben sich aus

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{m}}}{\partial \frac{\partial A_1}{\partial x_i}} = -\frac{1}{\mu_0} \partial_y B_z + \frac{1}{\mu_0} \partial_z B_y = -\frac{1}{\mu_0} (\mathrm{rot} \mathbf{B})_x$$
(7.47)

$$\rightsquigarrow (\mathrm{rot}\mathbf{B})_x = \mu_0 j_x \tag{7.48}$$

und entsprechend erhält man mit den y- und z-Komponenten

$$rot \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \tag{7.49}$$

also die Maxwellsche Gleichung (das Amperesche Gesetz) ohne Verschiebungsstrom, der in der Magnetostatik ja nicht auftritt.

7.3.3 Elektrodynamik

Jetzt wollen wir die Lagrangedichte für die vollen Maxwellschen Gleichungen. Zunächst schreiben wir alles mit Potentialen Φ und \mathbf{A} , die wir als die unabhängigen Felder in unserer Feldtheorie auffassen

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \dot{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{A}}. \tag{7.50}$$

Der elektrische Anteil wird durch eine Energiedichte

$$w_{\rm el}(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\nabla \Phi + \dot{\mathbf{A}} \right)^2 \tag{7.51}$$

beschrieben, ansonsten sollte sich an den einzelnen Termen nichts ändern. Es fragt sich nur, wie wir $\mathcal{L}_{\rm ES}$ und $\mathcal{L}_{\rm m}$ zusammenbauen sollen. Als erstes würde man daran denken, die beiden Terme zu addieren

$$\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\nabla \Phi + \dot{\mathbf{A}} \right)^2 + \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \rho \Phi - \mathbf{j}\mathbf{A}, \quad \text{falsch} .$$
(7.52)

Daraus ergibt sich allerdings nicht die korrekte Maxwellsche Gleichung rot $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, sondern rot $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ (s. unten)! Wir erkennen allerdings bereits in der falschen Lagrangedichte, dass der Term $-(\rho \Phi + \mathbf{j} \mathbf{A})$ nicht dem relativistischen Skalarprodukt $j^{\alpha} A_{\alpha}$ entspricht, in dem die beiden Terme $\rho \Phi$ und $\mathbf{j} \mathbf{A}$ ein entgegengesetztes Vorzeichen haben müssen. Wir benutzen deshalb eine Lagrangedichte, die die *Differenz* eines elektrischen und eines magnetischen Beitrags ist;

$$\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\nabla \Phi + \dot{\mathbf{A}} \right)^2 - \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \rho \Phi + \mathbf{j} \mathbf{A}.$$
(7.53)

Für die Euler-Lagrange-Gleichungen Gl. (7.40) benötigen wir Ableitungen, zunächst für die Φ-Komponenten;

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = -\rho, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + 2\dot{A}_i \right) = -\varepsilon_0 E_i \tag{7.54}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \rightsquigarrow \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
(7.55)

wie oben in der Elektrostatik, d.h. wir bekommen wieder die erste Maxwellsche Gleichung aus den Φ -Komponenten. Für die **A**-Komponenten ergibt sich analog zur Rechnung in der Magnetostatik

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_k} = -j_k \tag{7.56}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial A_1}{\partial x_1}} = 0, \quad \mu_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial A_1}{\partial x_2}} = \frac{\partial A_1}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1} = -B_z, \quad \mu_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial A_1}{\partial x_3}} = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} = B_y$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_1} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(2\dot{A}_1 + 2\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) = -\varepsilon_0 E_x \tag{7.57}$$

(7.58)

Aus der Euler-Lagrange-Gleichungen für die A_1 -Komponente wird also

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A_1}} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial A_1}{\partial x_i}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_1}$$
(7.59)

$$\rightarrow -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_x - \frac{1}{\mu_0} (\operatorname{rot} \mathbf{B})_x = -j_x,$$
 (7.60)

also genau die x-Komponente der Maxwellschen Gleichung

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$
 (7.61)

Entsprechend überprüft man natürlich die y- und z-Komponente.

Wir haben also aus der Lagrangedichte Gl. (7.53) über die Euler-Lagrange-Gleichungen die zwei 'inhomogenen' Maxwellschen Gleichungen (mit Quelltermen) reproduziert. Wir

merken an, dass wir mit der falschen Lagrangedichte Gl. (7.52) wegen $\mu_0 \rightarrow -\mu_0$ und $\mathbf{j} \rightarrow -\mathbf{j}$ wie bereits erwähnt die falsche Gleichung rot $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ bekommen würden.

Was ist schliesslich mit den beiden anderen Maxwellgleichungen? Die folgen aus der Definition der Felder, denn aus $\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \dot{A}$, $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{B}$ folgt

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{A} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0.$$
(7.62)

Damit haben wir die Maxwellschen Gleichungen erfolgreich aus dem Lagrangeformalismus für Felder rekonstruiert.

7.3.4 Lagrangedichte und Feldstärketensor

Wir können den Anteil

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2 \tag{7.63}$$

der Lagrangedichte ${\mathcal L}$ zunächst mit Hilfe des Feldstärketensors ausdrücken, denn

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2 = \frac{1}{2\mu_0} \left[\frac{1}{c^2}\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 \right]$$
$$= \frac{1}{4\mu_0} \left[(F^{01})^2 + (F^{02})^2 + (F^{03})^2 + (F^{10})^2 + (F^{20})^2 + (F^{30})^2 - (F^{12})^2 - (F^{23})^2 \right], (7.64)$$

wobei wir das gleich so symmetrisch geschrieben haben, dass alle Indexkombinationen vorkommen. Wegen

$$F^{0i} = -F_{0i}, \quad F^{ij} = F_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3$$
(7.65)

(Runterziehen der Indizes mit dem metrischen Tensor) schreiben wir auch

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2 = -\frac{1}{4\mu_0}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta},\tag{7.66}$$

denn in der Summe tragen die Diagonalterme wegen $F^{\alpha\alpha} = 0$ nichts bei.

Weiterhin benutzen wir die Definitionen der Viererstromdichte und des Viererpotentials,

$$j^{\alpha} = (c\rho, \mathbf{j}), \quad A^{\alpha} = (\frac{1}{c}\Phi, \mathbf{A}) \rightsquigarrow j^{\alpha}A_{\alpha} = \rho\Phi - \mathbf{j}\mathbf{A},$$
 (7.67)

was auf das bereits erwähnte relativistisch invariante Skalarprodukt führt, das in die Lagrangedichte eingeht. Insgesamt haben wir damit die Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes in Anwesenheit von Ladungen und Strömen in manifest kovarianter Form, und zwar als

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - j^{\alpha} A_{\alpha}.$$
 (7.68)

AUFGABE: zeige, dass aus $\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} - j^{\alpha}A_{\alpha}$ die Gleichung Gl. (6.124), $\partial_{\beta}F^{\beta\alpha}(x) = \mu_0 j^{\alpha}(x)$, folgt.

7.3.5 Lagrangefunktion für Felder und Materie

Jetzt wollen wir zum Schluss die gesamte Lagrangefunktion für sowohl die elektromagnetischen Felder als auch die Materie (geladene Punktteilchen), die ja miteinander gekoppelt sind, aufstellen. Das ist nun nicht mehr schwer, da wir alles beisammen haben: Die Lagrangefunktion für N Teilchen im elektromagnetischen Feld ist die Verallgemeinerung von Gl. (7.14), d.h.

$$L_{\text{Materie-Feld}} = \sum_{i=1}^{N} \left[-m_i c^2 \sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}_i^2 / c^2} - e_i \Phi(\mathbf{x}_i, t) + e_i \dot{\mathbf{x}}_i \mathbf{A}(\mathbf{x}_i, t) \right]$$
(7.69)

$$= -\sum_{i=1}^{N} m_i c^2 \sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}_i^2 / c^2} + \int d^3 \mathbf{r} \left[-\rho(\mathbf{r}, t) \Phi(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right]$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) \equiv \sum_{i=1}^{N} e_i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{x}_i(t)), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \equiv \sum_{i=1}^{N} e_i \dot{\mathbf{x}}_i(t) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{x}_i(t)). \tag{7.70}$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt die Ladungsdichte und die Stromdichte explizit durch die Teilchenkoordinaten $\mathbf{x}_i(t)$, die Teilchengeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{x}}_i(t)$ und die Ladungen e_i ausgedrückt. Wir erkennen in dem zweiten Term $\int d^3 \mathbf{r} \left[-\rho \Phi + \mathbf{j} \mathbf{A}\right]$ den Anteil $j^{\alpha} A_{\alpha}$ aus der Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes Gl. (7.53) wieder. Dieser Term beschreibt also gerade die Kopplung der Materie an die Felder! Als Lagrangefunktion des Systems Felder+Materie haben wir deshalb

$$L = -\sum_{i=1}^{N} m_i c^2 \sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}_i^2 / c^2} + \int d^3 \mathbf{r} \left[\frac{\varepsilon_0}{2} \left(\nabla \Phi + \dot{\mathbf{A}} \right)^2 - \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \rho \Phi + \mathbf{j} \mathbf{A} \right]$$
(7.71)

mit den in Gl. (7.69) definierten Ladungsdichten ρ und Stromdichten **j**. Wieder können wir das mit dem Feldstärketensor umschreiben und erhalten mit Gl. (7.72)

$$L = -\sum_{i=1}^{N} m_i c^2 \sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}_i^2 / c^2} + \int d^3 \mathbf{r} \left[-\frac{1}{4\mu_0} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - j^{\alpha} A_{\alpha} \right].$$
(7.72)

Diese Lagrangefunktion ist ein Funktional der Teilchenorte und Geschwindigkeiten sowie der Potentiale A^{α} und ihrer Ableitungen $\partial^{\beta} A^{\alpha}$,

$$L = L[\mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_i; A^{\alpha}, \partial^{\beta} A^{\alpha}].$$
(7.73)

Wie wir bereits nachgerechnet haben, führt das Hamiltonsche Prinzip mit dieser Lagrangefunktion L also auf die Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{m_i \dot{\mathbf{x}}_i}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}_i^2/c^2}} = e_i(\mathbf{E}(\mathbf{x}_i, t) + \dot{\mathbf{x}}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_i, t))$$
(7.74)

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{7.75}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{7.76}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$
(7.77)

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{7.78}$$

also auf die Maxwellschen Gleichungen für das elektromagnetische Feld und die relativistisch korrekte Bewegungsgleichungen für die geladenen Punktmassen m_i , auf die die Lorentzkraft wirkt.

7.4 Das Prinzip der Eichinvarianz

7.4.1 Schrödingergleichung mit Elektromagnetischen Potentialen

Wir erinnern uns zunächst, daß sich das elektromagnetische Feld der Maxwellschen Gleichungen mit Hilfe eines skalaren Potentials $\Phi = \Phi(\mathbf{x}, t)$ und eines Vektorpotentials $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ schreiben läßt als

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad \operatorname{Magnetfeld}$$
(7.79)

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}, \quad \text{Elektrisches Feld} , \qquad (7.80)$$

wobei $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ dreidimensionale Vektorfelder sind. Die Potentiale sind allerdings nicht eindeutig festgelegt: \mathbf{E} und \mathbf{B} sind invariant unter **Eichtransformationen**,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x},t) + \nabla \chi(\mathbf{x},t)$$
 (7.81)

$$\Phi(\mathbf{x},t) \rightarrow \Phi(\mathbf{x},t) - \frac{\partial}{\partial t}\chi(\mathbf{x},t),$$
(7.82)

wobei $\chi(\mathbf{x}, t)$ eine beliebige (differenzierbare) skalare Funktion sein kann, was man direkt durch Einsetzen nachprüft (AUFGABE). In der *klassischen Mechanik* baut man **E** und **B** in die Hamiltonfunktion *H* eines freien Teilchens mit Masse *m* und Ladung *e* ein durch die Ersetzungsvorschrift

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \to H = \frac{(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t))^2}{2m} + e\Phi(\mathbf{x}, t), \tag{7.83}$$

was über die Hamiltonschen Gleichungen zu den korrekten Newtonschen Gleichungen mit der Lorentzkraft führt,

$$m\ddot{\mathbf{x}} = e\left(\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}\right), \quad \text{Lorentzkraft.}$$
 (7.84)

Man sagt, die Newtonschen Gleichungen sind *eichinvariant*, da in ihnen nur \mathbf{E} und \mathbf{B} auftreten und sie sich unter Eichtransformationen, Gl. (7.81), nicht ändern. Diese *Eichinvarianz* wird in der QM eine noch größere Rolle spielen (s.u.).

Definition Die Ersetzungsvorschrift

$$\mathbf{p} \to \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}$$
 (7.85)

heißt minimale Kopplung.

Über das Korrespondenzprinzip

$$\mathbf{p} \to \frac{\hbar}{i} \nabla$$
 (7.86)

erhalten wir den quantenmechanischen Hamiltonoperator für die Schrödingergleichung eines Teilchens mit Masse m und Ladung e im elektromagnetischen Feld,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}\Psi = \left\{\frac{(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2}{2m} + e\Phi\right\}\Psi.$$
(7.87)

Für $\mathbf{A} = 0$ kennen wir das bereits als SG eines Teilchens im (skalaren) Potential $V(\mathbf{x}, t) = e\Phi(\mathbf{x}, t)$, wobei wir bisher nur zeitunabhängige Potentiale $V(\mathbf{x})$ betrachtet haben.

Was wird aus der Eichinvarianz in der QM? Wir beweisen folgenden

Satz 15. Die Schrödingergleichung Gl. (7.87) eines Teilchens mit Masse m und Ladung e im elektromagnetischen Feld ist invariant unter

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x},t) + \nabla \chi(\mathbf{x},t)$$
 (7.88)

$$\Phi(\mathbf{x},t) \rightarrow \Phi(\mathbf{x},t) - \frac{\partial}{\partial t}\chi(\mathbf{x},t)$$
 (7.89)

$$\Psi(\mathbf{x},t) \quad \to \quad \Psi(\mathbf{x},t)e^{i\frac{e}{\hbar}\chi(\mathbf{x},t)},\tag{7.90}$$

wobei $\chi(\mathbf{x}, t)$ eine differenzierbare skalare Funktion ist.

Zum Beweis müssen wir zeigen, daß die umge
eichte WF $\Psi({\bf x},t)e^{i\frac{e}{\hbar}\chi({\bf x},t)}$ die umgeeichte SG

$$\left\{\frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A} - e\nabla\chi)^2}{2m} + e\Phi - e\left(\frac{\partial}{\partial t}\chi\right)\right\}\Psi e^{i\frac{e}{\hbar}\chi} - i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi e^{i\frac{e}{\hbar}\chi}\right) = 0$$
(7.91)

erfüllt, wobei $\Psi(\mathbf{x},t)$ die ursprüngliche SG Gl. (7.87) erfüllt. Hierzu ist nach der Produktregel

$$(\mathbf{p} - e\mathbf{A} - e\nabla\chi)\Psi e^{i\frac{e}{\hbar}\chi} = (\frac{\hbar}{i}\nabla - e\mathbf{A} - e\nabla\chi)\Psi e^{i\frac{e}{\hbar}\chi}$$

$$= e^{i\frac{e}{\hbar}\chi}(\frac{\hbar}{i}\nabla - e\mathbf{A} - e\nabla\chi)\Psi + (\frac{\hbar}{i}\nabla\frac{ie}{\hbar}\chi)\Psi e^{i\frac{e}{\hbar}\chi} = e^{i\frac{e}{\hbar}\chi}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})\Psi \quad (7.92)$$

$$\rightsquigarrow (\mathbf{p} - e\mathbf{A} - e\nabla\chi)^{2}\Psi e^{i\frac{e}{\hbar}\chi} = (\mathbf{p} - e\mathbf{A} - e\nabla\chi)e^{i\frac{e}{\hbar}\chi}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})\Psi$$

$$= (\frac{\hbar}{i}\nabla\frac{ie}{\hbar}\chi)e^{i\frac{e}{\hbar}\chi}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})\Psi + e^{i\frac{e}{\hbar}\chi}(\mathbf{p} - e\mathbf{A} - e\nabla\chi)(\mathbf{p} - e\mathbf{A})\Psi$$

$$= e^{i\frac{e}{\hbar}\chi}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^{2}\Psi \quad (7.93)$$

Entsprechend gilt

$$-e\left(\frac{\partial}{\partial t}\chi\right)\Psi e^{i\frac{e}{\hbar}\chi} - i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi e^{i\frac{e}{\hbar}\chi}\right)$$
$$= -e\left(\frac{\partial}{\partial t}\chi\right)\Psi e^{i\frac{e}{\hbar}\chi} - e^{i\frac{e}{\hbar}\chi}\Psi i\hbar i\frac{e}{\hbar}\frac{\partial}{\partial t}\chi - i\hbar e^{i\frac{e}{\hbar}\chi}\frac{\partial}{\partial t}\Psi = -i\hbar e^{i\frac{e}{\hbar}\chi}\frac{\partial}{\partial t}\Psi \quad (7.94)$$

Insgesamt ist die linke Seite von Gl. (7.91) also tatsächlich

$$e^{i\frac{e}{\hbar}\chi} \left[\left\{ \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} + e\Phi \right\} \Psi - i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi \right] = 0, \tag{7.95}$$

denn $\Psi(\mathbf{x}, t)$ erfüllt die ursprüngliche SG Gl. (7.87). QED.

Die umgeeichte WF $\Psi(\mathbf{x}, t)e^{i\frac{e}{\hbar}\chi(\mathbf{x}, t)}$ liefert dieselbe W-Dichte wie die ursprüngliche WF $\Psi(\mathbf{x}, t)$,

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{x},t) \equiv \Psi(\mathbf{x},t)e^{i\frac{e}{\hbar}\chi(\mathbf{x},t)} \rightsquigarrow |\tilde{\Psi}|^2 = |\Psi|^2,$$
(7.96)

also dieselbe Physik.

AUFGABE: Wir wollen die allgemeine Form des Hamiltonoperators \hat{H} in Gl. (7.87) aus dem freien Hamiltonian $\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}$ und dem **Prinzip der lokalen Eichinvarianz** herleiten: Lokale Eichtransformationen der Wellenfunktion

$$\Psi(\mathbf{x},t) \rightarrow \tilde{\Psi}(\mathbf{x},t) \equiv \Psi(\mathbf{x},t)e^{i\varphi(\mathbf{x},t)}$$
(7.97)

sollen nichts an der Physik ändern, d.h wenn $\Psi(\mathbf{x}, t)$ Lösung einer zeitabhängigen Schrödingergleichung SG ist, so soll auch $\tilde{\Psi}(\mathbf{x}, t)$ eine äquivalente Lösung einer äquivalenten zeitabhängigen Schrödingergleichung SG sein.

Zeige, daß durch Verallgemeinerung der Ableitungen ∇ und $\frac{\partial}{\partial t}$ zu kovarianten Ableitungen

$$\nabla \rightarrow \mathbf{D}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow D_0 \quad (SG), \quad \nabla \rightarrow \tilde{\mathbf{D}}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \tilde{D}_0, \quad \tilde{SG}$$
(7.98)

das Prinzip der lokalen Eichinvarianz erfüllt werden kann. Mache hierzu den Ansatz

$$\tilde{\mathbf{D}} = \nabla + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \tilde{D}_0 = \frac{\partial}{\partial t} + g(\mathbf{x}, t)$$
(7.99)

mit den *Eichfeldern* $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ und $g(\mathbf{x}, t)$ und berechne damit, wie sich die Eichfelder transformieren müssen, wenn man

$$\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\Psi} = e^{i\varphi(\mathbf{x},t)}\mathbf{D}\Psi, \quad \tilde{D}_0\tilde{\Psi} = e^{i\varphi(\mathbf{x},t)}D_0\Psi$$
(7.100)

fordert. Ersetze nun in der ursprünglich freien SG, $i\partial_t \Psi = \frac{-1}{2m} \nabla^2 \Psi$ die Ableitungen durch die entsprechenden kovarianten Ableitungen. Schreibe die neugewonnene SG sowie SG auf. Identifiziere die Eichfelder $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ und $g(\mathbf{x},t)$ durch Umbenennung als Vektorpotential **A** bzw. skalares Potential Φ der Elektrodynamik.

