

# **Mechanik**

TU Berlin, WS 2008/09

Prof. Dr. T. Brandes

26. Januar 2009

# INHALTSVERZEICHNIS

1. Newtonsche Mechanik . . . . .	2
1.1 Newtonsche Bewegungsgleichungen . . . . .	2
1.1.1 Die Arena des Geschehens . . . . .	2
1.1.2 $N$ wechselwirkende Körper, lex tertia . . . . .	3
1.1.3 Erhaltungssätze . . . . .	4
1.1.4 Zur Einteilung in innere und äußere Kräfte . . . . .	6
1.2 Wiederholung: Gradient, Rotation und Divergenz . . . . .	7
1.2.1 Konservative Kraft und Potential . . . . .	7
1.2.2 Kurvenintegrale, Arbeit, Leistung . . . . .	7
1.2.3 Rotation . . . . .	8
1.2.4 Integralsatz von Stokes . . . . .	10
1.2.5 Der Gradient in krummlinigen Koordinaten . . . . .	10
1.2.6 Die Rotation in orthogonalen krummlinigen Koordinaten . . . . .	12
1.3 Zentralsymmetrische Probleme . . . . .	12
1.3.1 Reduzierte Masse . . . . .	12
1.3.2 Allgemeine Lösung in $d = 3$ Dimensionen . . . . .	13
1.3.3 Effektives Potential . . . . .	14
1.3.4 Offene und geschlossene Bahnkurven . . . . .	15
1.3.5 Lösung in $d \neq 3$ Dimensionen . . . . .	15
1.4 Das Kepler-Problem . . . . .	15
1.4.1 Einschub: Polardarstellung der Kegelschnitte . . . . .	15
1.4.2 Keplersche Gesetze . . . . .	17
1.4.3 Runge-Lenz-Vektor . . . . .	18
1.4.4 Periheldrehung . . . . .	19
1.4.5 Weiter zum Lesen empfehlenswert . . . . .	19
1.5 Einfache Potentialtheorie . . . . .	19
1.5.1 Potential einer Massenverteilung . . . . .	19
1.5.2 Newtonsches Gravitationsfeld . . . . .	20
1.5.3 Poisson-Gleichung, Laplace-Operator . . . . .	21
1.5.4 Die Divergenz und der Laplace-Operator . . . . .	21
1.5.5 Vergleich mit der Elektrostatik. Multipolentwicklung . . . . .	21

---

2. Lagrange-Mechanik . . . . .	22
2.1 Zwangskräfte und Nebenbedingungen . . . . .	22
2.1.1 Beispiel: Teilchen auf einer schiefen Ebene . . . . .	22
2.1.2 Teilchen auf einer Fläche . . . . .	22
2.1.3 Mehrere Freiheitsgrade und Zwangskräfte: Lagrange I . . . . .	23
2.1.4 Beispiel: Teilchen auf einer Kurve . . . . .	24
2.2 Die Erlösung: Lagrange II . . . . .	25
2.2.1 Elimination der Zwangskräfte . . . . .	25
2.2.2 Beispiele für Lagrange II . . . . .	26
2.2.3 Bewegung entlang einer Kurve . . . . .	27
2.3 Extremalprinzipien . . . . .	28
2.3.1 Das Brachistochronen-Problem . . . . .	28
2.3.2 Einschub: Funktionale und Variationsableitungen . . . . .	29
2.3.3 Das Hamiltonsche Prinzip . . . . .	30
2.3.4 Nicht-Eindeutigkeit von $L$ , Eichtransformationen . . . . .	31
2.3.5 Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld . . . . .	32
2.4 Symmetrien und Noether-Theorem . . . . .	32
2.4.1 $N = 1$ Teilchen, Translationsinvarianz in drei Dimensionen . . . . .	34
2.4.2 $N = 1$ Teilchen, Rotationsinvarianz in drei Dimensionen . . . . .	34
2.5 D'Alembertsches Prinzip . . . . .	35
2.5.1 Formulierung . . . . .	35
2.5.2 Anwendungen . . . . .	36
2.6 Klassifikation von Randbedingungen . . . . .	36
3. Der Starre Körper . . . . .	37
3.1 Newtonsche Gleichungen in Nichtinertialsystemen . . . . .	37
3.1.1 Basiswechsel . . . . .	37
3.1.2 Zeitabhängiger Basiswechsel . . . . .	38
3.1.3 Beschleunigung . . . . .	39
3.1.4 Echte Kräfte und Scheinkräfte . . . . .	40
3.1.5 Rotationen . . . . .	40
3.2 Kinematik und Dynamik des Starren Körpers . . . . .	42
3.2.1 Bezugssysteme $K$ und $K'$ . . . . .	42
3.2.2 Kinetische Energie und Trägheitstensor . . . . .	43
3.2.3 Eigenschaften des Trägheitstensors . . . . .	44
3.2.4 Praktische Berechnung des Trägheitstensors . . . . .	45
3.2.5 Der Satz von Steiner . . . . .	46
3.2.6 Drehimpuls . . . . .	47
3.2.7 Die Eulerschen Gleichungen . . . . .	48
3.3 Kreiseltheorie . . . . .	49
3.3.1 Der Symmetrische Kräftefreie Kreisel . . . . .	49
3.3.2 Die Eulerschen Winkel . . . . .	50
3.3.3 Der Schwere Symmetrische Kreisel . . . . .	51

---

4.	Der Hamiltonsche Formalismus . . . . .	55
4.1	Die Legendre-Transformation . . . . .	55
4.1.1	Beispiel . . . . .	55
4.1.2	Konvexe Funktionen . . . . .	56
4.1.3	Konstruktion der Legendretransformation . . . . .	57
4.2	Hamiltonsche Gleichungen . . . . .	58
4.2.1	Konservative Systeme . . . . .	60
4.2.2	Beispiel: Teilchen der Masse $m$ im Potential $V$ in $d$ Dimensionen . . . . .	60
4.2.3	Hamiltonfunktion als Erhaltungsgröße . . . . .	61
4.2.4	Zyklische Koordinaten und Erhaltungsgrößen . . . . .	61
4.3	Der Phasenraum . . . . .	62
4.3.1	Definitionen . . . . .	62
4.3.2	Beispiel: harmonischer Oszillator in $d = 1$ . . . . .	63
4.3.3	Doppelmuldenpotential in $d = 1$ . . . . .	63
4.4	Der Satz von Liouville . . . . .	64
4.4.1	Volumen im Phasenraum . . . . .	65
4.4.2	Konstanz der Phasenraumdichte, Kontinuitätsgleichung . . . . .	67
4.5	Poisson-Klammern . . . . .	67
4.5.1	Zeitentwicklung . . . . .	67
4.5.2	Eigenschaften der Poisson-Klammern . . . . .	68
4.5.3	Erhaltungsgrößen . . . . .	68
4.5.4	Kanonische Poisson-Klammern . . . . .	69
4.6	Kanonische Transformationen . . . . .	69
4.6.1	Punkttransformationen . . . . .	69
4.6.2	Variationsprinzip für die Hamiltonschen Gleichungen . . . . .	71
4.6.3	Definition der kanonischen Transformationen . . . . .	72
4.6.4	Kanonizität und Symplektische Form $I$ . . . . .	77
5.	Die Hamilton-Jacobi-Theorie . . . . .	79
5.1	Die Hamilton-Jacobi-Gleichung . . . . .	79
5.1.1	Beispiel: harmonischer Oszillator in $d = 1$ . . . . .	80
5.1.2	Beispiel: separierende Hamiltonfunktion . . . . .	81
5.1.3	Allgemeiner Fall . . . . .	81
5.1.4	Die Wirkungsfunktion $S$ . . . . .	82
5.2	Die Eikonal-Gleichung . . . . .	83
5.2.1	Geometrische Bedeutung der Wirkung; Wirkungswellen . . . . .	83
5.2.2	Beispiel: Wirkungswellen an einer Potentialschwelle in $d = 2$ . . . . .	84
5.2.3	Das Eikonal in der Optik . . . . .	85
5.2.4	Klassische Mechanik als Grenzfall einer Wellenmechanik . . . . .	86
5.2.5	Prinzip von Maupertuis. Prinzip von Fermat . . . . .	87
5.3	Wirkungs- und Winkelvariablen . . . . .	88
5.3.1	Periodische Bewegung in einer Dimension . . . . .	88
5.3.2	Die Wirkung als Kanonische Variable . . . . .	89