Aus der Forderung nach lokaler Eichinvarianz der SG haben wir damit aus der ursprünglich *freien Theorie* eine Theorie mit Eichfeldern hergeleitet, deren Existenz ein Indiz für die Existenz elektromagnetischer Erscheinungen ist. Dieses Prinzip spielt weiterhin eine große Rolle bei der Formulierung moderner, 'fundamentaler' Theorien der Materie als *Eichtheorien* (z.B. Quantenchromodynamik).
7.4.2 Das Dirac-Feld

(LE BALLAC, 'Quantum and Statistical Field Theorie', Kap. 11). Nach moderner Auffassung ist der bis hier diskutierte Elektromagnetismus ein klassischer Anteil einer Feldtheorie, die die elektromagnetische Wechselwirkung geladener Materie, d.h. Spin– $\frac{1}{2}$ -Teilchen, beschreibt. Allgemein werden die fundamentalen Kräfte der Natur (elektromagnetisch, schwach, stark) durch Spin–1-Teilchen *vermittelt*, die über das Prinzip der lokalen Eichinvarianz als Quanten eines *Eichfeldes* eingeführt werden. Man unterscheidet also 'Materiefelder' (Spin– $\frac{1}{2}$) und 'Eichfelder' (Spin–1), die zunächst als klassische Objekte eingeführt und dann quantisiert werden. Alles wird relativistisch kovariant formuliert.

Die Quantentheorie des Elektromagnetismus (Quantenelektrodynamik) ist hierfür ein Paradebeispiel. Dort wird das Eichfeld durch das elektromagnetische Feld gegeben, und das Materiefeld durch das *Dirac-Feld*, das aus der relativistischen Verallgemeinerung der Schrödingergleichung (der Dirac-Gleichung) herrührt. Alle Felder werden zunächst klassisch über Lagrange-Dichten beschrieben, anschließend wird nach bestimmten, einfachen Vorschriften quantisiert, z.B. über (Anti)–Vertauschungsrelationen für Feldoperatoren im Fockraum (siehe QUANTENMECHANIK II) oder über sogenannte Pfadintegrale (Funktionalintegrale) für Felder. Aus Sicht der nichtrelativischen Schrödinger-Theorie ungewöhnlich ist die Auffassung, dass nicht nur die Photonen ('Licht'), sondern auch die Elektronen ('Materie') aus einem kontinuierlichen Felde 'entstehen'. Aus moderner Sicht ist aber diese 'Gleichberechtigung' aller Teilchen eine Art Versöhnung des alten Teilchen-Welle-Dualismus.

Um hier den Elektromagnetismus zur Quantenelektrodynamik zu erweitern, müssen wir also zunächst auf QUANTENMECHANIK II vorgreifen und das Dirac-Feld einführen. Zunächst ist die Dirac-Gleichung eine die Schrödingergleichung verallgemeinernde Bewegungsgleichung für vierkomponentige Spinoren,

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \\ \Psi_3(x) \\ \Psi_4(x) \end{pmatrix}, \quad x \equiv (ct, \mathbf{x}).$$
(7.101)

Mit den vier γ -Matrizen (4 × 4–Matrizen) der Clifford-Algebra

$$\gamma^{0} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{k} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{k} \\ -\sigma_{k} & 0 \end{pmatrix}$$
(7.102)

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
(7.103)

lautet die Dirac-Gleichung für einrelativistisches, quantenmechanisch beschriebenes Punktteilchen der Massem

$$(i\gamma^{\nu}\partial_{\nu}-m)\Psi$$
, Dirac-Gleichung, (7.104)

wobei wie immer über die vier gemeinsamen griechischen Indizes summiert wird und die Unterscheidung

$$\partial^{\nu} \equiv \frac{\partial}{\partial x_{\nu}}, \quad \text{kontravarianter Vierergradient}$$
 (7.105)

$$\partial_{\nu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}, \quad \text{kovarianter Vierergradient}$$
 (7.106)

gemacht wurde. Diese Gleichung ist bis zu einem gewissen Grade nützlich für die Beschreibung eines Teilchens (Elektron), z.B. für relativistischen Korrekturen im Wasserstoffatom (QM II). Ihre eigentliche Bedeutung erlangt sie aber durch die Aufwertung des Spinors $\Psi(x)$ zur einem *Feld*. Das Feld wird dann quantisiert durch eine weitere Aufwertung von $\Psi(x)$ als *Feldoperator* zu einem Objekt, mit dem (durch Anwendung der Feldoperatoren) Teilchen (Elektronen, Positronen) erzeugt und vernichtet werden können. Diesen letzten Schritt, d.h. die Feldquantisierung, werden wir hier nicht diskutieren, sondern uns nur mit der klassischen Lagrangedichte des kombinierten Dirac-Maxwell-Feldes beschäftigen.

Die Lagrangedichte \mathcal{L}_{D} des Dirac-Feldes alleine muss natürlich so gewählt werden, dass man als Euler-Lagrange-Gleichung die Dirac-Gleichung Gl. (7.104) erhält. Diese Form wird durch

$$\mathcal{L}_{\rm D} \equiv \bar{\Psi}(x)(i\gamma^{\nu}\partial_{\nu} - m)\Psi(x) \tag{7.107}$$

gegeben, wobei hier jeder einzelne ν -Summand eine Bilinearform mit der entsprechenden 4×4 -Matrix ist. Weiterhin gilt

$$\bar{\Psi}(x) \equiv \Psi(x)^{\dagger} \gamma^0. \tag{7.108}$$

Das Feld $\overline{\Psi}(x)$ muss bei der Bildung der Variationsableitung als unabhängig von $\Psi(x)$ aufgefasst werden.

7.4.3 Elektromagnetische Kopplung

Die volle Lagrangedichte des kombinierten Dirac-Maxwell-Feldes wird jetzt in Analogie zu Gl. (7.72) aufgestellt, und zwar einfach als Summe von Gl. (7.72) mit dem Dirac-Anteil \mathcal{L}_{D} , insgesamt also (cgs-System)

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F^{\alpha\beta}(x)F_{\alpha\beta}(x) + \bar{\Psi}(x)(i\gamma^{\nu}\partial_{\nu} - m)\Psi(x) - j^{\alpha}(x)A_{\alpha}(x).$$
(7.109)

Natürlich müssen wir hier noch die Definition für die Stromdichte $j^{\alpha}(x)$ für die Dirac-Theorie nachliefern: Die Ladungsstromdichte ist (QM II)

$$j^{\mu}(x) \equiv -e\bar{\Psi}(x)\gamma^{\mu}\Psi(x)$$
, Viererstromdichte der Ladung , (7.110)

wobei -e die Elektronladung bezeichnet. Für j^{μ} gilt wieder die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_{\mu}j^{\mu} = 0. \tag{7.111}$$

Die Form Gl. (7.109) bildet das Fundament der Quantenelektrodynamik. Sie hat eine wichtige Eigenschaft, die als *Eichinvarianz* bezeichnet wird:

Satz 16 (Weyl 1929). Die Lagrangedichte $\mathcal{L}(x)$ geht durch die minimale Substitution, d.h. der Ersetzung

$$\partial_{\mu} \to D_{\mu} \equiv \partial_{\mu} - ieA_{\mu}(x), \quad \text{Kovariante Ableitung } D_{\mu}$$
(7.112)

aus der Lagrangedichte der freien Felder ($\mathcal{L}(x)$ mit e = 0) hervor. Sie ist invariant unter der lokalen Eichtransformation

$$A_{\mu}(x) \to A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}\Lambda(x), \quad \Psi(x) \to e^{ie\Lambda(x)}\Psi(x), \quad \text{lokale Eichtransformation (7.113)}$$

mit beliebigen reellen Skalarfeldern $\Lambda(x)$.

Die Eichtransformationen bestehen hier also aus Phasenfaktoren $e^{ie\Lambda(x)}$, mit denen die Felder multipliziert werden, und bilden somit eine abelsche Gruppe (U(1)).

Beweis des Satzes: Zunächst ist der Anteil des freien EM Feldes, $\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$, invariant unter $\partial_{\mu} \to \partial_{\mu} - ieA_{\mu}(x)$ (einsetzen!). Ersetzen wir weiterhin ∂_{ν} im Dirac-Anteil \mathcal{L}_{D} durch die kovariante Ableitung D_{ν} , so erhalten wir

$$\mathcal{L}_{\rm D} \to \bar{\Psi} \left(i \gamma^{\nu} (\partial_{\nu} - i e A_{\nu}) - m \right) \Psi = \mathcal{L}_{\rm D} + e \bar{\Psi} \gamma^{\nu} e A_{\nu} \Psi = \mathcal{L}_{\rm D} - j^{\nu} A_{\nu}, \qquad (7.114)$$

was den ersten Teil des Satzes beweist. Weiterhin ist zunächst der Feldstärketensor $F^{\alpha\beta}(x)$ und somit $\mathcal{L}_{EM}(x)$ invariant unter lokalen Eichtransformationen $A_{\mu}(x) \to A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}\Lambda(x)$. Der Diracanteil zusammen mit dem Kopplungsanteil ist schliesslich ebenfalls invariant unter lokalen Eichtransformationen;

$$\bar{\Psi}(i\gamma^{\nu}\partial_{\nu} - m)\Psi - j^{\alpha}A_{\alpha} \to \bar{\Psi}e^{-ie\Lambda(x)}(i\gamma^{\nu}\partial_{\nu} - m)e^{ie\Lambda(x)}\Psi - j^{\alpha}(A_{\alpha} + \partial_{\alpha}\Lambda)$$

$$= \bar{\Psi}(i\gamma^{\nu}\partial_{\nu} - m)\Psi - j^{\alpha}A_{\alpha} + \underbrace{\bar{\Psi}(i\gamma^{\nu})(ie)\Psi}_{j^{\nu}}\partial_{\nu}\Lambda - j^{\alpha}\partial_{\alpha}\Lambda$$

$$= \bar{\Psi}(i\gamma^{\nu}\partial_{\nu} - m)\Psi - j^{\alpha}A_{\alpha},$$
(7.115)

womit alles bewiesen ist.

7.4.4 Globale und lokale Eichinvarianz

Die lokale Eichinvarianz der klassischen Lagrangedichte Gl. (7.109), d.h die Invarianz unter lokalen Eichtransformationen Gl. (7.113), ist ein wesentliches Merkmal der fundamentalen Wechselwirkungen (EM, schwach, stark). Die Forderung nach lokaler Eichinvarianz wird auch bei der schwachen und starken Wechselwirkung in der Elementarteilchenphysik zur Konstruktion der Lagrangedichten benutzt. Wir diskutieren dieses wieder am einfachen Beispiel des Elektromagnetismus, wo die Eichtransformationen abelsch sind.

SCHRITT 1: Zunächst wird eine Erhaltungsgröße über eine *globale* Eichtransformation identifiziert, und zwar über den Dirac-Anteil

$$\mathcal{L}_{\rm D} = \bar{\Psi}(i\gamma^{\nu}\partial_{\nu} - m)\Psi = \bar{\Psi}_{\beta}(i\gamma^{\nu}_{\beta\alpha}\partial_{\nu} - \delta_{\alpha\beta}m)\Psi_{\alpha}$$
(7.116)

(Summationskonvention), der zunächst invariant unter

$$\Psi(x) \to \Psi(x)e^{ie\Lambda}, \quad \Lambda = \text{const}, \quad \text{globale Eichtransformation}$$
(7.117)

ist. Hier ist $e^{ie\Lambda}$ also ein globaler Phasenfaktor, der als Parameter aufgefasst wird, mit dem das gesamte Feld durchmultipliziert wird. Aus dieser Invarianz folgt nach dem Noether-Theorem zunächst ein Erhaltungssatz, nämlich der für die Ladungsstromdichte, d.h. die Kontinuitätsgleichung

$$\partial^{\mu} j_u = 0. \tag{7.118}$$

Beweis: Wir variieren

$$\delta \mathcal{L}_{\mathrm{D}} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{D}}}{\partial (\partial_{\mu} \Psi_{\alpha})} \delta (\partial_{\mu} \Psi_{\alpha}) + \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{D}}}{\partial \Psi_{\alpha}} \delta \Psi_{\alpha}$$

$$= \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{D}}}{\partial (\partial_{\mu} \Psi_{\alpha})} \delta \Psi_{\alpha} \right) - \left(\partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{D}}}{\partial (\partial_{\mu} \Psi_{\alpha})} \right) \delta \Psi_{\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{D}}}{\partial \Psi_{\alpha}} \delta \Psi_{\alpha}$$

$$= \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{D}}}{\partial (\partial_{\mu} \Psi_{\alpha})} \delta \Psi_{\alpha} \right), \qquad (7.119)$$

wobei im letzten Schritt die EL-Gleichungen benutzt wurden. Bei Invarianz unter Gl. (7.117), d.h. Variieren von Λ ist also wegen $\delta \Psi_{\alpha} = i e \Psi_{\alpha} \delta \Lambda$

$$0 = \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{D}}}{\partial (\partial_{\mu} \Psi_{\alpha})} \delta \Psi_{\alpha} \right) = \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{D}}}{\partial (\partial_{\mu} \Psi_{\alpha})} (i e \Psi_{\alpha}) \right) \delta \Lambda = \partial_{\mu} \left(i \bar{\Psi}_{\beta} \gamma^{\mu}_{\beta \alpha} (i e \Psi_{\alpha}) \right) \delta \Lambda = \partial_{\mu} j^{\mu} \delta \Lambda, 120)$$

d.h. die zugehörige Erhaltungsgröße ist tatsächlich die Stromdichte j^{μ} .

SCHRITT 2: Jetzt wird \mathcal{L}_{D} zu einer neuen Lagrangedichte erweitert, die invariant unter *lokalen* Eichtransformationen $\Psi(x) \to e^{ie\Lambda(x)}\Psi(x)$ sein soll. Das geht nur wie im Satz von Weyl oben, d.h. durch minimale Kopplung $\partial_{\mu} \to D_{\mu} \equiv \partial_{\mu} - ieA_{\mu}(x)$, was dann zur Ersetzung

$$\mathcal{L}_{\mathrm{D}} \to \mathcal{L}_{\mathrm{D}} - j^{\alpha}(x)A_{\alpha}(x)$$
 (7.121)

führt. Dadurch handelt man sich neue Objekte ein, nämlich die Eichfelder $A_{\alpha}(x)$. Diese Eichfelder sind aber gerade die neuen, gewünschten Anteile, die die elektromagnetische Kopplung beschreiben und über die die Materie, d.h. das Dirac-Feld, mit sich selbst wechselwirkt. Um die Eichfelder konsequent als eigenständige Freiheitsgrade zu beschreiben, muss schließlich noch der freie, eichinvariante Anteil $\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ zur Lagrangedichte addiert werden, und mal erhält die gesamte Lagrangedichte Gl. (7.109).

8. THEORIEN MIT EICHPOTENTIALEN

8.1 Lokale Eichinvarianz

Im folgenden wollen wir zeigen, wie das Prinzip der lokalen Eichinvarian auch auf andere Theorien (z.B. die der starken Wechselwirkung, 'Quantenchromodynamik') ausgedehnt wird. Wie oben bereits erwähnt, werden allgemein die fundamentalen Kräfte der Natur (elektromagnetisch, schwach, stark) durch Spin–1-Teilchen *vermittelt*, die über das Prinzip der lokalen Eichinvarianz als Quanten eines *Eichfeldes* eingeführt werden. Man unterscheidet also 'Materiefelder' (Spin– $\frac{1}{2}$) und 'Eichfelder' (Spin–1), die zunächst als klassische Objekte eingeführt und dann quantisiert werden. Alles wird relativistisch kovariant formuliert.

Ausgangspunkt ist zunächst die klassische Lagrangedichte der Materiefelder, die dadurch also letztlich doch vor den Eichfeldern etwas unschön bevorzugt werden: die Eichfelder kommen erst danach ins Spiel.

8.1.1 Wiederholung: Konstruktion des QED Lagrangians

Das freie Materiefeld ist das vierkomponentige Dirac-Spinorfeld $\Psi(x)$, das der Dirac-Gleichung $(i\gamma^{\nu}\partial_{\nu} - m)\Psi = 0$, Gl. (7.104) genügt, die zur Lagrangedichte Gl. (7.107)

$$\mathcal{L}_{\rm D}(x) \equiv \bar{\Psi}(x)(i\gamma^{\nu}\partial_{\nu} - m)\Psi(x) \tag{8.1}$$

gehört. Hierbei ist x ein Element des Minkowski-Raums, d.h. ein Punkt der vierdimensionalen Raumzeit.

Das Prinzip der lokalen Eichinvarianz fordert jetzt eine Invarianz der eigentlichen Theorie (d.g. einer neu zu konstruierenden Lagrangedichte) unter Transformationen

$$\Psi(x) \to \tilde{\Psi}(x) \equiv \Psi(x)e^{ie\Lambda(x)},$$
(8.2)

wobei $\Lambda(x)$ eine reelle Funktion und e ein Kopplungsparameter ist. Mit dieser Forderung handelt man sich *Eichfelder* $A_{\mu}(x)$ ein, die die normale Vierer-Ableitung ∂_{ν} zu einer kovarianten Ableitung machen, Gl. (7.112)

$$\partial_{\mu} \to D_{\mu} \equiv \partial_{\mu} - ieA_{\mu}(x), \quad \text{Kovariante Ableitung } D_{\mu} .$$
 (8.3)

Die neue, volle Lagrangedichte lautet dann

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\Psi}(x)(i\gamma^{\nu}D_{\nu} - m)\Psi(x) - \frac{1}{4}F^{\alpha\beta}(x)F_{\alpha\beta}(x), \quad F^{\alpha\beta}(x) = \partial^{\alpha}A^{\beta}(x) - \partial^{\beta}A^{\alpha}(x)(8.4)$$

und ist invariant unter Eichtransformationen Gl. (7.113), d.h. $\Psi(x) \to \Psi(x)e^{ie\Lambda(x)}$ für die Materiefelder und $A_{\mu}(x) \to \tilde{A}_{\mu} \equiv A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}\Lambda(x)$ für die Eichfelder.

Eine zentrales Merkmal ist jetzt die lokale Eichinvarianz von $\mathcal{L}(x)$, denn unter einer Eichtransformation gilt

$$D_{\nu}\Psi(x) \to \tilde{D}_{\nu}\tilde{\Psi}(x) = e^{ie\Lambda(x)}D_{\nu}\Psi(x), \quad F^{\alpha\beta}(x) \to F^{\alpha\beta}(x).$$
 (8.5)

8.2 Yang-Mills-Theorien

(BECHER, BÖHM, JOOS; SKRIPT REHREN (Göttingen)) Das Prinzip der lokalen Eichinvarianz soll jetzt auf *n*-komponentige Felder ('Multipletts') $\Psi(x)$ der Form

$$\Psi(x) \equiv \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \dots \\ \psi_n(x) \end{pmatrix}, \quad \text{Multiplett}$$
(8.6)

verallgemeinert werden, wobei in den Anwendungen unten (QED, QCD) jede Komponente $\psi_i(x)$ selbst wieder aus vier Dirac-Komponenten besteht, was hier nicht mehr explizit angezeigt wird.