---

5.3.3	Winkel- und Wirkungsvariablen bei $f$ Freiheitsgraden . . . . .	90
5.4	Integrabilität . . . . .	91
5.4.1	Vorbemerkungen . . . . .	92
5.4.2	Theorem von Liouville für Integrale Systeme . . . . .	92
5.5	Das Keplerproblem in der ‘Älteren Quantenmechanik’ . . . . .	94
5.5.1	Bewegung im Zentralfeld in $d = 3$ . . . . .	94
5.5.2	Auswertung für $1/r$ -Potential . . . . .	95
5.5.3	Sommerfeld-Wilson-Quantisierung, ‘Ältere Quantenmechanik’ . . . . .	96
6.	Einführung in die Spezielle Relativitätstheorie . . . . .	98
6.1	Galilei-Transformationen . . . . .	98
6.1.1	Invarianz der Bewegungsgleichungen . . . . .	99
6.1.2	Mathematischer Einschub: Gruppen . . . . .	99
6.2	Die Lorentz-Transformation . . . . .	100
6.2.1	Einleitung . . . . .	100
6.2.2	Einsteinsches Relativitätsprinzip . . . . .	101
6.2.3	Konstruktion der Lorentz-Transformation . . . . .	101
6.2.4	Matrix-Form . . . . .	104
6.3	Folgerungen aus der Lorentz-Transformation . . . . .	104
6.3.1	Minkowski-Diagramm . . . . .	104
6.3.2	Relativität der ‘Gleichzeitigkeit’ . . . . .	104
6.3.3	Längenkontraktion . . . . .	106
6.3.4	Zeitdilatation . . . . .	107
6.4	Der Minkowskiraum . . . . .	107
7.	Schwingungen . . . . .	109
7.1	Kleine Schwingungen . . . . .	109
7.1.1	Lagrange-Funktion . . . . .	109
7.1.2	Normalkoordinaten . . . . .	110
7.1.3	Bemerkungen zur Normalform von $L$ , Hamiltonfunktion $H$ . . . . .	111
7.1.4	Beispiele . . . . .	112
7.2	Lineare Systeme, Harmonischer Oszillator . . . . .	113
7.2.1	Bewegungsgleichung . . . . .	113
7.2.2	Homogener Fall. Zeitentwicklungsoperator . . . . .	114
7.2.3	Inhomogene Gleichung: Getriebener Harmonischer Oszillator . . . . .	117
7.2.4	Einfaches Umskalieren von Differentialgleichungen . . . . .	118
7.3	Parametrische Resonanz . . . . .	119
7.3.1	Zeitlich periodische Koeffizienten: Floquet-Theorie . . . . .	119
7.3.2	Parametrischer Linearer Oszillator . . . . .	121
7.4	Nichtlineare Schwingungen . . . . .	122
7.4.1	Nichtlinearer Oszillator ohne Dämpfung . . . . .	123
7.4.2	Der van-der-Pol-Oszillator . . . . .	123

---

8. Dynamische Systeme . . . . .	128
8.1 Einführung . . . . .	128
8.1.1 Definitionen . . . . .	128
8.1.2 Wofür interessiert man sich? . . . . .	129
8.2 Stabilitätsanalyse . . . . .	129
8.2.1 Lineare Systeme . . . . .	129
8.2.2 Lineare Stabilitätsanalyse . . . . .	130
8.3 Zweidimensionale Dynamische Systeme . . . . .	131
8.3.1 Stabilität von Fixpunkten $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = 0$ . . . . .	131
8.3.2 Grenzzyklen . . . . .	132
8.4 Bifurkationen . . . . .	132
8.4.1 Sattel-Knoten-Bifurkation . . . . .	133
8.4.2 Transkritische Bifurkationen . . . . .	134
8.4.3 Heugabel-Bifurkationen . . . . .	136
8.4.4 Hopf-Bifurkation . . . . .	137
8.5 Hamiltonsche Systeme und Chaos . . . . .	138
8.5.1 Poincaré-Schnitte . . . . .	138
8.5.2 Der Henon-Heiles-Hamiltonian . . . . .	139
8.6 Dreidimensionale Systeme . . . . .	140
8.6.1 Das Lorenz-Modell . . . . .	140
8.7 Iterierte Abbildungen . . . . .	142
8.7.1 Fixpunkte, Spinnweb-Konstruktion . . . . .	142
8.7.2 Periodischer ‘Kicked Rotator’ . . . . .	143
8.7.3 Logistische Abbildung und Logistische Gleichung . . . . .	144

Für dieses Vorlesungsskript zur Mechanik (Theoretische Physik I, Wintersemester 2008/2009) habe ich eine Reihe von Textbüchern verwendet. Im folgenden sind, wie im Skript selbst, nur die AUTORENNAMEN angegeben: E. REBHAN, ein gutes neueres Textbuch, insbesondere bei Hamilton-Jacobi. T. FLIESSBACH ist übersichtlich, kompakt, und gibt eine relativ schnelle Herleitung von Lagrange II. W. NOLTING und W. GREINER werden häufig für den Vorlesungsbetrieb an deutschen Unis verwendet. Das Buch von Greiner ist z.B. teils sehr ausführlich und hat viele gute und detaillierte Beispiele. H. GOLDSTEIN (3. Auflage mit Poole und Safko) ist der Klassiker für die Mechanik, ist teils sehr ausführlich, mir aber mittlerweile nicht elegant genug. J. WESS ist ein neueres Buch zur Mechanik, zu kurz, um alles abzudecken, dafür aber mit guten modernen Aspekt und Konzepten wie Greensche Funktion beim Oszillator. Die mathematisch rigorosen, von mir verwendeten Bücher sind N. STRAUMANN (Kreisel und andere Teile) sowie V. I. ARNOLD (mathematische Physik, sehr gutes Buch, manchmal etwas knapp). L. D. LANDAU, E. M. LIFSCHITZ ist *der* Klassiker, teils sehr elegant, was sich nicht immer von A. SOMMERFELD sagen lässt, der mittlerweile einfach etwas zu altmodisch geworden ist, dafür aber viel gute 'physikalische Einsichten' enthält. H. C. CORBEN, P. STEHLE habe ich für einen Teil beim schweren symmetrischen Kreisel benutzt, CORINALDESI für das Prinzip von Maupertuis (3d kartesische Koordinaten), das eigentlich nirgendwo richtig gut dargestellt zu sein scheint: vielleicht kann man die Qualität eines Mechanik-Buches daran messen, wie gut in ihm das Prinzip von Maupertuis erklärt wird, und zwar ohne mathematisch unsaubere  $\delta$ -Konstruktionen (in Abwandlung einer ähnlichen Aussage C. Kittel's über das Konzept der Löcher in der Festkörpertheorie).

Das Kapitel zur speziellen Relativitätstheorie benutzt H. GOENNER sowie RINDLER, weiterhin das letzte Kapitel zu dynamischen Systemen hauptsächlich STROGATZ und kurze Teile aus TABOR. Bei den Übungsaufgaben war manchmal M. R. SPIEGEL (Schaum-Reihe) nützlich, das im Wesentlichen eine grosse Aufgabensammlung ist (gut zum Trainieren). Weitere von mir bei der Vorbereitung benutzte Skripte anderer Kollegen sind die von SCHÖNHAMMER (Uni Göttingen, insbesondere das Kapitel zum parametrischen Oszillator) und ALTLAND (Uni Köln).

Dieses Skript deckt den tatsächlichen Umfang der Vorlesung ab. Das letzte Kapitel (dynamische Systeme) führt in moderne Entwicklungen ein, ist aber nicht Teil der Modulprüfung.

T. Brandes, Berlin 2009.

# 1. NEWTONSCHE MECHANIK

## 1.1 Newtonsche Bewegungsgleichungen

Es gibt viele Möglichkeiten, die Mechanik zu beginnen. Die Bewegungsgleichung für  $N$  Teilchen mit Massen  $m_i$  und Orts-Koordinaten  $\mathbf{x}_i \in R^d$  (normalerweise  $d = 3$  Dimensionen) sollen hier an den Anfang gestellt werden,

$$\dot{\mathbf{p}}_i = m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N; \dot{\mathbf{x}}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N, t), \quad i = 1, \dots, N$$

Newtonsche Gleichungen, **lex secunda** (1.1)

In den **Impulsen**  $\mathbf{p}_i \equiv m_i \dot{\mathbf{x}}_i$  werden wie hier häufig konstante Massen  $m_i$  vorausgesetzt. Die  $\mathbf{F}_i$  sind vorgegebene **Kräfte**. Aufgabe der theoretischen Mechanik ist letztlich das Auffinden und die Interpretation von Lösungen der Newtonschen Gleichungen. Dabei handelt es sich um ein System von  $d \times N$  gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die gesuchten Funktionen  $\mathbf{x}_i(t)$ .

Es gibt verschiedene Arten von Kräften: Wechselwirkungskräfte, Zwangskräfte, Scheinkräfte, virtuelle Kräfte, Reibungskräfte, Trägheitskräfte, Kapillarkräfte, Dispersionskräfte, etc. Eines der Anliegen der Mechanik ist es, hier Ordnung zu schaffen und in der weiteren mathematischen Entwicklung (Lagrange, Hamilton) sogar möglichst ganz auf den Begriff der Kraft zu verzichten. Wechselwirkungskräfte können dann z.B. häufig durch Potentialfelder ausgedrückt werden, die zwar nicht direkt beobachtbar sind, in mikroskopischen Theorien (Quantenmechanik, Quantenelektrodynamik) aber eine entscheidende Rolle spielen. Der Begriff der Kraft ist allerdings so zentral für die physikalische Intuition, dass man gut daran tut, ihn nicht abzuschaffen.

Die analytische Mechanik kann zwar sehr scharf mathematisch formuliert werden, letztendlich beruht Gl. (1.1) z.B. aber auf Erfahrung. Wie jede physikalische Theorie ist die theoretische Mechanik der Versuch, eine bestimmte Klasse von Naturphänomenen mit den gegenwärtig zur Verfügung stehenden sprachlichen (d.h. mathematischen) Methoden zu erfassen und dabei 'das Wesentliche' zu extrahieren.

### 1.1.1 Die Arena des Geschehens

(STRAUMANN) Die Zeit wird durch das Kontinuum der reellen Zahlen  $R$  beschrieben. Der Raum wird als **euklidischer Raum**  $E^3$  beschrieben, dessen Punkte durch einen festen 'Aufpunkt'  $0$  und Koordinaten bezüglich einer Orthogonalbasis  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  des Vektorraums  $R^3$  mit  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$  festgelegt werden. Die Wahl des Aufpunkts gibt uns die Freiheit, den Ursprung des Koordinatensystems beliebig zu wählen. Die Positionen der

Massenpunkte in den Newtonschen Gleichungen sind dann Vektoren  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$  im  $R^3$ . Im euklidischen Raum  $E^3$  gilt für den Abstand zweier Punkte  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ,

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2, \quad (1.2)$$

was experimentell überprüft werden kann (erste Messungen von Gauß). In der ART (allgemeinen Relativitätstheorie) stellt sich dann heraus, das dieses Modell des ‘flachen Raumes’ nicht ausreicht.

Insbesondere sind die Positionen  $\mathbf{x}$  und die Kräfte  $\mathbf{F}$  in Gl. (1.1) also dreidimensionale reelle Vektoren. Weiterhin ist Gl. (1.1) in kartesischen Koordinaten formuliert. Aus mathematischer Sicht wäre es wünschenswert, die Mechanik möglichst ‘koordinatenfrei’ zu formulieren, um so ihre mathematische Struktur besser sichtbar zu machen. Das geschieht später, vor allem in der mathematischen Physik. Allerdings ist auch in praktischer Hinsicht Gl. (1.1) in kartesischen Koordinaten oft nicht ausreichend - man wird häufig sogenannte **verallgemeinerte Koordinaten** einführen, z.B. Winkelvariablen, in denen sich manche Probleme viel einfacher lösen lassen. Bewegungen sind z.B. manchmal auch von vorneherein durch Zwangskräfte auf bestimmte Bereiche des Raums, die häufig als ‘Mannigfaltigkeiten’ beschrieben werden können, eingeschränkt. Ein systematischer Weg, das zu formulieren, führt auf den Lagrange- und Hamilton-Formalismus, den wir in den späteren Kapiteln behandeln.

Im euklidischen Raum  $E^3$  gibt es aus Sicht der Mechanik besonders ausgezeichnete Koordinatensysteme, nämlich **Inertialsysteme**, die sich gleichförmig mit konstanter Geschwindigkeit gegeneinander bewegen. Zeit  $t$  und Ortskoordinaten  $x, y, z$  zwischen Inertialsystemen werden mittels **Galilei-Transformationen** umgerechnet, z.B. gemäß

$$\begin{aligned} x' &= x - vt, & y' &= y, & z' &= z \\ t' &= t, \end{aligned} \quad (1.3)$$

wenn sich beide Systeme relativ zueinander mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegen. In der speziellen Relativitätstheorie wird diese Transformation zur Lorentztransformation (späteres Kapitel dieser VL). Inertialsysteme dienen dazu, mechanische Grundgleichungen z.B. für Wechselwirkungskräfte zu formulieren, ohne z.B. durch Beschleunigungseffekte (Scheinkräfte) gestört zu werden. Alle Inertialsysteme sind **äquivalent**, in ihnen gilt der **Trägheitssatz**, d.h. die gleichförmige, geradlinige Bewegung von Körpern in Abwesenheit von Kräften (Newtons **lex prima**).