An jedem Punkt x der Raumzeit soll die Physik jetzt unabhängig von 'Rotationen' von $\Psi(x)$ sein, d.h. speziellen Transformationen der Form

$$\Psi(x) \to \tilde{\Psi}(x) \equiv g(x)\Psi(x), \quad g(x) = e^{-i\sum_{a=1}^{N}\theta_a(x)T_a}.$$
(8.7)

Die Rotationen sollen in den folgenden Anwendungen für n = 1 durch Elemente der abelschen Gruppe U(1) (d.h. Phasenfaktoren $e^{i\theta(x)}$) und für $n \ge 2$ durch Elemente der nicht-abelschen Gruppe SU(n) dargestellt werden. Die SU(n) besteht aus unitären $n \times n$ -Matrizen mit Determinante eins. Die $\theta_a(x)$ sind reelle Funktionen, und die \hat{T}_a stellen eine Basis von $n \times n$ -Matrizen dar, die aus $n^2 - 1$ unabhängigen Basis-Matrizen besteht.

8.2.1 Physikalische Motivation

(NACHTMANN, 'Elementarteilchenphysik') Eine der wichtigsten Anwendungen der Yang-Mills Theorie ist die Quantenchromodynamik (QCD), die die Physik der Hadronen (z.B. Protonen, Neutronen, π -Mesonen) beschreibt. Hadronen teilt man in Mesonen (ganzzahliger Spin) und Baryonen (halbzahliger Spin) ein. Die Hadronen sind aus fundamentalen Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen (*Quarks*) aufgebaut, die in unterschiedlichen Sorten ('flavors') kommen,

$$u, d, s, c, b, t$$
, up, down, strange, charme, bottom, top. (8.8)

Ein Proton ist z.B. ein Bindungszustand aus zwei up- und einem down-Quark, $p \propto uud$.

Für die Quarks muss man zusätzlich zum Spin- $\frac{1}{2}$ nun einen weiteren inneren Freiheitsgrad annehmen, der als Farbe (blau, rot, grün) bezeichnet wird und der zur Erfüllung des Pauli-Prinzips benötigt wird. Das Pauliprinzip fordert die Antisymmetrie einer fermionischen (Vielteilchen–) Wellenfunktion beim Austauschen zweier Teilchen. Für das Spin–3/2–Teilchen Ω^- im Grundzustand kann das z.B. nicht durch eine Wellenfunktion vom Typ $s^{\uparrow}s^{\uparrow}s^{\uparrow}\psi(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3)$ erfüllt sein (Orts- und Spin-Anteil sollten symmetrisch sein), wohl aber durch

$$\Omega^{-} \propto \epsilon_{\alpha\beta\gamma} s^{\uparrow}_{\alpha} s^{\uparrow}_{\beta} s^{\uparrow}_{\gamma} \psi(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3) \tag{8.9}$$

mit dem total antisymmetrischem ϵ -Symbol und $\alpha = 1, 2, 3$ (rot, blau, grün) als Farbindex. Hier ist das zugehörige Feld für das strange-Quark also

$$\Psi_s(x) \equiv \begin{pmatrix} \psi_{s,1}(x) \\ \psi_{s,2}(x) \\ \psi_{s,3}(x) \end{pmatrix}, \quad \text{Farb-Triplett}$$
(8.10)

mit n = 3 inneren Farb-Freiheitsgraden. Keiner dieser Farbfreiheitsgrade soll dabei bevorzugt sein: die zu entwickelnde Theorie der starken Wechselwirkung soll also zunächst invariant unter Rotationen im 'Farbraum' sein. Diese Rotationen sind genau vom Typ Gl. (8.7) mit Transformationen $g(x) \in SU(3)$.

8.2.2 Dirac-Gleichung

Ausgangspunkt ist wieder eine Lagrangedichte im leeren Raum und eine entsprechende Dirac-Gleichung,

$$\mathcal{L}_{\mathrm{D}}(x) \equiv \bar{\Psi}(x)(i\gamma^{\nu}\partial_{\nu} - m)\Psi(x), \quad (i\gamma^{\nu}\partial_{\nu} - m)\Psi = 0.$$
(8.11)

Diese Dirac-Gleichung soll invariant unter den Transformationen Gl. (8.7) bleiben. Um das zu erreichen, müssen wir die Ableitung ∂_{μ} durch eine kovariante Ableitung

$$D_{\mu} \equiv \partial_{\mu} + i\mathcal{A}_{\mu}(x) \qquad (8.12)$$

ersetzen, wobei $\mathcal{A}_{\mu}(x)$ ein Eichfeld ist. Dieses muss jetzt Matrix-wertig sein, da jedes g(x) aus der *Eichgruppe* \mathcal{G} eine Matrix ist. Bei Eichtransformationen soll wieder analog zu Gl. (8.5)

$$D_{\nu}\Psi(x) \to \tilde{D}_{\nu}\tilde{\Psi}(x) = g(x)D_{\nu}\Psi(x)$$
 (8.13)

gelten. Daraus folgt die Transformationsvorschrift für das umgeeichte A_{μ} ;

$$\left[\partial_{\mu} + i\tilde{\mathcal{A}}_{\mu}(x)\right]g(x)\Psi(x) = g(x)\left[\partial_{\mu} + i\mathcal{A}_{\mu}(x)\right]\Psi(x)$$

$$\Rightarrow \quad i\tilde{\mathcal{A}}_{\mu}(x) = g(x)i\mathcal{A}_{\mu}(x)g^{-1}(x) - [\partial_{\mu}g(x)]g^{-1}(x)$$
(8.14)

durch Vergleich beider Seiten. Wir haben also ganz allgemein insgesamt die Umeichungs-Vorschrift

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &\to \tilde{\Psi}(x) \equiv g(x)\Psi(x) \\
\mathcal{A}_{\mu}(x) &\to \tilde{\mathcal{A}}_{\mu}(x) = g(x)\mathcal{A}_{\mu}(x)g^{-1}(x) + i[\partial_{\mu}g(x)]g^{-1}(x). \quad (8.15)
\end{aligned}$$

Für den Fall n = 1, d.h. die U(1) mit blossen Phasenfaktoren $g(x) = e^{-i\theta(x)}$, wird daraus einfach

$$\Psi(x) \to \tilde{\Psi}(x) \equiv e^{-i\theta(x)}\Psi(x), \quad \mathcal{A}_{\mu}(x) \to \tilde{\mathcal{A}}_{\mu}(x) = \mathcal{A}_{\mu}(x) + [\partial_{\mu}\theta(x)] \quad (8.16)$$

und mit $\theta(x) \equiv -e\Lambda(x)$ und $\mathcal{A}_{\mu}(x) \equiv -eA_{\mu}(x)$ haben wir wieder unsere alte Eichtrafo der Elektrodynamik mit der Ladung -e, dem Viererpotential $A_{\mu}(x)$ und der kovarianten Ableitung $D_{\mu} = \partial_{\mu} - ieA_{\mu}(x)$.

Mit Hilfe der kovarianten Ableitung D_{μ} lautet die neue, eichinvariante¹, aus $\mathcal{L}_{\mathrm{D}}(x)$, Gl. (8.11), konstruierte Lagrangedichte und die zugehörige Diracgleichung nun

$$\mathcal{L}_{YM}(x) \equiv \bar{\Psi}(x)(i\gamma^{\nu}D_{\nu} - m)\Psi(x), \quad (i\gamma^{\nu}D_{\nu} - m)\Psi(x) = 0.$$
(8.17)

8.2.3 Lagrangedichte des Eichfeldes

Die Lagrangedichte des Eichfeldes wird jetzt ganz in Analogie zur QED, wo

$$\mathcal{L}_{\mathrm{F}}(x) = -\frac{1}{4} F^{\alpha\beta}(x) F_{\alpha\beta}(x), \quad F^{\alpha\beta}(x) = \partial^{\alpha} A^{\beta}(x) - \partial^{\beta} A^{\alpha}(x)$$
(8.18)

war, konstruiert. Allerdings sind die Eichfelder $\mathcal{A}_{\mu}(x)$ jetzt Matrizen, die i.a. nicht miteinander vertauschen. Der aus ihnen konstruierte Feldstärketensor $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)$ sollte sich unter Eichtransformationen Gl. (8.15) auf jeden Fall so transformieren, dass die Lagrangedichte des Eichfeldes invariant bleibt. Es gilt

Satz 17. Der Feldstärketensor

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x) \equiv \partial_{\mu}\mathcal{A}_{\nu}(x) - \partial_{\nu}\mathcal{A}_{\mu}(x) + i[\mathcal{A}_{\mu}(x), \mathcal{A}_{\nu}(x)]$$
(8.19)

transformiert sich unter Eichtransformationen $\mathcal{A}_{\mu}(x) \to \tilde{\mathcal{A}}_{\mu}(x) = g(x)\mathcal{A}_{\mu}(x)g^{-1}(x) + i[\partial_{\mu}g(x)]g^{-1}(x)$ nach der adjungierten Darstellung der Eichgruppe \mathcal{G}

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x) \to g(x)\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)g^{-1}(x), \quad g(x) \in \mathcal{G}.$$
(8.20)

Die Lagrangedichte

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\rm F}(x) \equiv -\frac{1}{2} \text{Tr} \mathcal{F}_{\mu\nu}(x) \mathcal{F}^{\mu\nu}(x) \qquad (8.21)$$

ist invariant unter Eichtransformationen.

¹ Man beachte, dass bei Eichtransformationen $\bar{\Psi}(x) \rightarrow \bar{\Psi}(x)g^{-1}(x)$ gilt

Beweis: wir berechnen den eichtransformierten Ausdruck für $\mathcal{F}_{\mu\nu}$,

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \to g[\partial_{\mu}\mathcal{A}_{\nu} - \partial_{\nu}\mathcal{A}_{\mu}]g^{-1} + (\partial_{\mu}g)\mathcal{A}_{\nu}g^{-1} + g\mathcal{A}_{\nu}(\partial_{\mu}g^{-1}) - (\partial_{\nu}g)\mathcal{A}_{\mu}g^{-1} - g\mathcal{A}_{\mu}(\partial_{\nu}g^{-1}) + i\left(g\mathcal{A}_{\mu}g^{-1} + i(\partial_{\mu}g)g^{-1}\right)\left(g\mathcal{A}_{\nu}g^{-1} + i(\partial_{\nu}g)g^{-1}\right) - i\left(g\mathcal{A}_{\nu}g^{-1} + i(\partial_{\nu}g)g^{-1} + i(\partial_{\mu}g)g^{-1}\right) + \partial_{\nu}g\partial_{\mu}g^{-1} - \partial_{\mu}g\partial_{\nu}g^{-1}.$$

$$(8.22)$$

Hier heben sich viele Terme weg (AUFGABE), wobei wir den Trick $\partial_{\mu}(gg^{-1}) = 0 \rightsquigarrow \partial_{\mu}g^{-1} = -g^{-1}(\partial_{\mu}g)g^{-1}$ benutzen, und es folgt Gl. (8.20). Weiterhin ist die Spur invariant unter zyklischen Vertauschungen, weshalb insgesamt $\mathcal{L}_{\mathrm{F}}(x)$ eichinvariant ist, QED.

Wieder in Analogie zur Elektrodynamik führen wir jetzt analog zur Ladung -e eine Kopplungskonstante \bar{g} ein. In der Eichtransformation Gl. (8.7)

$$\Psi(x) \to \tilde{\Psi}(x) \equiv e^{-i\sum_{a=1}^{N} \theta^a(x)\hat{T}_a}\Psi(x)$$
(8.23)

haben wir $N = n^2 - 1$ unabhängige Matrizen \hat{T}_a (für SU(n)), die wir als Basis für die Eichfelder nehmen, und zwar in der Form

$$\mathcal{A}_{\mu} = \bar{g} A^a_{\mu}(x) \hat{T}_a \tag{8.24}$$

(Summationskonvention), und zwar nun mit reellen Eichfeldern $A^a_{\mu}(x)$. Entsprechend wird der Feldstärketensor geschrieben als

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \bar{g}F^a_{\mu\nu}(x)\hat{T}_a \tag{8.25}$$

mit reellen Feldstärketensoren $F^a_{\mu\nu}(x)$. Die Lagrangedichte für das Eichfeld schreibt man jetzt statt $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathrm{F}}(x)$ als

$$\mathcal{L}_{\mathrm{F}}(x) \equiv -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu}(x) F^{a,\mu\nu}(x)$$
(8.26)

in vollständiger Analogie zur QED. Insgesamt lautet unsere Lagrangedichte nun also

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\Psi}(x)(i\gamma^{\nu}D_{\nu} - m)\Psi(x) - \frac{1}{4}F^{a}_{\mu\nu}(x)F^{a,\mu\nu}(x).$$
(8.27)

AUFGABE: a) Beweise durch Anwendung auf ein Feld $\Psi(x)$ die Identität für den Feldstärketensor $\mathcal{F}_{\mu\nu}$,

$$[D_{\mu}, D_{\nu}] = i\mathcal{F}_{\mu\nu}, \qquad (8.28)$$

wobei D_{μ} die kovariante Ableitung und [,] der Kommutator ist. b) Leite daraus das Verhalten Gl. (8.20) von $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)$ unter Eichtransformationen her.

8.3 Eichfelder in der Born–Oppenheimer–Methode

Im Rahmen der Born-Oppenheimer-Methode aus der Molekülphysik diskutiert man in jüngerer Zeit Methoden zur 'Synthetisierung' von Eichfeldern z.B. in Atomen mit inneren Freiheitsgraden, die räumlich schwach variieren. Wir wiederholen zunächst die Kopplung von mehreren Freiheitsgraden in der Quantenmechanik.

8.3.1 Wiederholung: Kombination von Spin- und Bahnzuständen (QM I)

(SKRIPT QM I). 'Bahnzustände' sind die Zustände $|\psi\rangle \in L_2(\Omega)$ mit quadratintegrablen Wellenfunktionen $\psi(\mathbf{r})$ im Ortsraum, die wir bisher betrachtet hatten. Hinzu kommt jetzt der innere *Spin-Freiheitsgrad* mit den Spinzuständen $|\chi\rangle \in \mathbb{C}^2$, die für Spin $s = \frac{1}{2}$ einfach zweikomponentige Vektoren sind. Beides kann nun durch Bildung des **Tensorprodukts** der zwei Hilberträume zusammengefaßt werden:

Definition Der Hilbertraum der *Spinoren* besteht aus Elementen des Tensorprodukts $\mathcal{H} \equiv L_2(\Omega) \otimes \mathbb{C}^2$, d.h. Linearkombinationen der Form

$$|\Psi\rangle = \sum_{i} c_{i} |\Psi_{i}\rangle \otimes |\chi_{i}\rangle, \quad |\Psi_{i}\rangle \in L_{2}(\Omega), \quad |\chi_{i}\rangle \in \mathbb{C}^{2}.$$
(8.29)

Das Skalarprodukt in \mathcal{H} ist

$$\langle \Psi' | \Psi \rangle = \sum_{ij} (c'_i)^* c_j \langle \Psi'_i | \Psi_j \rangle \langle \chi'_i | \chi_j \rangle.$$
(8.30)

Wenn wir den Spin-up- und den Spin-down-Anteil zusammenfassen, bekommen wir eine Entwicklung in der Basis des \mathbb{C}^2 , d.h. nach Spin-Eigenvektoren $|\uparrow\rangle_z$, $|\downarrow\rangle_z$ in der üblichen Form

$$|\Psi\rangle = |\Psi_{\uparrow}\rangle \otimes |\uparrow\rangle_{z} + |\Psi_{\downarrow}\rangle \otimes |\downarrow\rangle_{z}, \quad |\Psi_{\sigma}\rangle \in L_{2}(\Omega), \quad \sigma = \uparrow, \downarrow.$$
(8.31)

Wir schreiben damit in Dirac-Notation die Spin- σ -Komponenten des Zustands $|\Psi\rangle$ im Ortsraum als

$$\langle x\sigma|\Psi\rangle \equiv \Psi_{\sigma}(x), \quad \sigma=\uparrow,\downarrow,$$
(8.32)

und $|\langle x\sigma|\Psi\rangle|^2$ ist die W-dichte, das Teilchen am Ort x mit Spin in σ -Richtung zu finden. Manchmal schreibt man auch

$$\langle x|\Psi\rangle \equiv \begin{pmatrix} \Psi_{\uparrow}(x) \\ \Psi_{\downarrow}(x) \end{pmatrix}$$
(8.33)

als zweikomponentigen Vektor mit L_2 -Wellenfunktionen als Komponenten. In konsistenter Dirac-Notation ist dann

$$\langle \uparrow | \langle x | \Psi \rangle = \Psi_{\uparrow}(x), \quad \langle \downarrow | \langle x | \Psi \rangle = \Psi_{\downarrow}(x) \tag{8.34}$$

als Projektion auf die jeweiligen Spin-Komponenten.

Sei weiterhin $|n\rangle$ eine Basis des 'Bahn'-Hilbertraums $L_2(\Omega)$. Dann ist $\{|n\rangle \otimes |\sigma\rangle_z\}$, $\sigma =\uparrow,\downarrow$ eine Basis des Tensorprodukts (Spinorraum) \mathcal{H} , dessen Elemente Linearkombinationen sind,

$$|\Psi\rangle = \sum_{n} \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} c_{n\sigma} |n\rangle \otimes |\sigma\rangle_z, \quad c_{n\sigma} \in \mathbb{C}.$$
(8.35)

Definition Auf einem Tensorprodukt $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ zweier Hilberträume sind lineare Operatoren durch $\hat{A} = \hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2$ gegeben, wobei der lineare Operator \hat{A}_1 in \mathcal{H}_1 und entsprechend \hat{A}_2 in \mathcal{H}_2 wirkt gemäß

$$\hat{A}|\Psi\rangle = \hat{A}\sum_{i} c_{i}|\Psi_{i}\rangle \otimes |\chi_{i}\rangle \equiv \sum_{i} c_{i}(\hat{A}_{1}|\Psi_{i}\rangle) \otimes (\hat{A}_{2}|\chi_{i}\rangle).$$
(8.36)

Im Hilbertraum der Spinoren bedeutet das Folgendes:

Satz 18. Im Hilbertraum $\mathcal{H} \equiv L_2(\Omega) \otimes \mathbb{C}^2$ der Spinor-Wellenfunktionen (Bahn- und Spinanteil) eines Elektrons haben lineare Operatoren die Form

$$\hat{A} = \hat{O}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \otimes \hat{1}_{\mathbb{C}^2}, \quad \hat{1}_{\mathbb{C}^2} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{nur Bahnanteil}$$
(8.37)

$$\hat{A} = \hat{1}_{L_2} \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
, nur Spinanteil (8.38)

$$\hat{A} = \hat{O}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
, beide Anteile, (8.39)

wobei $\hat{1}_{L_2}$ der Einheitsoperator ('unity') bezeichnet, der 'nichts' auf dem Bahnanteil $\in L_2(\Omega)$ der Wellenfunktion bewirkt.

Der Fall 'beide Anteile' wird als **Spin-Bahn-Kopplung** bezeichnet und ist z.B. für die Feinstruktur des Wasserstoffspektrums wichtig (QM II).

Wir betrachten nun den Hamiltonoperator mit dem zusätzlichen Zeeman-Term (QM1), das auf ein Teilchen mit Spin $s = \frac{1}{2}$ in einem Magnetfeld wirkt. Für ein Magnetfeld **B**, das jetzt in eine beliebige Richtung zeigen soll, verallgemeinern wir den Spin-Anteil,

$$H_{\sigma B} \equiv -g_e \frac{e\hbar}{2m} B\sigma_z$$
, Magnetfeld in z-Richtung (8.40)

$$H_{\sigma B} \equiv -g_e \frac{e\hbar}{2m} \sigma \mathbf{B}$$
, Magnetfeld in beliebige Richtung (8.41)

mit dem Vektor $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_2)$ der Pauli-Matrizen. Insgesamt wird dann mit dem Bahnanteil der Hamiltonian des Elektrons zu

$$\hat{H} = \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\mathbf{x})\right) \otimes \hat{1}_{\mathbb{C}^2} + \hat{1}_{L_2} \otimes \left(\frac{-g_e e\hbar}{2m}\right) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{B}.$$
(8.42)

In der Praxis läßt man in der Notation meist die Einheitsoperatoren einfach weg und schreibt die entsprechende Schrödinger-Gleichung dann als

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = \hat{H}|\Psi\rangle$$
$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) - \frac{g_e e\hbar}{2m}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}, \quad \text{Pauli-Gleichung.}$$
(8.43)

8.3.2 Die Methode der instantanen Basis

(BOHM, MOSTAFAZADEH, KIZUMI, NIU, ZWANZIGER, 'The geometric phase in quantum systems'). Wir betrachten nun einen Hamiltonian der Form

$$H = H_{\rm slow} + H_{\rm fast},\tag{8.44}$$

der 'langsame' und 'schnelle' Freiheitsgrade eines Gesamtsystems beschreibt. Im einfachsten Fall ist

$$H = H_{\text{slow}} + H_{\text{fast}}(\mathbf{R}), \quad H_{\text{slow}} = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + V(\mathbf{R}), \quad \mathbf{R} \in \mathbb{R}^d,$$
(8.45)

wobei H_{slow} z.B. die Bewegung eines schweren Teilchens (Atoms) mit der Masse Mund der Schwerpunktskoordinate \mathbf{R} im Potential $V(\mathbf{R})$ beschreibt, während $H_{\text{fast}}(\mathbf{R})$ auf innere Freiheitsgrade wie Elektronen oder Spin wirkt, im letzten Fall z.B. als Spin-Operator in der Form $H_{\text{fast}}(\mathbf{R}) = -\boldsymbol{\sigma} \mathbf{B}(\mathbf{R})$ mit ortsabhängigem Magnetfeld.

Der Gesamt-Hilbertraum \mathcal{H} hat die Struktur eines Tensorproduktes,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{slow}} \otimes \mathcal{H}_{\text{fast}}, \quad \mathcal{H}_{\text{slow}} = \text{span}(|\Phi_{\alpha}\rangle), \quad \mathcal{H}_{\text{fast}} = \text{span}(|\chi_{a}\rangle)$$
(8.46)

mit Basissystemen für \mathcal{H}_{slow} und \mathcal{H}_{fast} , die insgesamt zu einer Basis $\{|\Phi_{\alpha}\rangle \otimes |\chi_a\rangle\}$ kombiniert werden können.

Im Raum \mathcal{H}_{slow} kann man wie gewöhnlich zunächst 'Ortseigenzustände' definieren, und zwar gemäß

$$|\mathbf{R}\rangle \equiv \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha}^{*}(\mathbf{R}) |\Phi_{\alpha}\rangle, \quad \Phi_{\alpha}(\mathbf{R}) \equiv \langle \mathbf{R} |\Phi_{\alpha}\rangle, \quad (8.47)$$

wobei wie in der Dirac-Notation üblich $\Phi_{\alpha}(\mathbf{R})$ die Wellenfunktion in der Ortsdarstellung zum (abstrakten) Hilbertraum-Zustand $|\Phi_{\alpha}\rangle$ bezeichnet. Es gilt die 'Normierung' (Vollständigkeitsrelation!)

$$\langle \mathbf{R}' | \mathbf{R} \rangle = \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha}(\mathbf{R}') \Phi_{\alpha}^{*}(\mathbf{R}) = \delta^{d}(\mathbf{R} - \mathbf{R}')$$
(8.48)

mit der Delta-Funktion in d Dimensionen.

Im Raum $\mathcal{H}_{\text{fast}}$ definieren wir jetzt statt $\{|\chi_a\rangle\}$ neue 'instantane' Basissysteme $\{|n(\mathbf{R})\rangle\}$, und zwar über die Eigenwertgleichung des 'schnellen' Hamiltonians für jeweils *festgehaltenes* \mathbf{R} ,

$$H_{\text{fast}}(\mathbf{R})|n(\mathbf{R})\rangle = \varepsilon_n(\mathbf{R})|n(\mathbf{R})\rangle, \quad \langle n(\mathbf{R})|n'(\mathbf{R})\rangle = \delta_{nn'}.$$
 (8.49)

Man diagonalisiert hier also zunächst den Hamiltonian der inneren Freiheitsgrade jeweils für festes \mathbf{R} , was dem 'ruhenden Atom' entspricht. Jeder Ort \mathbf{R} führt hierbei i.A. auf eine andere instantane Basis, da $H_{\text{fast}}(\mathbf{R})$ ja parametrisch von \mathbf{R} abhängt. Entsprechend ändert sich auch das Spektrum der Eigenwerte $\varepsilon_n(\mathbf{R})$ mit \mathbf{R} . Im nächsten Schritt definieren wir mit Hilfe der instantanen Basen jetzt eine neue Orthonormalbasis $\{|\mathbf{R}, n\rangle\}$ im gesamten Hilbertraum \mathcal{H} , und zwar in Analogie zur Ortsbasis Gl. (8.47) über

$$|\mathbf{R}n\rangle \equiv \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha}^{*}(\mathbf{R}) |\Phi_{\alpha}\rangle \otimes |n(\mathbf{R})\rangle, \quad \langle \mathbf{R}'n' |\mathbf{R}n\rangle = \delta^{d}(\mathbf{R} - \mathbf{R}')\delta_{nn'}.$$
(8.50)

AUFGABE: Überprüfe die Vollständigkeitsrelation im Gesamt-Hilbertraum \mathcal{H} mit der Basis Gl. (8.50).

8.3.3 Systeme von Schrödinger–Gleichungen

Die stationäre Schrödinger-Gleichung

$$H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle \tag{8.51}$$

für das Gesamtsystem führt jetzt mittels der neuen Basis $\{|\mathbf{R}n\rangle\}$ auf ein System von Schrödinger-Gleichungen. Zunächst haben wir mit $H_{\text{fast}}(\mathbf{R})|n(\mathbf{R})\rangle = \varepsilon_n(\mathbf{R})|n(\mathbf{R})\rangle$, Gl. (8.49), die Schrödingergleichung(en) für die internen Freiheitsgrade, die hier parametrisch von **R** abhängen.

Um den gesamten Zustand $|\Psi\rangle$ zu kennen, reicht die Kenntnis der Koeffizienten in der Basis $|\mathbf{R}n\rangle$ aus,

$$\Psi_n(\mathbf{R}) \equiv \langle \mathbf{R}n | \Psi \rangle. \tag{8.52}$$

Die $\Psi_n(\mathbf{R})$ können als 'Wellenfunktionen' der langsamen Freiheitsgrade aufgefasst werden. Sie erfüllen ein System von Schrödinger-Gleichungen:

$$\langle \mathbf{R}n | \left(\frac{\mathbf{P}^2}{2M} + V(\mathbf{R})\right) |\Psi\rangle + \langle \mathbf{R}n | H_{\text{fast}}(\mathbf{R}) |\Psi\rangle = E \langle \mathbf{R}n |\Psi\rangle$$

$$\rightsquigarrow \langle \mathbf{R}n | \left(\frac{\mathbf{P}^2}{2M}\right) |\Psi\rangle + (V(\mathbf{R}) + \varepsilon_n(\mathbf{R})) \Psi_n(\mathbf{R}) = E \Psi_n(\mathbf{R}), \qquad (8.53)$$

denn es gilt $\langle \mathbf{R}n | V(\mathbf{R}) = V(\mathbf{R}) \langle \mathbf{R}n |$ sowie

$$\langle \mathbf{R}n | H_{\text{fast}}(\mathbf{R}) = \varepsilon_n(\mathbf{R}) \langle \mathbf{R}n |$$
 (8.54)

(Anwenden von H_{fast} auf $\langle n(\mathbf{R})|$ nach links in $\langle \mathbf{R}n|$, Gl. (8.50).) Zu berechnen bleibt also das Matrixelement $\langle \mathbf{R}n|\mathbf{P}^2|\Psi\rangle$.

Wir berechnen zunächst das Impuls-Matrixelement nach der Produktregel;

$$\langle \mathbf{R}'n'|\mathbf{P}|\mathbf{R}n \rangle = \langle \mathbf{R}'n'|\sum_{\alpha} (-i\nabla)\Phi_{\alpha}^{*}(\mathbf{R})|\Phi_{\alpha}\rangle \otimes |n(\mathbf{R})\rangle$$

$$= \langle \mathbf{R}'n'|\sum_{\alpha} [-i\nabla\Phi_{\alpha}^{*}(\mathbf{R})]|\Phi_{\alpha}\rangle \otimes |n(\mathbf{R})\rangle + \sum_{\alpha}\Phi_{\alpha}^{*}(\mathbf{R})|\Phi_{\alpha}\rangle \otimes (-i\nabla)|n(\mathbf{R})\rangle$$

$$= -i\nabla_{\mathbf{R}}\langle \mathbf{R}'n'|\mathbf{R}n\rangle + \sum_{\alpha}\Phi_{\alpha}(\mathbf{R}')\Phi_{\alpha}^{*}(\mathbf{R})\langle n'(\mathbf{R}')|(-i\nabla)|n(\mathbf{R})\rangle$$

$$= (-i\nabla_{\mathbf{R}}\delta_{nn'} - A_{n'n}(\mathbf{R}))\delta^{d}(\mathbf{R} - \mathbf{R}'),$$

$$(8.55)$$

mit der Definition

$$A_{n'n}(\mathbf{R}) \equiv i \langle n'(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | n(\mathbf{R}) \rangle$$
, Mead–Berry–Eichpotential. (8.56)

Entsprechend durch Einschieben der Eins,

$$1 = \sum_{n''} \int d^{d} \mathbf{R}'' |\mathbf{R}''n''\rangle \langle \mathbf{R}''n''| \rightsquigarrow$$

$$\langle \mathbf{R}'n'|\mathbf{P}^{2}|\mathbf{R}n\rangle = \sum_{n''} \int d^{d} \mathbf{R}'' \langle \mathbf{R}'n'|\mathbf{P}|\mathbf{R}''n''\rangle \langle \mathbf{R}''n''|\mathbf{P}|\mathbf{R}n\rangle$$

$$= \sum_{n''} \int d^{d} \mathbf{R}'' \left(-i\nabla'_{\mathbf{R}}\delta_{n'n''} - A_{n'n''}(\mathbf{R}')\right) \delta^{d}(\mathbf{R}' - \mathbf{R}'') \times$$

$$\times \left(-i\nabla_{\mathbf{R}}\delta_{n''n} - A_{n''n}(\mathbf{R})\right) \delta^{d}(\mathbf{R}'' - \mathbf{R})$$

$$= \sum_{n''} \left(-i\nabla_{\mathbf{R}}\delta_{n'n''} - A_{n'n''}(\mathbf{R})\right) \left(-i\nabla_{\mathbf{R}}\delta_{n''n} - A_{n''n}(\mathbf{R})\right) \delta^{d}(\mathbf{R}' - (\mathbf{R}))$$

Damit haben wir dann

$$\langle \mathbf{R}n | \mathbf{P}^{2} | \Psi \rangle = \sum_{n'} \int d^{d} \mathbf{R}' \langle \mathbf{R}n | \mathbf{P}^{2} | \mathbf{R}'n' \rangle \Psi_{n'}(\mathbf{R}')$$
$$= \sum_{n'} \sum_{n''} \left(-i \nabla_{\mathbf{R}} \delta_{nn''} - A_{nn''}(\mathbf{R}) \right) \left(-i \nabla_{\mathbf{R}} \delta_{n''n'} - A_{n''n'}(\mathbf{R}) \right) \Psi_{n'}(\mathbf{R}), \quad (8.58)$$

und wir können die Schrödinger-Gleichungen Gl. (8.53) explizit umschreiben zu

$$\frac{-1}{2M} \sum_{n'n''} D_{nn''} D_{n''n'} \Psi_{n'}(\mathbf{R}) + (V(\mathbf{R}) + \varepsilon_n(\mathbf{R})) \Psi_n(\mathbf{R}) = E \Psi_n(\mathbf{R})$$

$$-i D_{nm}(\mathbf{R}) \equiv -i \nabla_{\mathbf{R}} \delta_{nm} - A_{nm}(\mathbf{R}), \quad \text{kovariante Ableitung.}$$
(8.59)

Hier tritt das Vektorpotential $A_{nm}(\mathbf{R})$ also wie bei der minimalen Kopplung $\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r})$ beim Vektorpotential der Elektrodynamik in der gewöhnlichen, nicht-relativistischen Schrödingergleichung, Gl. (7.85), auf. Das Vektorpotential $A_{nm}(\mathbf{R})$ hat hier allerdings nichts mit der Ladung *e* oder elektrodynamischen Phänomenen zu tun, sondern stammt aus den 'schnellen', 'inneren' Freiheitsgraden des Hilbertraums $\mathcal{H}_{\text{fast}}$.

8.3.4 Das Mead–Berry–Eichpotential

Jetzt diskutieren wir, inwiefern das Mead-Berry-Potential $A_{nm}(\mathbf{R})$ tatsächlich als ein Eichpotential aufgefasst werden kann.

Hierzu fassen wir in Analogie zur Yang-Mills-Theorie die 'langsamen' Wellenfunktionen $\Psi_n(\mathbf{R})$ als Komponenten $n = 1, 2, ..., \mathcal{N}$ eines *Materiefeldes* auf. Eichtransformationen sollen also im Raum der Indizes n operieren, und zwar wie unitäre Transformationen

$$\Psi_n(\mathbf{R}) \to \tilde{\Psi}_n(\mathbf{R}) \equiv \sum_l U_{nl}(\mathbf{R}) \Psi_l(\mathbf{R}), \quad U(\mathbf{R}) \in U(\mathcal{N}), \quad \mathcal{N} \equiv \dim \mathcal{H}_{\text{fast}}.$$
(8.60)

Unter solchen Transformationen soll die gesamte Wellenfunktion $|\Psi\rangle$ invariant bleiben, also

$$\langle \mathbf{R} | \Psi \rangle = \sum_{n} |\mathbf{R}n\rangle \langle \mathbf{R}n | \Psi \rangle = \sum_{n} |\mathbf{R}n\rangle \Psi_{n}(\mathbf{R}).$$
 (8.61)

Dazu muss sich $|\mathbf{R}n\rangle$ und damit die instantanen Basisvektoren $|n(\mathbf{R})\rangle$ des 'schnellen' Systems wie

$$|n(\mathbf{R})\rangle \rightarrow \sum_{l'} U_{l'n}^{-1}(\mathbf{R})|l'(\mathbf{R})\rangle$$
 (8.62)

transformieren: wegen $\sum_{n} U_{l'n}^{-1}(\mathbf{R}) U_{nl} = \delta_{ll'}$ gilt dann bei Eichtransformationen tatsächlich $\langle \mathbf{R} | \Psi \rangle \rightarrow \langle \mathbf{R} | \Psi \rangle$.

Für das Mead-Berry-Potential $A_{nm}(\mathbf{R})$, Gl. (8.56), bedeutet eine solche Transformation dann (Summationskonvention)

$$\begin{aligned}
A_{nm}(\mathbf{R}) &\equiv i\langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | m(\mathbf{R}) \rangle \\
&\to \tilde{A}_{nm}(\mathbf{R}) &= iU_{nk'}(\mathbf{R}) \langle k'(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} \left(|l'(\mathbf{R})\rangle U_{l'm}^{-1}(\mathbf{R}) \right) \\
&= iU_{nk'}(\mathbf{R}) \langle k'(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | l'(\mathbf{R}) \rangle U_{l'm}^{-1}(\mathbf{R}) + U_{nk'}(\mathbf{R}) \langle k'(\mathbf{R}) | l'(\mathbf{R}) \rangle i \nabla_{\mathbf{R}} U_{l'm}^{-1}(\mathbf{R}),
\end{aligned}$$
(8.63)

wobei wir wieder die Produktregel benutzt haben sowie (beachte $U_{l'n}^{\dagger} = U_{nl'}^{*}$)

$$\langle n(\mathbf{R})| \to \sum_{l'} U_{nl'}(\mathbf{R}) \langle l'(\mathbf{R})|.$$
 (8.64)

Es gilt also unter Eichtransformationen

$$A(\mathbf{R}) \to U(\mathbf{R})A(\mathbf{R})U^{-1}(\mathbf{R}) + iU(\mathbf{R})\nabla_{\mathbf{R}}U^{-1}(\mathbf{R}).$$
(8.65)

Schreiben wir die Komponenten $\Psi_n(\mathbf{R})$ der 'langsamen' Wellenfunktionen als Vektor $\Psi(\mathbf{R})$ und die kovarianten Ableitungen $D_{nn'}$ als Matrix $D(\mathbf{R})$, so ist deren Transformationsverhalten

$$|\Psi(\mathbf{R}) \to U(\mathbf{R})\Psi(\mathbf{R}), \quad D(\mathbf{R}) \to U(\mathbf{R})D(\mathbf{R})U^{\dagger}(\mathbf{R}), \quad -iD(\mathbf{R}) \equiv -i\nabla_{\mathbf{R}} - A(\mathbf{R}).$$
 (8.66)

völlig analog zu dem der Eichfelder in der Yang-Mills-Theorie: Der Name 'Eichtheorie' ist also auch hier gerechtfertigt, allerdings muss man sich noch über die physikalischen Konsequenzen Gedanken machen. 2

² Vgl. hierzu den neueren Review-Artikel 'Artificial gauge potentials for neutral atoms', J. Dalibard,
F. Gerbier, G. Juzeliunas, und P. Öhberg, Rev. Mod. Phys. 83, 1523 (2011).