### 1.1.2 $N$ wechselwirkende Körper, lex tertia

Die Erfahrung zeigt, dass sich Kräfte in einem  $N$ -Teilchensystem häufig aus Zweiteilchenkräften zusammensetzen, z.B. für  $N = 3$

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{F}_{12}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + \mathbf{F}_{13}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) \\ m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{F}_{21}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + \mathbf{F}_{23}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3) \\ m_3 \ddot{\mathbf{x}}_3 &= \mathbf{F}_{31}(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) + \mathbf{F}_{32}(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Weiter sollen die  $\mathbf{F}_{12}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$  konservativ sein und sich aus einem Potential  $\Phi_{12}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) = \Phi_{21}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$  ableiten lassen, das nur vom Abstand der beiden Teilchen abhängt und das symmetrisch bezüglich der Vertauschung von 1 und 2 ist (das gilt z.B. für die Gravitationskraft zwischen zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$ ). Es folgt

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{12}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) &= -\nabla_1 \Phi_{12}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \\ \mathbf{F}_{21}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) &= -\nabla_2 \Phi_{21}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|).\end{aligned}\quad (1.5)$$

Hierbei ist  $\mathbf{F}_{12}$  die Kraft auf Teilchen 1, die sich aus dem Potential durch Ableiten (Gradient) bezüglich  $\mathbf{x}_1$  bei festem  $\mathbf{x}_2$  ergibt, und umgekehrt. Dann folgt

$$\mathbf{F}_{12}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = -\mathbf{F}_{21}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1), \quad \text{actio} = \text{reactio} \text{ (**lex tertia**)}. \quad (1.6)$$

Das lex tertia (drittes Newtonsches Gesetz) gilt also nur unter speziellen Voraussetzungen, die aber für viele Wechselwirkungskräfte gut erfüllt sind. Dieses Gesetz ist insbesondere wichtig für den Aufbau der Mechanik von Vielteilchensystemen wie z.B. der starren Körper, die weiter unten betrachtet werden.

Konkret gilt für die Ableitungen (AUFGABE)

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{12}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) &= -\nabla_1 \Phi_{12}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) = -\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{r} \Phi'_{12}(r), \quad r \equiv |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \\ \mathbf{F}_{21}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) &= -\nabla_2 \Phi_{21}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) = -\frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{r} \Phi'_{21}(r).\end{aligned}\quad (1.7)$$

Die Kraftrichtung ist jeweils in Richtung  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ .

### 1.1.3 Erhaltungssätze

Bei der Integration der Newtonschen Bewegungsgleichungen Gl. (1.1) erreicht man Vereinfachungen durch Einführung von **Erhaltungsgrößen** wie Gesamtenergie, Gesamtimpuls und Gesamtdrehimpuls, die sich zeitlich nicht ändern. Zunächst teilen wir die Kräfte  $\mathbf{F}_i$  in innere Wechselwirkungskräfte und äußere Kräfte auf (wir schreiben hier  $\mathbf{r}$  statt  $\mathbf{x}$ ),

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, t) = \sum_{k \neq i=1}^N \mathbf{F}_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) + \mathbf{F}_i^{\text{ex}}, \quad (1.8)$$

wobei  $\mathbf{F}_i^{\text{ex}}$  z.B. von einem äußeren Potential herrührt. Wir definieren

$$\begin{aligned}M &= \sum_{i=1}^N m_i, \quad \text{Gesamtmasse} \\ \mathbf{R} &\equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i, \quad \text{Schwerpunkt} \\ \mathbf{P} &\equiv \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i, \quad \text{Gesamtimpuls} \\ \mathbf{L} &\equiv \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i, \quad \text{Gesamtdrehimpuls},\end{aligned}\quad (1.9)$$

wobei in der letzten Definition mit dem Vektorprodukt

$$\mathbf{l}_i \equiv \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i, \quad \text{Drehimpuls} \quad (1.10)$$

der Drehimpuls des  $i$ -ten Teilchens bezüglich eines festen Koordinatenursprungs  $O$  gemeint ist. Durch Addition der Newtonschen Bewegungsgleichungen Gl. (1.1) folgt dann

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ex}}, \quad (1.11)$$

denn die Wechselwirkungskräfte heben sich wegen actio=reactio weg. Insbesondere ist bei Abwesenheit äußerer Kräfte der Gesamtimpuls konstant.

Weiterhin folgt durch Differentiation des Gesamtdrehimpulses (AUFGABE)

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ex}} \equiv \mathbf{N} \quad (1.12)$$

mit dem von den äußeren Kräften hervorgerufenen **Drehmoment**  $\mathbf{N}$ . Insbesondere ist bei Abwesenheit äußerer Kräfte das Drehmoment Null und damit der Gesamtdrehimpuls konstant.

Zur Energieerhaltung nehmen wir konservative Kräfte in Gl. (1.1) an,

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = - \sum_{k \neq i=1}^N \nabla_i \Phi_{ik}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|) - \nabla_i V_i^{\text{ex}}(\mathbf{x}_i). \quad (1.13)$$

Wir multiplizieren mit  $\dot{\mathbf{x}}_i$  und summieren über  $i$ ,

$$\sum_{i=1}^N m_i \underbrace{\dot{\mathbf{x}}_i \ddot{\mathbf{x}}_i}_{\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{x}}_i^2} = - \sum_{i=1}^N \sum_{k \neq i=1}^N \dot{\mathbf{x}}_i \nabla_i \Phi_{ik}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|) - \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{x}}_i \nabla_i V_i^{\text{ex}}(\mathbf{x}_i). \quad (1.14)$$

Wir benutzen durch Umbenennung und mit  $\Phi_{ik} = \Phi_{ki}$  (AUFGABE: NACHPRÜFEN)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{k \neq i=1}^N \dot{\mathbf{x}}_i \nabla_i \Phi_{ik}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|) &= - \sum_{i=1}^N \sum_{k \neq i=1}^N \dot{\mathbf{x}}_k \nabla_i \Phi_{ik}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|) \rightsquigarrow \\ \sum_{i=1}^N \sum_{k \neq i=1}^N (\dot{\mathbf{x}}_i - \dot{\mathbf{x}}_k) \nabla_i \Phi_{ik}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|) &= 2 \sum_{i=1}^N \sum_{k \neq i=1}^N \dot{\mathbf{x}}_i \nabla_i \Phi_{ik}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Wegen der Kettenregel  $\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(t)) = \dot{\mathbf{x}} \nabla f(\mathbf{x}(t))$  folgt deshalb

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k \neq i=1}^N \Phi_{ik}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|) + \sum_{i=1}^N V_i^{\text{ex}}(\mathbf{x}_i) \right] = 0 \quad (1.16)$$

Die **Gesamtenergie**  $E$  ist konstant, wobei

$$\begin{aligned}
 E &\equiv T + V \\
 T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i}, \quad \text{kinetische Energie} \\
 V &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k \neq i=1}^N \Phi_{ik}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|) + \sum_{i=1}^N V_i^{\text{ex}}(\mathbf{x}_i), \quad \text{potentielle Energie.} \quad (1.17)
 \end{aligned}$$

Hierbei setzt sich die potentielle Energie aus dem **Einteilchen-Anteil**,  $\sum_{i=1}^N V_i^{\text{ex}}(\mathbf{x}_i)$ , und dem **Zweiteilchen-Anteil**,  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k \neq i=1}^N \Phi_{ik}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|)$  zusammen.

#### 1.1.4 Zur Einteilung in innere und äußere Kräfte

Diese Aufspaltung erfolgt aus Zweckmäßigkeitsgründen: bei der Bewegung eines Steins der Masse  $m$  im Schwerfeld der Erde kann man z.B. häufig in guter Näherung die Gravitationskraft als äußere Kraft auffassen (hier in die negative  $z$ -Richtung angenommen,  $g \approx 9.8 \text{ ms}^{-2}$  Erdbeschleunigung),

$$\mathbf{F}^{\text{ex}} = -m g \mathbf{e}_z. \quad (1.18)$$

Dabei wird u.a. die **Rückwirkung** des Steins auf die Erde vernachlässigt. Die Atome, aus denen der Stein besteht, werden weiterhin durch innere Wechselwirkungskräfte zusammengehalten, die man i.a. nicht genau kennt. Das ist oft auch gar nicht nötig - die Bewegung des Schwerpunkts gemäß Gl. (1.11),  $m \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}^{\text{ex}}$  lässt sich auch ohne deren Kenntnis lösen.

Ein mechanisches System, in dem es keine äußeren Kräfte gibt, heißt **abgeschlossen**, ein System mit äußeren Kräften heißt **offen**. Streng genommen ist nur das gesamte Universum ein abgeschlossenes System - sobald man nur einen Teil davon betrachtet, hat man ein offenes System vorliegen. Entsprechendes gilt auch in Laborexperimenten: man studiert die Wechselwirkungen von Objekten untereinander, allerdings gibt es immer eine Schnittstelle zwischen dem betrachteten System und der Aussenwelt, schon allein dadurch, dass ja **Information** nach draussen gelangen muss.

Die Existenz solcher Schnittstellen zieht sich als konzeptionelles Problem durch die gesamte Physik hindurch. Besonders drastisch tritt sie in der Quantenmechanik zu Tage, wo es offene und zum Teil ungeklärte Fragen hinsichtlich der Schnittstelle System/Messgerät (Beobachter) gibt. In statistischen Theorien wie der Wärmelehre (Thermodynamik) und statistischen Mechanik wird untersucht, wie sich Schnittstellen zwischen einem System und der Umgebung des Systems ('Bad') formal beschreiben lassen und wie aus Theorien für abgeschlossene Gesamtsysteme effektive Theorien für offene Teilsysteme hergeleitet werden können. Wie aus dem oben Gesagten ersichtlich ist, deutet sich diese Gesamtproblematik allerdings bereits in der klassischen Mechanik an.

## 1.2 Wiederholung: Gradient, Rotation und Divergenz

(Vergleiche SKRIPT MM).

### 1.2.1 Konservative Kraft und Potential

Wir betrachten zunächst einen Massenpunkt der Masse  $m$  in Gl. (1.1),

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (1.19)$$

mit rein ortsabhängiger Kraft  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ , die als gegeben angenommen wird. Wir erinnern uns (vergleiche SKRIPT MM):

**Definition** Eine Kraft (Kraftfeld  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ) heißt **konservativ**, falls sie sich als Gradient eines skalaren Potentials  $\Phi(\mathbf{x})$  in der Form

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi(\mathbf{x}) \quad (1.20)$$

schreiben läßt.

Beispiel: die durch eine schwere, sich bei  $\mathbf{x} = 0$  befindende Masse  $M$  erzeugte Gravitationskraft auf eine Punktmasse  $m$  bei  $\mathbf{x}$ ,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -GmM \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}, \quad \text{Gravitationskraft.} \quad (1.21)$$

$$\rightsquigarrow \Phi(\mathbf{x}) = -GmM \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}, \quad \text{Gravitations-Potential.} \quad (1.22)$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}, \quad \text{Gravitationskonstante.} \quad (1.23)$$

### 1.2.2 Kurvenintegrale, Arbeit, Leistung

Sei  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  ein Vektorfeld  $R^n \rightarrow R^n$ , z.B. die Kraft auf ein Partikelchen der Masse  $m$ . Bewegt sich die Masse entlang der (differenzierbaren) Kurve  $\mathbf{x}(t)$ , so verrichtet die Kraft entlang eines Kurvenstücks, z.B. von  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}dt$ , die **Arbeit**

$$\delta W = \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}dt. \quad (1.24)$$

Hierbei ist  $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t))\dot{\mathbf{x}}(t)$  die momentane **Leistung** der Kraft.

Mit der Zeit  $t$  als Kurvenparameter in  $\mathbf{x}(t)$  ergibt sich die verrichtete Arbeit entlang der Kurve, die wir allgemein als  $C$  bezeichnen und durch  $\mathbf{x}(t)$  parametrisieren, als

$$W[C] \equiv \int_C \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \equiv \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}dt. \quad (1.25)$$

Es wird also die momentane Leistung  $\mathbf{F}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}$  entlang der durchfahrenen Kurve  $C$  aufintegriert. Integrale dieser Form nennt man **Kurvenintegrale**. Wenn über geschlossene Kurven integriert wird, schreibt man häufig

$$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad (1.26)$$

die konkrete Berechnung erfolgt aber stets durch Parametrisieren der Kurve  $C$  als  $\mathbf{x}(t)$  und einfaches Integrieren, Gl. (1.25).

AUFGABE: Berechnung von Kurvenintegralen entlang verschiedener Kurven  $C$  für gegebene Kraftfelder.

### 1.2.2.1 Konservative Kräfte und vom Weg unabhängige Arbeit

**Satz 1.** *Ein Kraftfeld  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  ist genau dann konservativ, wenn jedes Wegintegral der Arbeit über eine Kurve  $C$  nur vom Anfangs- und Endpunkt und nicht von der Form der Kurve abhängt.*

Das ist recht einfach zu sehen: ist  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  konservativ, so gilt  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi(\mathbf{x})$  und deshalb

$$\begin{aligned} W[C] &\equiv \int_C \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{t_0}^{t_1} \nabla\Phi(\mathbf{x}(t)) \dot{\mathbf{x}} dt \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{x}(t)) = -\Phi(\mathbf{x}(t_1)) + \Phi(\mathbf{x}(t_0)) = -\Phi(\mathbf{x}_1) + \Phi(\mathbf{x}_0) \end{aligned} \quad (1.27)$$

unabhängig von der Form von  $C$ . Umgekehrt definiert

$$\Phi(\mathbf{x}_1) \equiv - \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}_1} \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1.28)$$

eindeutig eine Funktion  $\Phi(\mathbf{x}_1)$  (das Integral ist ja wegunabhängig), bis auf eine Konstante, die vom Anfangspunkt  $\mathbf{x}_0$  abhängt. Die Komponente  $i$  des Gradienten ist die Richtungsableitung in Richtung des  $i$ -ten Basisvektors  $\mathbf{e}_i$ ,

$$\begin{aligned} - \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(\mathbf{x}) &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\Phi(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - \Phi(\mathbf{x})] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}+h\mathbf{e}_i} \mathbf{F}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{t_1}^{t_1+h} dt \mathbf{F}(\mathbf{s}(t)) \dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i, \end{aligned} \quad (1.29)$$

wobei die Kurve  $C$  so gewählt wurde, dass am Endpunkt  $\mathbf{x} = \mathbf{s}(t_1 + h)$  gerade  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{e}_i$  gilt (SKIZZIE!). Damit hat man insgesamt

$$-\nabla\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}). \quad (1.30)$$

AUFGABE: Warum ist  $\mathbf{f}(x, y) = (y, -x)$  kein konservatives Kraftfeld?