8.3.5 Jenseits der Born–Oppenheimer–Näherung

Die Born–Oppenheimer–Näherung besteht im Weglassen der Mead–Berry–Eichpotentiale in den Schrödinger-Gleichungen Gl. (8.59), die dann wie folgt aussehen:

$$\left(\frac{-\nabla_{\mathbf{R}}^2}{2M} + V(\mathbf{R}) + \varepsilon_n(\mathbf{R})\right)\Psi_n(\mathbf{R}) = E\Psi_n(\mathbf{R}), \quad \text{Born-Oppenheimer-Näherung.}$$
(8.67)

Das wird exakt, wenn die instantanen Eigenvektoren $|n(\mathbf{R})\rangle$, die Lösungen von Gl. (8.49), $H_{\text{fast}}(\mathbf{R})|n(\mathbf{R})\rangle = \varepsilon_n(\mathbf{R})|n(\mathbf{R})\rangle$ sind, nicht mehr von den langsamen Koordinaten \mathbf{R} abhängen. Trotz dieser Einschränkung ist die Born–Oppenheimer–Näherung eine der wichtigsten Näherungen z.B. in der Molekülphysik: es werden zunächst die Positionen \mathbf{R} der Atomkerne als fest angenommen und hierfür das rein elektronischen Problem durch Diagonalisieren von $H_{\text{fast}}(\mathbf{R})$ gelöst. Die daraus resultierenden Energie– Funktionen $\varepsilon_n(\mathbf{R})$ stellen dann im zweiten Schritt ein zusätzliches, *n*–abhängiges Potential für die Atomkerne dar, deren Bewegung durch die $\Psi_n(\mathbf{R})$ beschrieben wird. Zur Erinnerung: Der Gesamtzustand $|\Psi\rangle$ des Gesamtsystems (Kerne plus Elektronen) setzt sich dann zusammen als

$$|\Psi\rangle = \sum_{n} \int d^{d}\mathbf{R} |\mathbf{R}n\rangle \langle \mathbf{R}n |\Psi\rangle = \sum_{n} \int d^{d}\mathbf{R} \Psi_{n}(\mathbf{R}) |\mathbf{R}n\rangle.$$
(8.68)

Die Funktionen $\varepsilon_n(\mathbf{R})$ werden bei diesem Verfahren häufig näherungsweise berechnet.³

Der nächste Schritt über die Born–Oppenheimer–Näherung hinaus besteht darin, das exakte System Gl. (8.59) durch $\mathcal{N} \leq \mathcal{N}_f \equiv \dim(\mathcal{H}_{\text{fast}})$ Gleichungen zu approximieren (*Born–Huang–Näherung*);

$$\frac{-1}{2M} \sum_{n'=1}^{\mathcal{N}} \left(\sum_{n''=1}^{\mathcal{N}} D_{nn''} D_{n''n'} - \sum_{n''=\mathcal{N}+1}^{\mathcal{N}_f} A_{nn''}(\mathbf{R}) A_{n''n'}(\mathbf{R}) \right) \Psi_{n'}(\mathbf{R}) + (V(\mathbf{R}) + \varepsilon_n(\mathbf{R})) \Psi_n(\mathbf{R}) = E \Psi_n(\mathbf{R}).$$
(8.69)

Hierbei wird der Term, der quadratsch in den Vektorpotentialen ist, sogar exakt berücksichtigt (was eigentlich nicht ganz konsequent ist). Nimmt man hier nur $\mathcal{N} = 1$ Term zum schnellen Anteil $|n(\mathbf{R})\rangle$ mit, so wird daraus

$$\left(\frac{-D^2}{2M} + V(\mathbf{R}) + \varepsilon_n(\mathbf{R})\right) \Psi_n(\mathbf{R}) = E \Psi_n(\mathbf{R}) \quad (8.70)$$
$$-iD(\mathbf{R}) \equiv -i\nabla_{\mathbf{R}} - A(\mathbf{R}), \quad A(\mathbf{R}) \equiv i\langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | n(\mathbf{R}) \rangle. \quad (8.71)$$

³ Zum Beispiel über das Rayleigh-Ritz-Variationsverfahren. Es ist sehr instruktiv, sich das für das H_2^+ -Molekül im Detail anzuschauen. Im einfachsten Fall nimmt man $\mathcal{N} = 2$ elektronische Zustände (bindend und anti-bindend), die dann entsprechend zu zwei Funktionen $\varepsilon_{\pm}(\mathbf{R})$ führen, vgl. SKRIPT 'QUANTUM MECHANICS OF ATOMS AND MOLECULES' (U Manchester).

Wir erhalten also eine um das Eichpotential korrigierte Born–Oppenheimer–Näherung.

Ein interessanter Aspekt der diversen Näherungen findet sich anhand des Feldstärketensors zum Mead-Berry Eichpotential

$$F_{ij}^{nm} \equiv \partial_i A_j^{nm} - \partial_j A_i^{nm} - i[A_i, A_j]^{nm} = i[D_i, D_j]^{nm}, \quad \text{Feldstärketensor} , \qquad (8.72)$$

in dem sich i, j auf die räumlichen Komponenten und n, m auf die instantanen Basisvektoren beziehen.

Wird an dem exakten System Gl. (8.59) der Schrödingergleichungen zusammen mit den exakten instantanen Eigenvektoren $|n(\mathbf{R})\rangle$ von Gl. (8.49) keine Näherung gemacht, so ist der Feldstärketensor Gl. (8.72) Null. Die Eichtheorie ist dann 'trivial' in dem Sinn, dass keine echten 'Kräfte' auftreten, die den elektromagnetischen Feldern im EM entsprechen würden. ⁴ Das Verschwinden von F_{ij}^{nm} folgt in diesem Fall einfach aus der Vollständigkeit der instantanen Eigenbasis (AUFGABE);

$$\sum_{n} |n(\mathbf{R})\rangle \langle n(\mathbf{R})| = 1_{\text{fast}}.$$
(8.73)

Wird das exakte System Gl. (8.59) genähert, z.B. durch die 'korrigierte' Born-Oppenheimer-Näherung Gl. (8.70) mit $\mathcal{N} = 1$ zum schnellen Eigenwert $\varepsilon_n(\mathbf{R})$. Das Mead-Berry-Potential ist dann ein abelsches U(1)-Eichpotential, und der Feldstärketensor wird zu $F_{ij} \equiv \partial_i A_j - \partial_j A_i$, d.h. ohne Kommutator-Term. Im Allgemeinen ist dieser Feldstärketensor dann nicht Null.

8.4 Die geometrische Phase

Zum Abschluss beschäftigen wir uns jetzt mit einer interessanten physikalischen Konsequenz des Mead–Berry–Eichpotentials Gl. (8.56).

8.4.1 Die Berry–Phase

Wir folgen hier im wesentlichen Berry's Originalarbeit. ⁵ Wie im vorherigen Abschnitt betrachten wir einen Hamiltonian $H(\mathbf{R})$ mit einer parametrischen Abhängigkeit von einer Ortskoordinate $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^d$, wobei wir jetzt den Index 'schnell' ('fast') weglassen und $H(\mathbf{R})$ als 'alleinstehenden' Hamiltonian eines Systems auffassen, das 'langsam' von außen gesteuert wird. Der Vektor \mathbf{R} soll sich dabei mit einer von außen vorgegebenen Zeitabhängigkeit 'langsam' ändern, d.h eine Kurve $t \to \mathbf{R}_t$ im \mathbb{R}^d durchlaufen.

Zu jedem Zeitpunkt t definieren wir wieder ein instantanes Basissystem $\{|n(\mathbf{R}_t)\rangle\}$ über die Eigenwertgleichung

$$H(\mathbf{R}_t)|n(\mathbf{R}_t)\rangle = \varepsilon_n(\mathbf{R}_t)|n(\mathbf{R}_t)\rangle, \quad \langle n(\mathbf{R}_t)|n'(\mathbf{R}_t)\rangle = \delta_{nn'}.$$
 (8.74)

⁴ Allerdings können für nicht-triviale Aharonov-Bohm-artige Phasen auftreten, vgl. BOHM, MO-STAFAZADEH, KIZUMI, NIU, ZWANZIGER.

⁵ M. Berry, Proc. R. Soc. Lond. A **392**, 45-57 (1984), auf Berry's home-page erhältlich.

Jetzt betrachten wir die Zeitentwicklung eines Zustands $|\Psi(t)\rangle$ mit dem zeitabhängigen Hamiltonian $H(\mathbf{R}_t)$ im Rahmen der *adiabatischen Näherung*.

Adiabatische Näherung: Sei der Anfangszustand $|\Psi(t=0)\rangle = |n(\mathbf{R}_0)\rangle$ ein instantaner Eigenzustand von $H(\mathbf{R}_t)$ zur Zeit t = 0. Dann bleibt bei *langsamer* Veränderung von \mathbf{R}_t der Zustand $|\Psi(t \ge 0)\rangle$ im eindimensionalen Unterraum span $(|n(\mathbf{R}_t)\rangle)$, d.h.

$$|\Psi(t)\rangle = c_n(t)|n(\mathbf{R}_t)\rangle, \quad \text{adiabatische N\"aherung.}$$
(8.75)

Die Gültigkeit der adiabatischen Näherung diskutieren wir hier nicht (vgl. QM–Lehrbücher).

Da die Zeitentwicklung unitär ist, ist $c_n(t)$ ein Phasenfaktor, und wir schreiben

$$|\Psi(t)\rangle = \exp\left(i\frac{-1}{\hbar}\int_0^t \varepsilon_n(\mathbf{R}_{t'})\right) \exp\left(i\gamma_n(t)\right)|n(\mathbf{R}_t)\rangle.$$
(8.76)

Die erste Phase $\frac{-1}{\hbar} \int_0^t \varepsilon_n(\mathbf{R}_{t'})$ ist hierbei die gewöhnliche *dynamische* Phase, die aus der Zeitentwicklung eines Eigenzustands für konstanten Hamiltonian bekannt ist (QM1). Die zweite Phase, $\gamma_n(t)$, führt zur geometrischen Phase, wenn eine geschlossene Kurve im Parameterraum \mathbb{R}^d mit $\mathbf{R}_T = \mathbf{R}_0$ zur Zeit t = T betrachtet wird. Hierzu leiten wir zunächst die Bewegungsgleichung für $\gamma_n(t)$ aus der zeitabhängigen Schrödingergleichung her (einfache AUFGABE),

$$\dot{\gamma}_n(t) = A_n(\mathbf{R}_t) \dot{\mathbf{R}}_t, \quad A_n(\mathbf{R}) \equiv i \langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | n(\mathbf{R}) \rangle.$$
(8.77)

Hierbei tritt wieder das uns bereits bekannte Mead-Berry-Eichpotential auf, wobei hier wegen der adiabatischen Näherung nur der Diagonalterm $A_n(\mathbf{R}) \equiv A_{nn}(\mathbf{R})$ vorkommt, vgl. Gl. (8.56). Für eine geschlossene Kurve C im Parameterraum \mathbb{R}^d mit $\mathbf{R}_T = \mathbf{R}_0$ zur Zeit t = T definieren wir nun

$$\gamma_n(C) \equiv \int_0^T \dot{\gamma}_n(t) = \oint_C A_n(\mathbf{R}) d\mathbf{R} = i \oint_C \langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | n(\mathbf{R}) \rangle d\mathbf{R} \quad (8.78)$$

Berry–Phase.

Aus Differenzieren von der Normierungsbedingung von $|n(\mathbf{R})\rangle$ folgt, dass $\langle n(\mathbf{R})|\nabla_{\mathbf{R}}|n(\mathbf{R})\rangle d\mathbf{R}$ rein imaginär ist. Deshalb ist $\gamma_n(C)$ rein reell und verdient den Namen 'Phase'.

Die wichtigste Eigenschaft von $\gamma_n(C)$ ist seine Unabhängigkeit davon, zu welchen Zeiten t die einzelnen Punkte \mathbf{R}_t der Parameterkurve C angesteuert werden (vorausgesetz, die adiabatische Näherung wird eingehalten): Das Kurvenintegral hängt nur von der Geometrie der Kurve C im Parameterraum ab.

Als nächstes zeigen wir

Satz 19. Die Berry-Phase $\gamma_n(C)$ ist bis auf Vielfache von 2π eindeutig und invariant unter U(1)-Eichtransformationen der instantanen Basisvektoren $|n(\mathbf{R})\rangle \rightarrow e^{i\zeta_n(\mathbf{R})}|n(\mathbf{R})\rangle$.

Beweis: Das Mead–Berry–Eichpotential $A_n(\mathbf{R})$ transformiert sich unter solchen Eichtransformationen nämlich wie

$$A_n(\mathbf{R}) \to A_n(\mathbf{R}) - \nabla_{\mathbf{R}} \zeta_n(\mathbf{R})$$
 (8.79)

(das ist ein Spezialfall von Gl. (8.65); hier ist die Eichgruppe einfach die Gruppe U(1) der Phasenfaktoren). Das Kurvenintegral über einen Gradienten verschwindet aber, so dass $\gamma_n(C)$ unabhängig von der Eichung ist, qed.

Wieder erkennen wir in dem Mead-Berry-Eichpotential eine Analogie zum Vektorpotential der Elektrodynamik, genauer gesagt der Magnetostatik: ein Kurvenintegral $\oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ entsprach dort mit dem Satz von Stokes und wegen $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ dem magnetischen Fluss durch die von der geschlossenen Kurve C aufgespannten Fläche F_C ;

$$\oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{F_C} d^2 \mathbf{r} \mathbf{B}(\mathbf{r}).$$
(8.80)

Im Falle eines d = 3-dimensionalen Parameterraums \mathbb{R}^3 können wir die Formel für die Berry-Phase mit Hilfe des Kreuzprodukts umschreiben. Es gilt zunächst

$$\gamma_n(C) = i \int_{F_C} d^2 \mathbf{R} \nabla_{\mathbf{R}} \times \langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | n(\mathbf{R}) \rangle.$$
(8.81)

Wieder in Analogie zur Magnetostatik können wir jetzt eine reelle 'magnetische Feldstärke' \mathbf{F}_n definieren via

$$\mathbf{F}_{n}(\mathbf{R}) \equiv \nabla_{\mathbf{R}} \times A_{n}(\mathbf{R}) = i \nabla_{\mathbf{R}} \times \langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | n(\mathbf{R}) \rangle$$
(8.82)

und deren Komponenten als Elemente eines Tensors zweiter Stufe in drei Dimensionen, also einer schiefsymmetrischen 3×3 -Matrix ('Feldstärketensor') schreiben, nämlich über

$$F_n^{ij}(\mathbf{R}) \equiv \partial_{R_i} A_n^j - \partial_{R_j} A_n^i, \quad i, j, = 1, 2, 3,$$
(8.83)

wobei i und j sich auf die Komponenten von **R** beziehen.

Wir benutzen das Nabla-Kalkül mit

$$\nabla \times (u\mathbf{v}) = u\nabla \times \mathbf{v} + (\nabla u) \times \mathbf{v} \tag{8.84}$$

sowie $\nabla \times \nabla = 0$ und schreiben um,

$$\mathbf{F}_{n}(\mathbf{R}) = i \langle \nabla_{\mathbf{R}} n(\mathbf{R}) | \times | \nabla_{\mathbf{R}} n(\mathbf{R}) \rangle = i \sum_{m \neq n} \langle \nabla_{\mathbf{R}} n(\mathbf{R}) | m(\mathbf{R}) \rangle \times \langle m(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} n(\mathbf{R}) \rangle, \qquad (8.85)$$

wobei wir im letzten Schritt eine vollständige Eins von Basisvektoren eingeschoben haben und den m = n-Term weglassen dürfen, weil $\langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | n(\mathbf{R}) \rangle$ rein imaginär ist.

Als nächstes benutzen wir die nützliche Identität

$$\langle m(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | n(\mathbf{R}) \rangle = \frac{\langle m(\mathbf{R}) | (\nabla_{\mathbf{R}} H(\mathbf{R})) | n(\mathbf{R}) \rangle}{\varepsilon_n(\mathbf{R}) - \varepsilon_m(\mathbf{R})},$$
(8.86)

in der nur noch der Hamiltonian (und nicht die instantanen Eigenvektoren) differenziert werden müssen. Wir erhalten sie durch Differenzieren der Eigenwertgleichung $H(\mathbf{R})|n(\mathbf{R})\rangle = \varepsilon_n(\mathbf{R})|n(\mathbf{R})\rangle$ (AUFGABE). Damit werden die Feldstärke und die Berry-Phase zu⁶

$$\mathbf{F}_{n}(\mathbf{R}) = i \sum_{m \neq n} \frac{\langle n(\mathbf{R}) | (\nabla_{\mathbf{R}} H(\mathbf{R})) | m(\mathbf{R}) \rangle \times \langle m(\mathbf{R}) | (\nabla_{\mathbf{R}} H(\mathbf{R})) | n(\mathbf{R}) \rangle}{(\varepsilon_{n}(\mathbf{R}) - \varepsilon_{m}(\mathbf{R}))^{2}} \quad (8.87)$$
$$\gamma_{n}(C) = \int_{F_{C}} d^{2} \mathbf{R} \mathbf{F}_{n}(\mathbf{R}). \quad (8.88)$$

Die Feldstärke $\mathbf{F}_n(\mathbf{R})$ erkennen wir in dieser Formel als 'manifest' (direkt offensichtlich) eichinvariant: Eichphasenfaktoren heben sich weg. Damit ist auch die Berry–Phase manifest eichinvariant.

Die Berry–Phase ist nicht nur für d = 3, sondern auch für allgemein d–dimensionale Parameterräume mit $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^d$ definiert. Allerdings muss dann der Feldstärketensor mit Hilfe von Differentialformen verallgemeinert werden, vgl. wieder BOHM, MOSTAFAZADEH, KIZUMI, NIU, ZWANZIGER.

8.4.2 Beispiel: Spin $-\frac{1}{2}$

Wir betrachten ein Beispiel für d = 3. Aus Gl. (8.87) erkennen wir, dass $\mathbf{F}_n(\mathbf{R})$ und damit die Berry-Phase von Zuständen $|m(\mathbf{R})\rangle$ mit $\varepsilon_n(\mathbf{R}) \approx \varepsilon_m(\mathbf{R})$ dominiert wird. Im einfachsten Fall haben wir nur zwei Zustände $|\pm(\mathbf{R})\rangle$, z.B. als instantane Eigenzustände des Hamiltonians

$$H(\mathbf{R}) = \frac{\alpha}{2}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{R} = \frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} Z & X - iY \\ X + iY & -Z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = (X, Y, Z)^T$$
(8.89)

mit dem Vektor der Pauli–Matrizen und einer Konstanten α . Die Zustände $|\pm (\mathbf{R})\rangle$ haben die Eigenenergien

$$\varepsilon_{\pm}(\mathbf{R}) = \pm \frac{\alpha}{2} |\mathbf{R}|. \tag{8.90}$$

Man kann den Vektor $\mathbf{R}(t)$ hier durch Vergleich mit dem Zeeman-Hamiltonian Gl. (8.40) als ein 'Magnetfeld' auffassen. Die adiabatische Näherung bedeutet dann, dass z.B. ein $|+(\mathbf{R})\rangle$ -Eigenzustand immer der Richtung des Magnetfeldes adiabatisch 'folgt' und ein +-Eigenzustand bleibt.

Wir berechnen die Feldstärken $\mathbf{F}_{\pm}(\mathbf{R})$, also z.B.

$$\mathbf{F}_{+}(\mathbf{R}) = i\frac{1}{4}\frac{\langle +(\mathbf{R})|\boldsymbol{\sigma}| - (\mathbf{R})\rangle \times \langle -(\mathbf{R})|\boldsymbol{\sigma}| + (\mathbf{R})\rangle}{|\mathbf{R}|^{2}}.$$
(8.91)

Für $\mathbf{R} = \mathbf{e}_z$ sind die Eigenzustände $|+(\mathbf{e}_z)\rangle = \begin{pmatrix} 1\\ 0 \end{pmatrix}, |-(\mathbf{e}_z)\rangle = \begin{pmatrix} 0\\ 1 \end{pmatrix}$, und die direkte Berechnung des Kreuzprodukts liefert (AUFGABE)

$$\mathbf{F}_{+}(\mathbf{e}_{z}) = -\frac{\mathbf{e}_{z}}{2|\mathbf{R}|^{2}}.$$
(8.92)

⁶ Das Vorzeichen von $\mathbf{F}_n(\mathbf{R})$ ist hier wie in BOHM, MOSTAFAZADEH, KIZUMI, NIU, ZWANZIGER und gerade das Negative von dem in Berry's Arbeit.