### 1.2.3 Rotation

Wir betrachten ein dreidimensionales Vektorfeld  $R^3 \rightarrow R^3$ , z.B. ein Kraftfeld  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  in 3 Dimensionen. Für konservative Kraftfelder hatten wir gesehen, dass das Integral der Arbeit über eine geschlossene Kurve  $C$  gleich Null ist,

$$W[C] \equiv \oint_C \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad \text{konservatives Kraftfeld} \quad (1.31)$$

$$\neq 0, \quad \text{nicht-konservatives Kraftfeld.} \quad (1.32)$$

Im letzteren Fall nennt man  $W[C]$  manchmal *Wirbelstärke*. Ein typisches Wirbelfeld ist  $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, -x, 0)$ , vgl. die AUFGABE oben. Wir möchten nun ein lokales Maß für die Wirbelstärke eines Kraftfelds finden, das nicht mehr von der speziellen Wahl der Kurve  $C$  abhängt. Wir erweitern hierzu die Integration in  $W[C]$ , indem wir zahlreiche kleine Flächen zur von  $C$  umschlossenen Fläche zusammensetzen (SKIZZE) - an den Rändern innen heben sich die Beiträge der Integrale jeweils weg. Der Beitrag eines infinitesimalen Flächenelements  $A$  mit Normalenvektor  $\mathbf{n}$  wird dann zur Definition der **Rotation** verwendet,

$$(\text{rot}\mathbf{F})\mathbf{n} \equiv (\nabla \times \mathbf{F})\mathbf{n} \equiv \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_{\mathbf{x}}} \mathbf{F}(\mathbf{s})d\mathbf{s}}{A}, \quad (1.33)$$

wobei  $C_{\mathbf{x}}$  eine kleine geschlossene Kurve um den Punkt  $\mathbf{x}$  bezeichnet. Hierdurch ist die Komponente der Rotation in  $\mathbf{n}$ -Richtung definiert - man bekommt alle drei Komponenten durch die Wahl  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$  etc. Wir wählen z.B.  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$ , dann ist für eine infinitesimal kleine quadratische Fläche mit Mittelpunkt  $\mathbf{x}$

$$\begin{aligned} \oint_{C_{\mathbf{x}}} \mathbf{F}(\mathbf{s})d\mathbf{s} &= \int_{-1}^1 F_y\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + t\frac{\Delta y}{2}, z\right) \frac{\Delta y}{2} dt \\ &\quad - \int_{-1}^1 F_y\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y + t\frac{\Delta y}{2}, z\right) \frac{\Delta y}{2} dt \\ &\quad + \int_{-1}^1 F_x\left(x + \frac{\Delta x}{2}t, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right) \frac{\Delta x}{2} dt \\ &\quad - \int_{-1}^1 F_x\left(x + \frac{\Delta x}{2}t, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) \frac{\Delta x}{2} dt \\ &= \partial_x F_y(x, y, z) \frac{\Delta x}{2} \Delta y - \partial_x F_y(x, y, z) \frac{-\Delta x}{2} \Delta y \\ &\quad + \partial_y F_x(x, y, z) \frac{-\Delta y}{2} \Delta x - \partial_y F_x(x, y, z) \frac{\Delta y}{2} \Delta x + O(\Delta x^2 \Delta y) + O(\Delta y^2 \Delta x) \end{aligned} \quad (1.34)$$

und damit

$$\begin{aligned} (\text{rot}\mathbf{F})\mathbf{e}_3 &= \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y} (\partial_x F_y(x, y, z) \Delta x \Delta y - \partial_y F_x(x, y, z) \Delta x \Delta y) \\ &= \partial_x F_y(x, y, z) - \partial_y F_x(x, y, z). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Entsprechend macht man es für die zwei anderen Komponenten. Die Rotation von  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  ergibt sich also in kartesischen Komponenten als

$$\text{rot}\mathbf{F} \equiv \nabla \times \mathbf{F} \equiv \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)^T \quad (1.36)$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}, \quad (1.37)$$

wobei in der letzten Zeile die Determinante als Merkmregel benutzt wurde und  $\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$  etc. abkürzt. Die Rotation ist also selbst wieder ein dreidimensionales Vektorfeld.

BEISPIEL:

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (y, -x, 0) \rightsquigarrow \nabla \times \mathbf{f} = (0, 0, -2). \quad (1.38)$$

### 1.2.4 Integralsatz von Stokes

Wir betrachten nochmals die Zerlegung des Wirbelstärken-Integrals

$$W[C] \equiv \oint_C \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_i A_i \frac{W_i}{A_i} \quad (1.39)$$

in zahlreiche kleine Flächen  $A_i$ , die von  $C$  umschlossen werden. Im Grenzfall  $A_i \rightarrow 0$  folgt jetzt mit der Definition der Rotation heuristisch

$$W[C] \equiv \oint_C \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_A \text{rot} \mathbf{F} d\mathbf{A}, \quad \text{Stokes'scher Integralsatz,} \quad (1.40)$$

was die Äquivalenz des *Kurvenintegrals*  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  über die geschlossene Kurve  $C$  mit dem *Flächenintegral* über die eingeschlossene Fläche  $A$  beschreibt.

### 1.2.5 Der Gradient in krummlinigen Koordinaten

Wir betrachten die Ableitung einer Funktion  $f : R^n \rightarrow R$  entlang einer Kurve  $\mathbf{x}(t)$ . In kartesischen Koordinaten gilt nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}) \frac{dx_i}{dt} = (\nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{x}}. \quad (1.41)$$

Jetzt beschreiben wir diese Kurve in krummlinigen Koordinaten  $u^j$ , so dass  $x^i = x^i(u^j)$  (wir unterscheiden wieder zwischen ko- und kontravarianten Koordinaten). Wir bilden die Ableitung der Funktion in krummlinigen Koordinaten

$$\frac{d}{dt} f(u^1(t), \dots, u^n(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial u^i} f \frac{du^i}{dt} \equiv (\nabla f, \mathbf{v}), \quad (1.42)$$

was wegen  $\mathbf{v} = \dot{u}^j \mathbf{g}_j$  (Einsteinsche Summations-Konvention) auf

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial u^i} \mathbf{g}^i, \quad \text{Gradient in krummlinigen Koordinaten} \quad (1.43)$$

führt, denn wegen  $\mathbf{g}^i \mathbf{g}_j = \delta_j^i$  gilt

$$(\nabla f, \mathbf{v}) = \frac{\partial f}{\partial u^i} \mathbf{g}^i \dot{u}^j \mathbf{g}_j = \frac{\partial f}{\partial u^i} \dot{u}^i. \quad (1.44)$$