Aus Symmetriegründen muss dieses Ergebnis entsprechend auch für eine beliebige Richtung $\mathbf{R}/|\mathbf{R}|$ gelten, also

$$\mathbf{F}_{+}(\mathbf{R}) = -\frac{\mathbf{R}}{2|\mathbf{R}|^{3}}.$$
(8.93)

Durch diesen Trick erspart man sich das direkte Berechnen der Eigenzustände $|\pm(\mathbf{R})\rangle$.

Die Feldstärke $\mathbf{F}_{+}(\mathbf{R})$ entspricht einer fiktiven Punktladung der Stärke $-\frac{1}{2}$, die am Ursprung des Koordinatensystems sitzt. Die Berry–Phase

$$\gamma_{+}(C) = \int_{F_{C}} d^{2}\mathbf{RF}_{+}(\mathbf{R}) = -\frac{1}{2} \int_{F_{C}} d\mathbf{F} \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^{3}}$$
(8.94)

wird dann durch den entsprechend von dieser fiktiven Ladung erzeugten Fluß durch die von der Kurve C aufgespannte Fläche F_C mit Flächenelement $d\mathbf{F}$ bestimmt. Wegen $\mathbf{F}_+(\mathbf{R}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}_n(\mathbf{R})$ ist die Feldstärke formal eigentlich eine magnetische Feldstärke, und die Ladung wird deshalb häufig als fiktiver magnetischer Monopol bezeichnet.

Wenn man das Flächenelement formal als

$$d\mathbf{F} = R^2 \mathbf{e}_R d\Omega, \quad \mathbf{e}_R \equiv \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}$$
(8.95)

schreibt, wird $d\Omega$ als Differential des Raumwinkels bezeichnet und

$$\gamma_{+}(C) = -\frac{1}{2} \int_{C} d\Omega = -\frac{1}{2} \Omega(C).$$
 (8.96)

Hierbei wird $\Omega(C)$ als der von der Kurve C aufgespannte Raumwinkel bezeichnet, dessen Bedeutung man sich am besten an einer SKIZZE klarmacht.

Wenn z.B. $\mathbf{R} = (X, 0, Z)$ nur in der X-Z-Ebene verläuft, ist die Situation ganz einfach: Wenn die geschlossene Kurve C außerhalb des Ursprungs verläuft, ist der Fluss und damit $\gamma_+(C)$ Null. Wenn andererseits der Ursprung innerhalb von C liegt, ist $\Omega(C)$ unabhängig von der Form der Fläche, die C berandet⁷: man kann z.B. eine Halbkugel wählen und hat deshalb $\Omega(C) = 2\pi$ und damit $\gamma_+(C) = -\pi$. Der Berry-Phasenfaktor für den Transport des adiabatischen Zustands $| + (\mathbf{R}) \rangle$ um die Entartung bei $\mathbf{R} = 0$ ist dann also $e^{i\gamma_+(C)} = -1$ (SKIZZE). Im Fall $\mathbf{R} = (X, 0, Z)$ wird die Berry-Phase so zu einer topologischen Phase, denn es kommt auf die Form der Kurve C gar nicht mehr an: man kann sie beliebig deformieren, solange man sie nicht über die Singularität (den Entartungspunkt) bei $\mathbf{R} = 0$ herüberzieht.

8.5 Topologische Phasen

8.5.1 Der Aharonov-Bohm-Effekt

(SKRIPT QM I). In der QM sind nicht nur die Felder **E** und **B**, sondern auch die *Potentiale* (Vektor- und skalar) physikalisch wirksam. Wir zeigen das am Beispiel des Vektorpotentials **A** mit dem **Aharonov-Bohm-Effekt**⁸.

⁷ Wir hatten das z.B. ganz am Anfang in der Elektrostatik bei der Ableitung des Gaußschen Gesetzes aus dem Coulomb-Gesetz gezeigt. Mathematisch liegt diese unabhängigkeit an div $\mathbf{F}_{+}(\mathbf{R}) = 0$ für $\mathbf{R} \neq 0$.

⁸ Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. **115**, 485 (1959).

Ein Elektron bewege sich in der x-y-Ebene, in der Ursprung senkrecht in z-Richtung von einer undurchlässigen Spule durchstoßen sei. Das Elektron bewege sich nur in einem Gebiet Ω außerhalb der Spule - topologisch gesehen ist dieses Gebiet also nicht einfach zusammenhängend (man kann keine Schleife um die Spule legen und die Schleife ganz auf einen Punkt zusammenziehen). Eine einfache Idealisierung ist eine sehr dünne Spule mit Magnetfeld

$$\mathbf{B} = \Phi \delta^{(2)}(x, y) \mathbf{e}_z. \tag{8.97}$$

Hierbei ist Φ der magnetische Fluß durch die Spule, d.h.

$$\int dx dy \mathbf{B} \mathbf{e}_z = \Phi. \tag{8.98}$$

Das Magnetfeld wirkt nur innerhalb, aber nicht außerhalb der Spule und deshalb nicht direkt auf das Elektron. Insbesondere wirkt keine Lorentzkraft auf das Elektron. Trotzdem hat das Magnetfeld einen Effekt, aber nur über sein *Vektorpotential*: In ebenen Polarkoordinaten (r, θ) schreiben wir dieses als

$$\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \mathbf{e}_{\theta} \rightsquigarrow \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0, \quad r \neq 0, \quad \oint \mathbf{A} d\mathbf{r} = \int dx dy \mathbf{B} \mathbf{e}_{z} = \Phi, \quad (8.99)$$

d.h. wir erhalten über den Stokesschen Integralsatz den korrekten Fluß mit dieser Wahl von \mathbf{A} .

Wir lösen nun die stationäre SG auf einem eindimensionalen Ring mit Radius r > 0, auf dem sich das Elektron in in der x-y-Ebene bewege: man braucht dann nur die θ -Richtung des Impulsoperators,

$$\mathbf{e}_{\theta}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right) = \frac{\hbar}{i}\frac{1}{r}\partial_{\theta} - \frac{e}{c}\frac{\Phi}{2\pi r},\tag{8.100}$$

also ist der Hamiltonian

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 = -\frac{\hbar^2}{2mr^2} \left(\partial_\theta - i \frac{e\Phi}{c2\pi\hbar} \right)^2 = -\frac{\hbar^2}{2mr^2} \left(\partial_\theta - i \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2$$

$$\Phi_0 \equiv \frac{2\pi\hbar c}{e}, \quad \text{Fluß-Quant} . \tag{8.101}$$

Wir erhalten also die SG

$$\hat{H}\psi(\theta) = E\psi(\theta) \rightsquigarrow \left[\left(\partial_{\theta} - i\frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 + \frac{2mr^2}{\hbar^2} E \right] \psi(\theta) = 0$$
(8.102)

Mit dem Ansatz $\psi(\theta) = e^{in\theta}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ erhalten wir auf dem Ring eindeutige Lösungen, $\psi(\theta) = \psi(\theta + 2\pi m)$,

$$\left(in - i\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 + \frac{2mr^2}{\hbar^2}E = 0 \rightsquigarrow E_n = \frac{\hbar^2}{2mr^2}\left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2.$$
(8.103)

Das Spektrum der Eigenwerte hängt also von Φ/Φ_0 ab, obwohl klassisch gar kein Magnetfeld auf das Elektron wirkt! Für $\Phi/\Phi_0 = 0$ oder $\Phi/\Phi_0 = k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ sind die Eigenwerte einfach die uns bereits bekannten E_n des freien Teilchens auf einem 'zusammengebogenen Kasten' der Länge $2L = 2\pi r$ (Intervall [-L, L], Wellenfunktionen $\propto e^{i\frac{n\pi}{L}x}$, periodische Randbedingungen),

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2} = \frac{\hbar^2 n^2}{2mr^2}.$$
(8.104)

8.5.2 Aharonov–Bohm–Phase

Kann man das Vektorpotential wegtransformieren? Diese Frage können wir uns z.B. im obigen Beispiel des Teilchens auf dem Ring stellen, der von einem Aharonov-Bohm-Fluß $\Phi = \int dx dy \mathbf{Be}_z$ durchstoßen wird. Man wäre versucht, die Wellenfunktion $\psi(\theta)$ umzutransformieren durch Einführen eines neuen Vektorpotentials **A** mit gleicher Rotation rot **A** = **B** = 0 wie in Gl. (7.88)

$$\psi(\theta) = e^{i\frac{\Phi}{\Phi_0}\theta}\tilde{\psi}(\theta) \rightsquigarrow \left[\partial_{\theta}^2 + \frac{2mr^2}{\hbar^2}E\right]\tilde{\psi}(\theta) = 0, \quad \text{funktioniert nicht!}$$
(8.105)

wobei $\tilde{\psi}$ die SG ohne den Aharonov-Bohm-Fluß erfüllt. Das funktioniert nicht, denn damit wäre die WF $\psi(\theta)$ nicht mehr eindeutig: Bei Ersetzen von $\theta \to \theta + 2\pi k, k \in \mathbb{N}$ hätte man

$$\psi(\theta + 2\pi k) = e^{i\frac{\Phi}{\Phi_0}(\theta + 2\pi k)}\tilde{\psi}(\theta) = e^{i\frac{\Phi}{\Phi_0}2\pi k}\psi(\theta) \neq \psi(\theta), \qquad (8.106)$$

ausgenommen die Spezialfälle, wo $\frac{\Phi}{\Phi_0}$ ganzzahlig ist und wir bereits aus Gl. (8.103) wissen, daß sich gegenüber dem Fluß-freien Fall nichts am Spektrum ändert.

Allgemein stellen wir uns die Frage, wann wir in einem Magnetfeld-freien Gebiet Ω ein Vektorpotential **A** mit rot $\mathbf{A} = \mathbf{B} = 0$ auf Null umeichen können, um z.B. mit dem einfacheren Hamiltonian $\hat{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + e\Phi$ arbeiten zu können. Die Eichinvarianz-Bedingung Gl. (7.88) lautet dann explizit (wir betrachten hier nur den zeitunabhängigen Fall)

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \nabla \chi(\mathbf{x}) = 0. \tag{8.107}$$

Das ist eine DGL für die gesuchte skalare Funktion $\chi(\mathbf{x})$, die in der klassischen Mechanik der Definition des Potentials V einer Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x})$ entspräche. Es gilt

Satz 20. Ein Vektorfeld $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ auf einem Gebiet Ω des \mathbb{R}^3 hat ein Potential, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x})$, wenn gilt: a) rot $\mathbf{F} = 0$ in Ω , b) Ω ist einfach zusammenhängend. Explizit hat man

$$V(\mathbf{x}) = -\int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} d\mathbf{s} \mathbf{F}(\mathbf{s}), \qquad (8.108)$$

ein wegunabhängiges Kurvenintegral zwischen einem Aufpunkt \mathbf{x}_0 und dem Punkt \mathbf{x} .

Punkt b) ist hier entscheidend: im Beispiel eines ringförmigen Gebiets Ω in der *x-y*-Ebene um einen Aharonov-Bohm-Fluß ist Ω z.B. *nicht* einfach zusammenhängend, und es existiert deshalb kein eindeutiges $\chi(\mathbf{x})$, dessen Gradient das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ des Flusses wegtransformieren könnte.

Angewendet auf $\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \nabla \chi(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{A}} = 0$ transformieren wir für ein einfach zusammenhängendes, Magnetfeld-freies Gebiet Ω die Wellenfunktionen $\Psi(\mathbf{x}, t)$ so um, dass sie einer neuen Schrödingergleichung mit Vektorpotential $\tilde{\mathbf{A}} = 0$ genügen. Die neuen Wellenfunktionen haben dann also nach Gl. (7.88) die Form

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{x},t) = \Psi(\mathbf{x},t)e^{i\frac{e}{c\hbar}\chi(\mathbf{x})} = \Psi(\mathbf{x},t)\exp\left(-i\frac{e}{c\hbar}\int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} d\mathbf{s}\mathbf{A}(\mathbf{s})\right)$$
(8.109)

Auf der rechten Seite der Gleichung sind beide Faktoren von \mathbf{A} abhängig, und man interpretiert sie besser durch Umstellen

$$\Psi(\mathbf{x},t) = \tilde{\Psi}(\mathbf{x},t) \exp\left(i\frac{e}{c\hbar} \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} d\mathbf{s} \mathbf{A}(\mathbf{s})\right).$$
(8.110)

Wir wenden das auf ein (fast) ringförmiges, einfach zusammenhängendes Gebiet Ω (z.B. aufgeschnittener Ring) um einen Aharonov-Bohm-Fluß Φ an: Im Vergleich zur **A**-freien Wellenfunktion $\tilde{\Psi}(\mathbf{x},t)$ (ohne den Faktor $e^{-i\frac{e}{ch}\int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} d\mathbf{s} \mathbf{A}(\mathbf{s})}$) nimmt die tatsächliche Wellenfunktion beim Umlaufen des Aharonov-Bohm-Flusses (z.B. von rechts $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{0,R}$ hin zu links $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{0,L}$ von einer Trennwand im Ring, SKIZZE) einen Aharonov-Bohm-Phasenfaktor

$$e^{i\frac{e}{c\hbar}\int_{\mathbf{x}_{0,R}}^{\mathbf{x}_{0,L}}d\mathbf{s}\mathbf{A}(\mathbf{s})} = e^{i\frac{e}{c\hbar}\oint\mathbf{A}d\mathbf{r}} = e^{i\frac{\Phi}{\Phi_0}}, \quad \text{Aharonov-Bohm-Phasenfaktor} \quad (8.111)$$

$$\Phi_0 \equiv \frac{2\pi\hbar c}{e}, \quad \text{Fluß-Quant}. \quad (8.112)$$

auf, der vom Fluss herrührt.

Man kann jetzt auch die Streuung eines Elektrons berechnen, das sich frei in der x-y-Ebene bewegt. Zwischen Trajektorien von Wellenpaketen, die oberhalb bzw. unterhalb der Spule laufen, entsteht dann eine Aharonov-Bohm-Phase, die in Interferenzexperimenten beobachtet wird. Wiederum ist das ein reiner Quanteneffekt, denn es wirkt ja nirgends ein Magnetfeld auf das Elektron. Die Interferenz ist hier von *topologischer* Natur.

ANHANG

A. VEKTORANALYSIS

A.1 Vektorfelder

Definition Eine Abbildung

$$R^n \to R^m, \quad \mathbf{x} \equiv (x_1, ..., x_n)^T \to \mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))^T$$
 (A.1)

heißt m-dimensionales Vektorfeld.

Jedem Vektor \mathbf{x} wird ein Vektor $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ zugeordnet. Für m > 1 hat man tatsächlich einen Vektor \mathbf{f} (und keinen Skalar).

Definition Der Spezialfall m = 1,

$$R^n \to R, \quad \mathbf{x} \equiv (x_1, ..., x_n)^T \to f(\mathbf{x}) \equiv f(x_1, ..., x_n)$$
 (A.2)

heißt skalares Feld (Skalarfeld).

Im Druckbild schreibt man das f in Skalarfeldern $f(\mathbf{x})$ nicht fett, in Vektorfeldern $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ schreibt man es fett.

AUFGABE: Skizziere die Skalarfelder n = 2

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1, \quad g(x,y) = x^2 - y^2.$$
 (A.3)

AUFGABE: Skizziere das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x,y) = (y,-x). \tag{A.4}$$

A.2 Gradient

A.2.1 Definition

Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine skalare, reelle Funktion von n Variablen,

$$\mathbf{x} \to f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)^T, \quad \text{skalares Feld } f$$
 (A.5)

Für differenzierbare Funktionen definieren wir die **Richtungsableitung** in Richtung eines Einheitsvektors \mathbf{v} ,

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}f(\mathbf{x}) \equiv \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{t}.$$
 (A.6)

Die Richtungsableitung ist also einfach die Ableitung der Funktion f entlang der Raumkurve $t \to \mathbf{x} + t\mathbf{v}$.

BEISPIEL und INTERPRETATION: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Skalarfeld, die Werte von f bilden einen 'Teppich' über der *x-y*-Ebene. Vom Punkt **x** fahren wir eine Strecke t**v** in **v**-Richtung (Geschwindigkeit **v**). Die Richtungsableitung beschreibt, wie stark sich der Wert von f dabei ändert.

Wir berechnen die Richtungsableitung mit Hilfe der Kettenregel:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f(\mathbf{x}) = \left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) \right|_{t=0} \\
= \left. \frac{d}{dt} f(x_1 + tv_1, \dots, x_n + tv_n) \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}) \left. \frac{d}{dt} (x_i + tv_i) \right|_{t=0} \\
= \left. \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \nabla f(\mathbf{x}), \quad (A.7)$$

wobei wir den Gradienten

$$\nabla f(\mathbf{x}) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(\mathbf{x}), ..., \frac{\partial}{\partial x_n} f(\mathbf{x})\right)$$
(A.8)

definiert haben. Die Richtungsableitung ist also durch das Skalarprodukt gegeben,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f(\mathbf{x}) = (\nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{v}), \quad \text{Richtungsableitung und Gradient.}$$
(A.9)

Bemerkungen:

- Der Gradient im Punkt **x** ist selbst ein *n*-dimensionaler 'Vektor' (siehe aber auch unten). Die Abbildung $\mathbf{x} \to \nabla f(\mathbf{x})$ ordnet jedem Vektor **x** einen Vektor $\nabla f(\mathbf{x})$ zu, ist also ein **Vektorfeld**.
- Die Richtungsableitung ist wegen des Skalarprodukts maximal, wenn \mathbf{v} und $\nabla f(\mathbf{x})$ die gleiche Richtung haben. Der Gradient gibt deshalb die *Richtung des stärksten* Anstiegs von f an.
- In einem festen Punkt **x** ordnet der Gradient $\nabla f(\mathbf{x})$ jedem Vektor **v** die reelle Zahl $(\nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{v})$ zu, nämlich die Richtungsableitung von f in Richtung **v**: so gesehen ist $\nabla f(\mathbf{x})$ also eine Linearform.

A.2.2 Der Gradient in krummlinigen Koordinaten

Wir betrachten die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ entlang einer Kurve $\mathbf{x}(t)$. In kartesischen Koordinaten gilt nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}) \frac{dx_i}{dt} = (\nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{x}}.$$
(A.10)

Jetzt beschreiben wir diese Kurve in krummlinigen Koordinaten u^j , so dass $x^i = x^i(u^j)$ (wir unterscheiden wieder zwischen ko- und kontravarianten Koordinaten). Wir bilden die Ableitung der Funktion in krummlinigen Koordinaten

$$\frac{d}{dt}f(u^{1}(t),...,u^{n}(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u^{i}} f\frac{du^{i}}{dt} \equiv (\nabla f, \mathbf{v}), \tag{A.11}$$

was wegen $\mathbf{v} = \dot{u}^j \mathbf{g}_j$ auf

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial u^i} \mathbf{g}^i$$
, Gradient in krummlinigen Koordinaten (A.12)

führt, denn wegen $\mathbf{g}^i \mathbf{g}_j = \delta^i_j$ gilt

$$(\nabla f, \mathbf{v}) = \frac{\partial f}{\partial u^i} \mathbf{g}^i \dot{u}^j \mathbf{g}_j = \frac{\partial f}{\partial u^i} \dot{u}^i.$$
(A.13)

An der Darstellung Gl. (A.12) erkennt man, dass der Gradient im Punkt $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, ..., u^n)$ eine Linearform ist, die auf Vektoren \mathbf{v} wirkt. Deshalb schreibt sich ∇f als Linearkombinationen der kontravarianten Basisvektoren \mathbf{g}^i . Man kann ∇f aber auch wieder als Vektor auffassen, wenn man die \mathbf{g}^i durch die \mathbf{g}_j ausdrückt. Häufig möchte man ∇f in einer *normierten* Basis \mathbf{g}_j mit $|\mathbf{g}_j| = 1$ ausdrücken, d.h. man definiert

$$\mathbf{g}_j^* \equiv \frac{\mathbf{g}_j}{|\mathbf{g}_j|} \tag{A.14}$$

und schreibt

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial u^i} \mathbf{g}^i = \frac{\partial f}{\partial u^i} g^{ij} \mathbf{g}_j = \frac{\partial f}{\partial u^i} g^{ij} |\mathbf{g}_j| \mathbf{g}_j^*.$$
(A.15)

Für orthogonale Koordinaten ist der Metriktensor diagonal,

$$g_{ij} = \delta_{ij} |\mathbf{g}_i|^2 \rightsquigarrow g^{ij} = \delta^{ij} \frac{1}{|\mathbf{g}_i|^2},\tag{A.16}$$

und der Gradient wird

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\mathbf{g}_i^*}{|\mathbf{g}_i|}, \quad \text{orthogonale Koordinaten, normierte Basis.}$$
(A.17)

In der kartesischen Basis ist natürlich wegen $\mathbf{g}_i = \mathbf{g}^i = \mathbf{e}_i$ alles einfacher und man braucht die Unterscheidung ko- und kontravariant nicht wirklich.