An der Darstellung Gl. (1.43) erkennt man, dass der Gradient im Punkt  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, \dots, u^n)$  eine Linearform ist, die auf Vektoren  $\mathbf{v}$  wirkt. Deshalb schreibt sich  $\nabla f$  als Linearkombinationen der kontravarianten Basisvektoren  $\mathbf{g}^i$ . Man kann  $\nabla f$  aber auch wieder als Vektor auffassen, wenn man die  $\mathbf{g}^i$  durch die  $\mathbf{g}_j$  ausdrückt. Häufig möchte man  $\nabla f$  in einer *normierten* Basis  $\mathbf{g}_j$  mit  $|\mathbf{g}_j| = 1$  ausdrücken, d.h. man definiert

$$\mathbf{g}_j^* \equiv \frac{\mathbf{g}_j}{|\mathbf{g}_j|} \quad (1.45)$$

und schreibt

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial u^i} \mathbf{g}^i = \frac{\partial f}{\partial u^i} g^{ij} \mathbf{g}_j = \frac{\partial f}{\partial u^i} g^{ij} |\mathbf{g}_j| \mathbf{g}_j^*. \quad (1.46)$$

Für orthogonale Koordinaten ist der Metriktensor diagonal,

$$g_{ij} = \delta_{ij} |\mathbf{g}_i|^2 \rightsquigarrow g^{ij} = \delta^{ij} \frac{1}{|\mathbf{g}_i|^2}, \quad (1.47)$$

und der Gradient wird

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\mathbf{g}_i^*}{|\mathbf{g}_i|}, \quad \mathbf{g}_i \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}, \quad \text{orthogonale Koordinaten, normierte Basis.} \quad (1.48)$$

Wenn wir hier für die Funktion  $f$  den Spezialfall  $f = u^j$  einsetzen, erhalten wir

$$\mathbf{g}_i \equiv \mathbf{g}_i^* |\mathbf{g}_i| = \nabla u^i, \quad \text{keine Summation über } i! \quad (1.49)$$

In der kartesischen Basis ist natürlich wegen  $\mathbf{g}_i = \mathbf{g}^i = \mathbf{e}_i$  alles einfacher und man braucht die Unterscheidung ko- und kontravariant nicht wirklich.

In sphärischen Polarkoordinaten wird z.B.

$$\mathbf{g}_r = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{g}_r| = 1 \quad (1.50)$$

$$\mathbf{g}_\phi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -r \sin \phi \sin \theta \\ r \cos \phi \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{g}_\phi| = r \sin \theta \quad (1.51)$$

$$\mathbf{g}_\theta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \cos \theta \\ r \sin \phi \cos \theta \\ -r \sin \theta \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{g}_\theta| = r \quad (1.52)$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{g}_r^* + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{g}_\theta^* + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{g}_\phi^*. \quad (1.53)$$

### 1.2.6 Die Rotation in orthogonalen krummlinigen Koordinaten

(z.B. GREINER) Wir betrachten ein Vektorfeld in orthogonal krummlinigen Koordinaten mit normierter, lokaler Basis  $\mathbf{g}_i^*$ ,

$$\mathbf{A} = A^i \mathbf{g}_i^*, \quad d = 3. \quad (1.54)$$

Wir schreiben  $h_i \equiv |\mathbf{g}_i^*|^{-1} \equiv \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \right|^{-1}$  und betrachten die erste Komponente,

$$\nabla \times (A^1 \mathbf{g}_1^*) = \nabla \times (A^1 h_1 \nabla u^1), \quad (1.55)$$

wobei wir Gl. (1.49) verwendet haben. Mit der Produktregel (BEWEIS ALS AUFGABE)

$$\nabla \times (f \mathbf{A}) = \nabla f \times \mathbf{A} + f \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.56)$$

folgt nun

$$\nabla \times (A^1 \mathbf{g}_1^*) = \nabla(A^1 h_1) \times \nabla u^1 + A^1 h_1 \nabla \times \nabla u^1 = \nabla(A^1 h_1) \times \nabla u^1, \quad (1.57)$$

denn (AUFGABE)

$$\nabla \times (\nabla f) = 0. \quad (1.58)$$

Damit gilt also nach Definition des Gradienten

$$\begin{aligned} \nabla \times (A^1 \mathbf{g}_1^*) &= \nabla(A^1 h_1) \times \frac{\mathbf{g}_1^*}{|\mathbf{g}_1^*|} = \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial(A^1 h_1)}{\partial u^i} \frac{\mathbf{g}_i^*}{|\mathbf{g}_i^*|} \right] \times \frac{\mathbf{g}_1^*}{|\mathbf{g}_1^*|} \\ &= \frac{\mathbf{g}_2^*}{h_1 h_3} \frac{(\partial A^1 h_1)}{\partial u^3} - \frac{\mathbf{g}_3^*}{h_1 h_2} \frac{(\partial A^1 h_1)}{\partial u^2}, \end{aligned} \quad (1.59)$$

denn die  $\mathbf{g}_i^*$  bilden ein lokales, orientiertes Dreibein. Zyklisches Durchtauschen für die anderen Komponenten liefert die **Determinantenform der Rotation**

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{g}_1^* & h_2 \mathbf{g}_2^* & h_3 \mathbf{g}_3^* \\ \partial_{u^1} & \partial_{u^2} & \partial_{u^3} \\ A^1 h_1 & A^2 h_2 & A^3 h_3 \end{vmatrix}, \quad \text{krummlinige orthogonale Koordinaten} \quad (1.60)$$

## 1.3 Zentralsymmetrische Probleme

### 1.3.1 Reduzierte Masse

Gegeben sei ein abgeschlossenes System zweier Massen  $m_1$  und  $m_2$  mit Wechselwirkungspotential  $V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$ . Die Newtonschen Bewegungsgleichungen lauten

$$m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = -\nabla_1 V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|), \quad m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = -\nabla_2 V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|). \quad (1.61)$$

Wir definieren  $\mathbf{r} \equiv \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$  und erhalten durch Subtrahieren

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= -\frac{1}{m_1 m_2} (m_2 \nabla_1 V(r) - m_1 \nabla_2 V(r)) = -\frac{1}{m_1 m_2} \left( m_2 \frac{\mathbf{r}}{r} - m_1 (-1) \frac{\mathbf{r}}{r} \right) V'(r) \\ &= -\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \frac{\mathbf{r}}{r} V'(r), \quad r \equiv |\mathbf{r}| \quad (1.62)\end{aligned}$$

oder

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{r}}{r} V'(r) = -\nabla_{\mathbf{r}} V(r), \quad \mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \text{reduzierte Masse} \quad (1.63)$$

Damit sind die Bewegungsgleichungen für zwei wechselwirkende Massen auf die Bewegungsgleichung für eine einzige reduzierte Masse zurückgeführt. Durch Addition von Gl. (1.61) bekommt man natürlich die triviale Bewegungsgleichung des Schwerpunkts (NACHPRÜFEN). Effektiv reicht es also z.B. für das Problem der Bewegung der Erde um die Sonne, das einfachere Problem der Bewegung der Relativkoordinate  $\mathbf{r}$  zu lösen - mit Hilfe der Schwerpunktskoordinate  $\mathbf{R}$  hat man dann sofort die ursprünglichen Koordinaten

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (1.64)$$

### 1.3.2 Allgemeine Lösung in $d = 3$ Dimensionen

Wir wollen also die Bewegungsgleichung

$$m \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{r}}{r} V'(r). \quad (1.65)$$

lösen (wir benennen  $\mu$  in  $m$  um, das sieht schöner aus).