AUFGABE:

1. Berechne den Gradienten in Polarkoordinaten im \mathbb{R}^3 , ausgedrückt in der normierten kovarianten Basis.

2. Berechne den Gradienten in Zylinderkoordinaten im \mathbb{R}^3 , ausgedrückt in der normierten kovarianten Basis.

A.3 ANWENDUNG MECHANIK: Kraft, Gradient und Potential

A.3.1 Konservative Kraftfelder

Die Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ auf ein Punktteilchen der Masse m am Ort \mathbf{x} ist ein Vektorfeld, z.B. in drei Dimensionen. Die Newtonschen Bewegungsgleichungen lauten dann

$$m\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)). \tag{A.18}$$

Definition Eine Kraft (Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{x})$) heißt konservativ, falls sie sich als Gradient eines skalaren Potentials $\Phi(\mathbf{x})$ in der Form

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi(\mathbf{x}) \tag{A.19}$$

schreiben läßt.

Beispiel: die durch eine schwere, sich bei $\mathbf{x} = 0$ befindende Masse M erzeugte Gravitationskraft auf Punktmasse m bei \mathbf{x} ,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -GmM\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}, \quad \text{Gravitationskraft.}$$
 (A.20)

$$\Rightarrow \Phi(\mathbf{x}) = -GmM \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}, \quad \text{Gravitations-Potential.}$$
 (A.21)

$$G = 6.67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1}s^{-2}, \quad \text{Gravitationskonstante.}$$
(A.22)

A.3.2 Kurvenintegrale, Arbeit, Leistung

Sei $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ein Vektorfeld $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, z.B. die Kraft auf ein Punktteilchen der Masse m. Bewegt sich die Masse entlang der (differenzierbaren) Kurve $\mathbf{x}(t)$, so verrichtet die Kraft entlang eines Kurvenstücks, z.B. von $\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}} dt$, die **Arbeit**

$$\delta W = \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} dt. \tag{A.23}$$

Hierbei ist $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t))\dot{\mathbf{x}}(t)$ die momentane **Leistung** der Kraft.

Mit der Zeit t als Kurvenparameter in $\mathbf{x}(t)$ ergibt sich die verrichtete Arbeit entlang der Kurve, die wir allgemein als C bezeichnen und durch $\mathbf{x}(t)$ parametrisieren, als

$$W[C] \equiv \int_{C} \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \equiv \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} dt.$$
(A.24)

Es wird also die momentane Leistung $\mathbf{F}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}$ entlang der durchfahrenen Kurve C aufintegriert. Integrale dieser Form nennt man **Kurvenintegrale**. Wenn über geschlossene Kurven integriert wird, schreibt man häufig

$$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x},\tag{A.25}$$

die konkrete Berechnung erfolgt aber stets durch Parametrisieren der Kurve C als $\mathbf{x}(t)$ und einfaches Integrieren, Gl. (A.24).

AUFGABE: Berechnung von Kurvenintegralen entlang verschiedener Kurven C für gegebene Kraftfelder.

A.3.3 Konservative Kräfte und vom Weg unabhängige Arbeit

Satz 21. Ein Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ist genau dann konservativ, wenn jedes Wegintegral der Arbeit über eine Kurve C nur vom Anfangs- und Endpunkt und nicht von der Form der Kurve abhängt.

Das ist recht einfach zu sehen: ist $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ konservativ, so gilt $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla \Phi(\mathbf{x})$ und deshalb

$$W[C] \equiv \int_{C} \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = -\int_{t_0}^{t_1} \nabla \Phi(\mathbf{x}(t)) \dot{\mathbf{x}} dt$$
$$= -\int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{x}(t)) = -\Phi(\mathbf{x}(t_1)) + \Phi(\mathbf{x}(t_0)) = -\Phi(\mathbf{x}_1) + \Phi(\mathbf{x}_0)$$
(A.26)

unabhängig von der Form von C. Umgekehrt definiert

$$\Phi(\mathbf{x}_1) \equiv -\int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}_1} \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$
(A.27)

eindeutig eine Funktion $\Phi(\mathbf{x}_1)$ (das Integral ist ja wegunabhängig), bis auf eine Konstante, die vom Anfangspunkt \mathbf{x}_0 abhängt. Die Komponente *i* des Gradienten ist die Richtungsableitung in Richtung des *i*-ten Basisvektors \mathbf{e}_i ,

$$-\frac{\partial}{\partial x_{i}}\Phi(\mathbf{x}) = -\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\Phi(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_{i}) - \Phi(\mathbf{x})\right] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x} + h\mathbf{e}_{i}} \mathbf{F}(\mathbf{s}) d\mathbf{s}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{t_{1}}^{t_{1} + h} dt \mathbf{F}(\mathbf{s}(t)) \dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_{i}, \qquad (A.28)$$

wobei die Kurve C so gewählt wurde, dass am Endpunkt $\mathbf{x} = \mathbf{s}(t_1)$ gerade $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{e}_i$ gilt (SKIZZE!). Damit hat man insgesamt

$$-\nabla\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}).\tag{A.29}$$

AUFGABE: Warum ist $\mathbf{f}(x, y) = (y, -x)$ kein konservatives Kraftfeld?

A.4 Rotation und Integralsatz von Stokes

LITERATUR: Berkeley Physik Kurs 2 (E. M. Purcell). BRONSTEIN. Im Folgenden betrachten wir dreidimensionale Vektorfelder.

A.4.1 Rotation

Wir betrachten ein dreidimensionales Vektorfeld $R^3 \to R^3$, z.B. ein Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ in 3 Dimensionen. Für konservative Kraftfelder hatten wir gesehen, dass das Integral der Arbeit über eine geschlossene Kurve C gleich Null ist,

$$W[C] \equiv \oint_C \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$$
, konservatives Kraftfeld (A.30)

$$\neq$$
 0, nicht-konservatives Kraftfeld. (A.31)

Im letzteren Fall nennt man W[C] manchmal Wirbelstärke . Ein typisches Wirbelfeld ist $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, -x, 0)$, vgl. die AUFGABE oben. Wir möchten nun ein lokales Mass für die Wirbelstärke eines Kraftfelds finden, das nicht mehr von der speziellen Wahl der Kurve C abhängt. Wir erweitern hierzu die Integration in W[C], indem wir zahlreiche kleine Flächen zur von C umschlossenen Fläche zusammensetzen (SKIZZE) - an den Rändern innen heben sich die Beiträge der Integrale jeweils weg. Der Beitrag eines infinitesimalen Flächenelements A mit Normalenvektor \mathbf{n} wird dann zur Definition der **Rotation** verwendet,

$$(rot\mathbf{F})\mathbf{n} \equiv (\nabla \times \mathbf{F})\mathbf{n} \equiv \lim_{A \to 0} \frac{\oint_{C_{\mathbf{x}}} \mathbf{F}(\mathbf{s})d\mathbf{s}}{A},$$
 (A.32)

wobei $C_{\mathbf{x}}$ eine kleine geschlossene Kurve um den Punkt \mathbf{x} bezeichnet. Hierdurch ist die Komponente der Rotation in \mathbf{n} -Richtung definiert - man bekommt alle drei Komponenten durch die Wahl $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$ etc. Wir wählen z.B. $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$, dann ist für eine infinitesimal kleine quadratische Fläche mit Mittelpunkt \mathbf{x}

$$\oint_{C_{\mathbf{x}}} \mathbf{F}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} = \int_{-1}^{1} F_y(x + \frac{\Delta x}{2}, y + t\frac{\Delta y}{2}, z) \frac{\Delta y}{2} dt$$

$$- \int_{-1}^{1} F_y(x - \frac{\Delta x}{2}, y + t\frac{\Delta y}{2}, z) \frac{\Delta y}{2} dt$$

$$+ \int_{-1}^{1} F_x(x + \frac{\Delta x}{2}t, y - \frac{\Delta y}{2}, z) \frac{\Delta x}{2} dt$$

$$- \int_{-1}^{1} F_x(x + \frac{\Delta x}{2}t, y + \frac{\Delta y}{2}, z) \frac{\Delta x}{2} dt$$

$$= \partial_x F_y(x, y, z) \frac{\Delta x}{2} \Delta y - \partial_x F_y(x, y, z) \frac{-\Delta x}{2} \Delta y$$

$$+ \partial_y F_x(x, y, z) \frac{-\Delta y}{2} \Delta x - \partial_y F_x(x, y, z) \frac{\Delta y}{2} \Delta x + O(\Delta x^2 \Delta y) + O(\Delta y^2 \Delta x)$$

und damit

$$(rot\mathbf{F})\mathbf{e}_{3} = \lim_{A \to 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \left(\partial_{x} F_{y}(x, y, z) \Delta x \Delta y - \partial_{y} F_{x}(x, y, z) \Delta x \Delta y \right)$$
$$= \partial_{x} F_{y}(x, y, z) - \partial_{y} F_{x}(x, y, z).$$
(A.34)

Entsprechend macht man es für die zwei anderen Komponenten. Die Rotation von $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ergibt sich also in kartesischen Komponenten als

$$rot\mathbf{F} \equiv \nabla \times \mathbf{F} \equiv \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)^T$$
(A.35)

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{x} & \mathbf{e}_{y} & \mathbf{e}_{z} \\ \partial_{x} & \partial_{y} & \partial_{z} \\ F_{x} & F_{y} & F_{z} \end{vmatrix},$$
(A.36)

wobei in der letzten Zeile die Determinante als Merkregel benutzt wurde und $\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ etc. abkürzt. Die Rotation ist also selbst wieder ein dreidimensionales Vektorfeld.

BEISPIEL:

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (y, -x, 0) \rightsquigarrow \nabla \times \mathbf{f} = (0, 0, -2). \tag{A.37}$$

A.4.2 Integralsatz von Stokes

Wir betrachten nochmals die Zerlegung des Wirbelstärken-Integrals

$$W[C] \equiv \oint_C \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_i A_i \frac{W_i}{A_i}$$
(A.38)

in zahlreiche kleine Flächen A_i , die von C umschlossenen werden. Im Grenzfall $A_i \to 0$ folgt jetzt mit der Definition der Rotation heuristisch

$$W[C] \equiv \oint_C \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_A rot \mathbf{F} d\mathbf{A}, \quad \text{Stokes'scher Integralsatz} , \qquad (A.39)$$

was die Äquivalenz des Kurvenintegrals $\mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ über die geschlossene Kurve C mit dem Flächenintegral über die eingeschlossene Fläche A beschreibt.

A.4.3 ANWENDUNG ELEKTRODYNAMIK: Induktionsgesetz

Ein zeitlich veränderliches Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$ erzeugt ein elektrisches Wirbelfeld $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ gemäß

$$\oint_C \mathbf{E} d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{B} d\mathbf{A}, \quad \text{Induktionsgesetz}$$
(A.40)

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}, \quad 1. \text{ Maxwell'schen Gleichung.}$$
(A.41)

Die zweite Zeile ist eine der Maxwell'schen Gleichungen und folgt aus dem Stokes'schen Integralsatz.

BEISPIEL: Eine rechteckige Leiterschleife (SKIZZE) der Fläche A rotiert gleichmäßig mit der Winkelgeschwindigkeit ω im konstanten Magnetfeld **B**. Es gilt

$$U(t) \equiv \oint_C \mathbf{E} d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{B} d\mathbf{A} = -BA \frac{\partial}{\partial t} \cos(\omega t) = BA\omega \sin(\omega t) \quad (A.42)$$

wobei U(t) die in der Schleife induzierte Spannung ist. AUFGABE: wie kann man diese Spannung experimentell messen?

A.4.4 ANWENDUNG MAGNETOSTATIK

Ein Leiter führe eine stationäre (zeitunabhängige) Stromdichte $\mathbf{J}(\mathbf{x})$. Diese erzeugt ein Magnetfeld \mathbf{B} , für das gilt

$$\oint_C \mathbf{B} d\mathbf{s} = \mu_0 \int_A \mathbf{J} d\mathbf{A}$$
(A.43)

$$rot\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}, \quad 3. \text{ Maxwell'sche Gleichung.}$$
(A.44)

Die zweite Zeile ist eine weitere der Maxwell'schen Gleichungen (der Verschiebungsstrom $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} = 0$ ist hier Null.) Hierbei ist

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{Vs}{Am}, \quad \text{magnetische Feldkonstante.}$$
(A.45)

BEISPIEL (AUFGABE): Ein gerader, unendlich langer Draht mit Querschnitt A führe den Strom I. Berechne das Magnetfeld **B** innerhalb und außerhalb des Drahtes.

A.5 Divergenz und Integralsatz von Gauß

Jetzt könnte man hier zum Schluß die Divergenz einfach als weitere vektoranalytische Operation einführen. Bisher waren wir allerdings stets physikalisch motiviert vorgegangen: Der *Gradient* kommt letztendlich aus dem Konzept des Potentials Φ (d.h. der potentiellen Energie) in der Mechanik über die Kraft $\mathbf{F} = -\nabla \Phi$ in den Newton'schen Gleichungen. Die *Rotation* kommt dann aus der Bedingung der Wirbelfreiheit $rot\mathbf{F} = 0$ für konservative, d.h. Energie-erhaltende Kraftfelder. Felder (elektrische und magnetische) treten auch in der Elektrodynamik auf, und wir sahen den Stokes'schen Integralsatz im Zentrum zweier Maxwellscher Gleichungen, die das Induktionsgesetzes und das Magnetfeld eines Leiters lokal formalulieren.

Was noch fehlt, sind die Quellen der Felder (z.B. elektrische Felder, Gravitationsfelder), und das führt auf die Divergenz.

A.5.1 Divergenz

LITERATUR: Berkeley Physik Kurs 2 (E. M. Purcell). BRONSTEIN. Wir betrachten ein Vektorfeld $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, z.B. ein durch eine Masse erzeugtes Gravitations-Kraftfeld oder ein durch eine Ladung erzeugtes elektrostatisches Feld. Wir betrachten außerdem ein Volumen V, das durch eine Oberfläche A eingeschlossen wird, und definieren

$$\Psi \equiv \int_{A} \mathbf{F} d\mathbf{A}$$
, Fluß des Vektorfelds $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ durch Oberfläche A. (A.46)

Jetzt teilen wir V in viele kleine Volumina V_i mit Oberflächen A_i (SKIZZE), die Anteile der Integration benachbarter Volumina heben sich gerade weg ($d\mathbf{A}$ bezeichnet das Flächenelement mit nach außem gerichtetem Normalen-Vektor). Im Grenzfall definiert man für ein infinitesimal kleines Volumen V_i um den Punkt x

$$div\mathbf{F} \equiv \lim_{V_i \to 0} \frac{1}{V_i} \int_A \mathbf{F} d\mathbf{A}$$
(A.47)

als **Divergenz** des Vektorfeldes $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ im Punkt \mathbf{x} . Wählt man einen infinitesimal kleinen Quader, so erhält man in kartesischen Koordinaten (AUFGABE)

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), ..., F_n(\mathbf{x}))^T, \quad \mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)^T$$

$$\Rightarrow div \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_1} F_1(\mathbf{x}) + ... + \frac{\partial}{\partial x_n} F_n(\mathbf{x}).$$
(A.48)

Hier haben wir in der Definition der Divergenz bereits ein *n*-dimensionales Vektorfeld zugelassen, also nicht notwendigerweise n = 3.

A.5.2 Integralsatz von Gauß

Analog zum Integralsatz von Stokes folgt dieser nun quasi automatisch zumindest heuristisch aus der obigen Herleitung der Divergenz, d.h. wir betrachten die Zerlegung des Flußintegrals

$$\Psi \equiv \int_{A} \mathbf{F} d\mathbf{A} = \sum_{i} V_{i} \frac{1}{V_{i}} \int_{A_{i}} \mathbf{F} d\mathbf{A}_{i}$$
(A.49)

mit $V_i \to 0$,

$$\int_{A} \mathbf{F} d\mathbf{A} = \int div \mathbf{F} dV, \quad \text{Gauß'scher Integralsatz.}$$
(A.50)

A.5.3 ANWENDUNG ELEKTROSTATIK: Gauß'sches Gesetz

Eine Ladungsverteilung mit räumlicher Ladungsdichte $\rho(\mathbf{x})$ erzeugt ein elektrisches Feld **E**, dessen Fluß durch eine beliebige geschlossene Oberfläche durch die von der Oberfläche eingeschlossene Gesamtladung gegeben ist,

$$\int_{A} \mathbf{E} d\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho dV, \quad \text{Gauß'sches Gesetz der Elektrostatik}$$
(A.51)

$$div \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$
, 2. Maxwell'sche Gleichung. (A.52)

Die zweite Zeile ist eine weitere der Maxwell'schen Gleichungen (die Numerierung ist in der Tat willkürlich). Hierbei ist

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}$$
, elektrische Feldkonstante. (A.53)

AUFGABEN:

1. Berechnen Sie das durch eine homogen geladene Kugel mit Radius r und Gesamtladung Q erzeugte elektrische Feld.

2. Berechnen Sie das durch eine unendliche dünne und unendlich ausgedehnte Platte der homogenen Flächenladungsdichte σ erzeugte elektrische Feld ausserhalb der Platte.

A.5.4 Zusammenfassung: Maxwell'sche Gleichungen

Die Maxwell'schen Gleichungen lauten

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}$$
 (A.54)

$$div\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{A.55}$$

$$rot\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$$
 (A.56)

$$div\mathbf{B} = 0. \tag{A.57}$$

Die letzte der Maxwell'schen Gleichungen besagt, dass es keine magnetischen Monopole gibt, die als Quellen von Magnetfeldern auftreten würden.

B. FOURIER-TRANSFORMATION UND DELTA-FUNKTION

B.1 Motivation und Definitionen

In Fourier-Reihen für Lösungen der Diffusionsgleichung auf [0, L],

$$n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-Dk_n^2 t} \left[a_n \cos k_n x + b_n \sin k_n x \right], \quad k_n = n\pi/L,$$
(B.1)

fragen wir, was für $L \to \infty$ passiert. Wir schreiben zunächst alles als komplexe Fourier-Reihe,

$$n(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-Dk_n^2 t} e^{ik_n x}$$
(B.2)

mit komplexen Koeffizienten c_n .

Allgemein kann man in der Fourier-Entwicklung einer periodischen Funktion n(x) = n(x + 2L) auf dem Intervall [-L, L],

$$n(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x},$$
(B.3)

fragen, was für $L \to \infty$ passiert. Heuristisch gilt folgendes: wir betrachten das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(k)dk = \lim_{L,N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{2\pi}{2L} f(k_n), \quad k_n = n\pi/L, \quad \text{Riemann-Summe} . (B.4)$$

Hierbei ist $\frac{2\pi}{2L} \equiv \Delta k$ die Feinheit der Unterteilung der Riemann-Summe, die das Integral für $L, N \to \infty$ immer besser approximiert. Wir haben also den **Übergang von der diskreten Summe im** k-Raum zum Integral,

$$\lim_{L,N \to \infty} \frac{1}{2L} \sum_{n=-N}^{N} f(n\pi/L) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) dk,$$
 (B.5)

eine wichtige und in verschiedenen Gebieten (Quantenphysik, Festkörpertheorie, Strahlungstheorie,...) oft benutzte Formel. Beachte: Die Länge 2L des Intervalls geht im Vorfaktor im Limes $L \to \infty$ in den Faktor 2π über. In den Fourierreihen haben wir nun
entsprechend den Übergang für $L \to \infty$,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-L}^{L} dx' f(x') e^{-i\frac{n\pi}{L}x'} \right) e^{i\frac{n\pi}{L}x}$$
(B.6)
$$\rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') e^{-ikx'} \right) e^{ikx}$$

$$\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx}.$$
 (B.7)

Hierbei ist also der Koeffizient c_n mit diskretem Index n in den Koeffizienten $\tilde{f}(k)$ mit kontinuierlichem Index k übergegangen. Beachte, dass wir im Integral, welches $\tilde{f}(k)$ definiert, x' als Integrationsvariable benutzten, da x bereits als Buchstabe vergeben ist.

Definition

$$\tilde{f}(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx}, \quad \text{Fourier-Transformierte von } f(x) \tag{B.8}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx}$$
, Fourier-Darstellung (B.9)

- Man bezeichnet die Fourier-Transformierte $\tilde{f}(k)$ von f(x) manchmal auch als Fourier-Hintransformation und die Darstellung von f(x) mittels $\tilde{f}(k)$ als Fourier-Rücktransformation.
- Beachte die Aufteilung des Faktors $1/2\pi$: in der Physik wird das meist so wie oben (unsymmetrisch) definiert. In der Mathematik definiert man das meist symmetrisch mit zwei Faktoren $1/\sqrt{2\pi}$.
- Ebenfalls beachte (und memoriere) man die Vorzeichen $\mp ikx$ bei Hin- und Rücktransformation.
- Selbstverständlich haben wir hier überhaupt nicht über Konvergenz- und Existenzfragen gesprochen (LITERATUR: Forster, Analysis III).

B.2 Orts- und Impulsraum (k-Raum), Zeit-Domäne und Frequenzraum

Ein in der Physik häufige Bezeichnung: Eine Funktion f(x) sei im Ortsraum definiert, d.h. x sei eine Ortsvariable. Dann bezeichnet man

$$f(x)$$
, Darstellung von f im Ortsraum (B.10)

 $\tilde{f}(k)$, Darstellung von f im Impulsraum (k-Raum) (B.11)

Beide Darstellungen sind äquivalent, da sie ja Fouriertransformierte (FT) voneinander sind. Die Bezeichnung *Impulsraum* kommt aus der de-Broglie-Beziehung $p = \hbar k$ der Quantenmechanik mit $\hbar \equiv h/2\pi$ und dem Planck'schen Wirkungsquantum h. Wenn es nicht um Quantenmechanik geht, spricht man besser vom k-Raum oder dem **Raum der Wellenvektoren**.

Analog definiert man die FT einer Funktion f(t) der Zeit,

$$\tilde{f}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega t}, \quad \text{Fourier-Transformierte von } f(t) \tag{B.12}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t}, \quad \text{Fourier-Darstellung} .$$
(B.13)

Hierbei sind die Vorzeichen im Exponenten der FT im Vergleich zur FT vom Orts in den Impulsraum genau anders herum (Konvention). Man bezeichnet

$$f(t)$$
, Darstellung von f in der Zeit-Domäne (B.14)

$$\tilde{f}(\omega)$$
, Darstellung von f im Frequenzraum. (B.15)

Wiederum sind beide Darstellungen äquivalent. Manchmal spricht man auch von Originalbereich (z.B. f(t)) und Bildbereich (z.B. $\tilde{f}(\omega)$).

Häufig hat man auch Fouriertransformationen in zwei Variablen, z.B. Ort und Zeit:

$$\tilde{u}(k,\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dt u(x,t) e^{i(\omega t - kx)}, \quad \text{Fourier-Transformierte von } u(x,t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk d\omega \tilde{u}(k,\omega) e^{-i(\omega t - kx)} \quad \text{Fourier-Darstellung}$$
(B.17)

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty} \int_{-\infty} dk d\omega \tilde{u}(k,\omega) e^{-i(\omega t - kx)}, \quad \text{Fourier-Darstellung} . \quad (B.17)$$

Jetz sehen wir auch den Sinn der Vorzeichen-Konvention: in der Fourier-Darstellung haben wir zeitabhängige ebene Wellen $e^{-i(\omega t - kx)}!$

B.3 Fouriertransformation: Beispiel Gauß-Funktion

Die Gauß-Funktion ist definiert als eine Wahrscheinlichkeitsdichte p(x),

$$p(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma > 0,$$
 (B.18)

z.B. für das Auffinden eines Teilchens am Ort $\boldsymbol{x}.$ Hierbei ist

$$p(x)dx \tag{B.19}$$

die Wahrscheinlichkeit, das Teilchens im Intervall [x, x + dx] zu finden. Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) = 1, \quad \text{Normierung} \tag{B.20}$$

was mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2 + bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}, \quad a > 0$$
(B.21)

gezeigt werden kann.

AUFGABE: Beweise diese Formel unter Ausnutzung von $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.

Wir berechnen für $x_0 = 0$ (Mittelwert Null) die Fouriertransformierte von p(x) (AUF-GABE)

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \rightsquigarrow \tilde{p}(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) e^{-ikx} = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 k^2}.$$
 (B.22)

Die Fouriertransformierte einer Gauß-Funktion ist also bis auf den Vorfaktor wieder eine Gauß-Funktion.

- Breite Gauß-Funktion p(x) im Ortsraum, d.h. große $\sigma \rightsquigarrow$ schmale Fouriertransformierte $\tilde{p}(k)$ im k-Raum.
- Schmale Gauß-Funktion p(x) im *Ortsraum*, d.h. kleine $\sigma \rightsquigarrow$ breite Fouriertransformierte $\tilde{p}(k)$ im k-Raum.

Je schärfer die Verteilung p(x) im Ortsraum, desto unschärfer (breiter) wird sie im k-Raum. Umgekehrt: je unschärfer die Verteilung p(x) im Ortsraum, desto schärfer (schmaler) wird sie im k-Raum.

AUFGABE: Berechne die Fouriertransformierte der Kastenfunktion $f(-a \le x \le a) = 1$, f(|x| > a) = 0, a > 0, und diskutiere das Ergebnis.

B.4 Die Delta-Distribution

LITERATUR: Forster, Analysis III. Im Grenzfall verschwindender Breite σ der Gauß-Funktion definiert man zunächst heuristisch

$$\delta(x - x_0) \equiv \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}}, \quad \text{(Dirac) Delta-Distribution}$$
(B.23)

in dem Sinne, dass bei Integration über 'gutartige' Funktionen f(x)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) f(x) = \lim_{\sigma \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}} f(x) = f(x_0)$$
(B.24)

gilt. Diese Operation ist ein Funktional (einer Funktion f wird ein Wert $f(x_0)$ zugeordnet), aus historischen Gründen spricht man in der Physik aber von der (Dirac'schen) *Delta-Funktion*. Die Darstellung Gl. (B.23) ist nicht die einzige: es gilt z.B. auch

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ik(x - x_0)}.$$
 (B.25)

AUFGABE: Beweis von Gl. (B.25) mittels der Definition der Fouriertransformation einer Funktion f(x).

B.5 Einige Eigenschaften der Fourier-Transformation

LITERATUR: BRONSTEIN. FORSTER Analysis III.

Wir betrachten eine Funktion f(t) und bezeichnen ihre FT mit Hilfe des Operators (Abbildung) $\mathcal{F}: f \to \tilde{f}$,

$$\mathcal{F}[f](\omega) \equiv \tilde{f}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega t}.$$
 (B.26)

Es gilt (AUFGABE)

 $\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{F}[f] + \beta \mathcal{F}[g], \quad \text{Linearität.}$ (B.27) $\mathcal{F}[f'](\omega) = -i\omega \mathcal{F}[f](\omega) \quad \text{Differentiation im Originalbereich} \quad (B.28)$

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = -i\omega\mathcal{F}[f](\omega)$$
, Differentiation im Originalbereich. (B.28)

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)](\omega) = e^{i\omega t_0} \mathcal{F}[f(t)](\omega), \quad \text{Verschiebungssatz.}$$
(B.29)

Häufig hat man es z.B. in der Signalverarbeitung mit sogenannten **Faltungsintegralen** zu tun,

$$(f_1 * f_2)(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f_1(\tau) f_2(t-\tau),$$
 Faltungsintegral . (B.30)

So kann $f_1(t)$ z.B. das Originalsignal darstellen, das aber durch eine Apparatur noch zeitverzögert und verändert wird, was durch die Integration über f_2 zum Ausdruck kommt. Weitere physikalische Anwendungen solcher Faltungsintegrale sind Systeme, die mit einer Umgebung zeitverzögert wechselwirken, z.B. dissipative Systeme (mikroskopische Modelle für Reibung).

Für die FT von Faltungsintegralen gilt der wichtige **Faltungssatz** (Beweis als AUF-GABE)

$$\mathcal{F}[f_1 * f_2] = \mathcal{F}[f_1]\mathcal{F}[f_2] \tag{B.31}$$

Die Faltung im Originalbereich wird also zu einem gewöhnlichen Produkt im Bildbereich.

C. LIE-GRUPPEN UND LIE-ALGEBREN

C.1 Definitionen

(z.B. GREINER, Quantenmechanik II 'Symmetrien') Eine Lie-Gruppe G (hier betrachten wir meist nur solche aus $n \times n$ -Matrizen) besteht aus Elementen $g(\theta_1, ..., \theta_N)$, die analytisch ('glatt') von N reellen Parametern abhängen. Die Zahl N heißt Dimension der Lie-Gruppe.

Beispiel: G = SO(3), die Gruppe aller reellen orthonormalen 3×3 -Matrizen (Drehungen im \mathbb{R}^3) mit Determinante 1. Für jede Drehung gibt es N = 3 reelle Parameter, z.B. die Eulerschen Winkel (MECHANIK).

Die Gruppenelemente g können mit Hilfe der Exponentialfunktion mittels

$$g = e^{tX}, t \in \mathbb{R} \tag{C.1}$$

erzeugt werden. Die Menge aller so definierten Matrizen X bildet einen Vektorraum, der als Lie-Algebra g zur Lie-Gruppe G bezeichnet wird und der geometrisch dem Tangentialraum bei g = 1 (Identität) entspricht, wenn man die Lie-Gruppe als Mannigfaltigkeit auffasst. In physikalischen Anwendungen schreibt man statt e^{tX} meist e^{-itX} . Die Gruppenelemente g können dann durch linear unabhängige Generatoren \hat{T}_a erzeugt werden,

$$g(\theta_1, ..., \theta_N) = e^{-i\sum_{a=1}^N \theta_a \hat{T}_a}, \quad -i\hat{T}_a = \frac{\partial g(\theta_1, ..., \theta_N)}{\partial \theta_a} \bigg|_{\theta_i = 0}.$$
 (C.2)

Die Generatoren sind geschlossen unter Kommutation

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c, \quad a, b, c = 1, ..., N$$
(C.3)

und bilden eine Basis der Lie-Algebra. Hierbei treten die reellen Strukturkonstanten f_{abc} auf, die die Vertauschungsrelationen der Generatoren festlegen. Der Kommutator einer Lie-Algebra hat dabei die Eigenschaften

$$[A, B] = -[B, A],$$
 Antisymmetrie (C.4)

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0,$$
 Jacobi-Identität. (C.5)

Die Generatoren der Matrixgruppen werden meist normiert über

$$\mathrm{Tr}\hat{T}_a\hat{T}_b = \frac{\delta_{ab}}{2}.$$
 (C.6)

C.2 Beispiele

C.2.1 SO(3)

Die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$ zur Lie-Gruppe SO(3) erhält man durch Differenzieren nach t (und danach Setzen von t = 0) von

$$g(t)g^{T}(t) = 1, \quad g(t) = e^{tX} \rightsquigarrow X + X^{T} = 0 \rightsquigarrow X = -X^{T},$$
 (C.7)

die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$ besteht also aus den schiefsymmetrischen 3×3 -Matrizen.

C.2.2 U(N)

Die Lie-Gruppe U(n) der unitären komplexwertigen $n \times n$ -Matrizen besteht aus Elementen, die in der Form $g = e^{iH}$ mit Hermiteschen $n \times n$ -Matrizen $H = H^{\dagger}$ geschrieben werden können. Damit ist $g^{\dagger} = g^{-1}$, wie es für unitäre Matrizen sein muß. In den Matrizen H sind die n Diagonalelemente reell. Es gibt $\frac{1}{2}(n^2 - n)$ komplexe obere Außerdiagonalelemente H_{ij} , also oberhalb der Diagonale $n^2 - n$ reelle Parameter, mit denen aber wegen der Hermitizität alle Elemente unterhalb der Diagonale schon festgelegt sind. Insgesamt gibt es also $N = n + n^2 - n = n^2$ reelle Parameter für die H und damit auch für die Elemente $g = e^{iH}$ der Lie-Gruppe U(n), deren Dimension also $N = n^2$ ist.

Beispiel: Die Lie-Gruppe SU(n) der unitären komplexwertigen $n \times n$ -Matrizen mit Determinante 1. Mit der Determinanten-Bedingung gibt es eine zusätzliche Gleichung für die reellen Parameter, von denen es also $N = n^2 - 1$ gibt. Schreiben wir wieder $g = e^{iH}$ mit Hermiteschem H, so muß wegen (AUFGABE)

$$\det q = \det e^{iH} = e^{i\operatorname{Tr}H} \tag{C.8}$$

die Bedingung TrH = 0 gelten, d.h. die H müssen spurfrei sein.

C.2.3 SU(2)

Die Lie–Gruppe SU(2) der unitären komplexwertigen 2×2 –Matrizen mit Determinante 1. Wir schreiben wieder $g = e^{iH}$ mit Hermiteschem, spurfreien H. Die Liealgebra $\mathfrak{su}(2)$ zur SU(2) wird also von $N = n^2 - 1 = 3$ linear unabhängigen, spurfreien Hermiteschen Matrizen \hat{T}_a aufgespannt, so dass für $g \in SU(2)$ gilt $g = e^{-i\sum_{a=1}^{3} \theta_a \hat{T}_a}$. Üblicherweise wählt man hier

$$\hat{T}_a = \frac{1}{2}\sigma_a, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i\\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (C.9)$$

mit den Pauli-Matrizen σ_a , so daß die Generatoren der su(2) die Eigenschaften

$$\hat{T}_a = \hat{T}_a^{\dagger}, \quad \text{Tr}\hat{T}_a = 0, \quad \text{Tr}\hat{T}_a\hat{T}_b = \frac{\delta_{ab}}{2}$$
 (C.10)

erfüllen. Die \hat{T}_a erfüllen als Spin- $\frac{1}{2}$ -Operatoren die Drehimpuls-Vertauschungsrelationen

$$[T_a, T_b] = i\epsilon_{abc}T_c \tag{C.11}$$

mit dem Levi–Civita–Tensor ϵ , dessen Komponenten also gerade die Strukturkonstanten f_{abc} der Lie–Algebra su(2) sind, vgl. Gl. (C.3). Die Elemente g der Lie-Gruppe SU(2) schreibt man häufig auch in der Form

$$g = \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{1} - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$
(C.12)

mit einem dreidimensionalen Einheitsvektor **n** (zwei reelle Parameter!) und dem Vektor der Paulimatrizen $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T$.

C.2.4 SU(3)

Die Lie-Gruppe der unitären 3 × 3-Matrizen mit Determinante ist die Eichgruppe für den Farb-Freiheitsgrad in der QCD. Als Generatoren \hat{T}_a der zugehörigen, $n^2 - 1 = 8$ -dimensionalen Liealgebra $\mathfrak{su}(3)$ wählt man $\hat{T}_a = \frac{1}{2}\lambda_a$ mit den Gell-Mann-Matrizen

$$\lambda_{1} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{2} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{3} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_{4} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{5} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{6} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_{7} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{8} \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
(C.13)

Die Gell-Mann-Matrizen haben die Eigenschaften

$$\lambda_a = \lambda_a^{\dagger}, \quad \text{Tr}\lambda_a = 0, \quad \text{Tr}\lambda_a\lambda_b = 2\delta_{ab}, \quad a = 1, ..., 8.$$
 (C.14)

C.3 Darstellungen

Eine d-dimensionale Darstellung einer Lie-Gruppe G ordnet jedem $g \in G$ stetig eine lineare Abbildung $\pi(g)$ in einem d-dimensionalen komplexen Vektorraum V zu, und zwar so, dass das Gruppengesetz erhalten bleibt.

– Im einfachsten Fall mit d = n ist $g = \pi(g)$, d.h. das Lie-Gruppenelement, das ja in den von uns hier betrachteten Fällen immer eine $n \times n$ -Matrix ist, wird durch die mit dieser Matrix beschriebenen linearen Abbildung dargestellt. Diese Darstellung wird fundamentale Darstellung genannt.

– Bei der *adjungierten Darstellung* ist die Dimension des Darstellungsraums d = N, gleich der Anzahl der reellen Parameter und damit der Zahl der Generatoren der Lie-Gruppe. Der Vektorraum V besteht aus Vektoren $\theta = \sum_{a=1}^{N} \theta_a \hat{T}_a$, also Linearkombinationen der Generatoren, und $\pi_{ad}(g)$ ist die durch

$$\pi_{\rm ad}(g)\theta = g\theta g^{-1} \tag{C.15}$$

definierte Abbildung. Für G = U(n) sind z.B. die g unitäre $n \times n$ -Matrizen und die θ sind Hermitesche $n \times n$ -Matrizen, und $g\theta g^{-1}$ beschreibt einfach eine unitäre Transformation der Matrix θ .

Eine *d*-dimensionale Darstellungen einer Lie-Algebren \mathfrak{g} ist eine lineare Abbildung, die jedem Element der Liealgebra eine $d \times d$ -Matrix so zuordnet, dass die Kommutatoreigenschaft erhalten bleibt. Eine Darstellung einer Lie-Gruppe definiert eine entsprechende Darstellung der Lie-Algebra, d.h. aus der Matrix $\pi(e^{tX})$ aus der Darstellung des Lie-Gruppen-Elements e^{tX} wird die Matrix

$$\pi(X) \equiv \partial_t \pi(e^{tX}) \big|_{t=0} \tag{C.16}$$

für die Darstellung des Lie-Algebra-Elements X. – Bei der *adjungierten Darstellung* liefert das

$$\pi(X)\theta \equiv \partial_t \pi(e^{tX})\big|_{t=0} \theta = \partial_t e^{tX} \theta e^{-tX}\big|_{t=0} = X\theta - \theta X, \tag{C.17}$$

d.h. der adjungierten Darstellung der Lie-Gruppe entspricht gerade die Kommutator-Abbildung $\pi(X) = [X, .]$.