Für den Gesamtdrehimpuls  $\mathbf{L}$  in  $d = 3$  Dimensionen bezüglich eines festen Aufpunkts  $0$  gilt (AUFGABE)

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \text{const.} \quad (1.66)$$

Wählt man den Koordinatenursprung  $0 = \mathbf{R}$  im Schwerpunkt, so ist  $\mathbf{L} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$  konstant und folglich muss  $\mathbf{r}$ , das ja senkrecht zu  $\mathbf{L}$  steht, in der zu  $\mathbf{L}$  senkrechten Ebene liegen, die wir als  $x$ - $y$ -Ebene wählen. Effektiv wird das Problem also zweidimensional. Wegen der Energieerhaltung wird es aber noch schöner: Wir schreiben die kinetische Energie in zweidimensionalen Polarkoordinaten. In MM hatten wir bereits die **Geschwindigkeit in dreidimensionalen Polarkoordinaten**,

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d}{dt} [r(t) \mathbf{e}_r(t)] = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r \quad (1.67)$$

$$= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_\phi + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta. \quad (1.68)$$

Daraus folgt z.B. die kinetische Energie eines freien Teilchens der Masse  $m$ ,

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right), \quad d = 3. \quad (1.69)$$

Wir setzen hier einfach  $\theta = \pi/2$ , um in die  $x$ - $y$ -Ebene zu gelangen,

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2). \quad (1.70)$$

Weiterhin haben wir für den konstanten Drehimpuls

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = mr\mathbf{e}_r \times r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi = mr^2\dot{\phi}\mathbf{e}_z \quad (1.71)$$

und deshalb für die konstante Gesamtenergie  $E = T + V$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + V(r) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \\ &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r), \quad \text{effektives Potential } V_{\text{eff}}(r) \equiv \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \end{aligned} \quad (1.72)$$

Dies ist nun eine DGL erster Ordnung für  $r(t)$  (beachte, dass  $0 \leq r < \infty$ ). Wir können sie sofort durch Trennung der Variablen integrieren (LANDAU), d.h.

$$\begin{aligned} dr &= \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(r)] - \frac{L^2}{m^2r^2}} dt = [d\phi = \frac{L}{mr^2} dt] \\ &= \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(r)] - \frac{L^2}{m^2r^2}} \frac{mr^2}{L} d\phi \rightsquigarrow \\ \phi - \phi_0 &= \int_{r_0}^r \frac{L/r'^2}{\sqrt{2m[E - V(r')] - L^2/r'^2}} dr', \end{aligned} \quad (1.73)$$

wir erhalten also eine Bahnkurve in der (etwas ungewöhnlichen) Form  $\phi = \phi(r)$ , zu deren expliziten Berechnung noch das obige Integral (für festes  $E$  und  $L$ ) ausgewertet werden muss und eventuell invertiert werden muss, falls man lieber  $r = r(\phi)$  haben möchte.

### 1.3.3 Effektives Potential

(z.B. GREINER) Das effektive Potential

$$V_{\text{eff}}(r) \equiv \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad (1.74)$$

ist sehr nützlich, um sich zunächst einen ersten Überblick zu verschaffen. Die Gleichung Gl. (1.72) entspricht ja einer eindimensionalen Bewegung (allerdings mit  $0 \leq r < \infty$ ). Der Term  $\frac{L^2}{2mr^2}$  heißt **Drehimpulsbarriere** und entspricht einem *abstoßenden* Potential. Wir betrachten als Beispiel ein *anziehendes*  $1/r$ -Potential (Gravitationspotential oder Coulombpotential), also

$$V_{\text{eff}}(r) \equiv \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \quad (1.75)$$

mit  $\alpha > 0$ . **HIER AUSFÜHRLICHER.** Die Schnittpunkte von  $V_{\text{eff}}(r)$  mit der Gesamtenergie  $E$  bestimmen die Umkehrpunkte der Bahn, d.h. die Radii  $r$  mit verschwindenden

Radialgeschwindigkeiten  $\dot{r} = 0$ . Je nach Wert vom Drehimpuls  $L$  und Gesamtenergie  $E$  gibt es gebundene Lösungen (sie entsprechen den Kepler-Ellipsen der Planeten) und nichtgebundene Lösungen, bei denen die Körper aus dem Unendlichen kommen, am Potential gestreut werden und dann wieder im Unendlichen verschwinden. Entsprechend unterscheidet man auch in der Quantenmechanik zwischen gebundenen Zuständen und Streuzuständen.

### 1.3.4 Offene und geschlossene Bahnkurven

(LANDAU) Bei den gebundenen Zuständen ändert sich  $r$  von  $r_{\min}$  nach  $r_{\max}$  wieder zu  $r_{\min}$ , dabei ändert sich der Winkel  $\phi$  des 'Fahrstrahls'  $r(\phi)$  gemäß Gl. (1.73) um

$$\Delta\phi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{L/r'^2}{\sqrt{2m[E - V(r')] - L^2/r'^2}} dr'. \quad (1.76)$$

Nur wenn  $\Delta\phi$  ein rationaler Teil von  $2\pi$  ist, schliesst sich die Bahnkurve irgendwann wieder einmal! Das ist nur für zwei Sorten von Potentialen der Fall: für  $V(r) \sim 1/r$  und für  $V(r) \sim r^2$  (Theorem von Bertrand, vgl. GOLDSTEIN).

### 1.3.5 Lösung in $d \neq 3$ Dimensionen

#### 1.3.5.1 $d = 2$ Dimensionen

DISKUTIEREN.

#### 1.3.5.2 $d > 3$ Dimensionen

Für das Kepler-Problem (s.u.) ist das kürzlich diskutiert worden in: M. Ömder, A. Vercin, Eur. J. Phys. 27 (2006) 49-55.

## 1.4 Das Kepler-Problem

Kepler fand seine Gesetze der Planetenbewegung nach langjährigen Auswertungen von Beobachtungsdaten. Das  $1/r$ -Gravitationsgesetz und die daraus abgeleiteten Bewegungen sind ein Meilenstein der klassischen Mechanik.

### 1.4.1 Einschub: Polardarstellung der Kegelschnitte

(z.B. GREINER)

$$r = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos \phi}, \quad \varepsilon = 0: \text{Kreis}, \quad \varepsilon = 1: \text{Parabel}, \quad \varepsilon < 1: \text{Ellipse}, \quad \varepsilon > 1: \text{Hyperbel}. \quad (1.77)$$

## 1.4.1.1 Ellipse

Alle Punkte mit Entfernung  $r$  bzw.  $r'$  von zwei festen Brennpunkten  $F, F'$ , die den Abstand  $2c$  haben, erfüllen (SKIZZZE)

$$\begin{aligned} r + r' &= 2a, \quad a \text{ große Halbachse} \\ c &= \sqrt{a^2 - b^2} \equiv \varepsilon a, \quad b \text{ kleine Halbachse, } \varepsilon < 1 \text{ Exzentrizität.} \end{aligned} \quad (1.78)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= 2\mathbf{c} + \mathbf{r} \rightsquigarrow r'^2 = 4c^2 + r^2 + 2r2c \cos \phi \\ \rightsquigarrow (2a - r)^2 &= r'^2 = 4\varepsilon^2 a^2 + r^2 + 4\varepsilon ar \cos \phi \\ \rightsquigarrow r &= \frac{k}{1 + \varepsilon \cos \phi}, \quad k \equiv a(1 - \varepsilon^2) = \frac{b^2}{a}. \end{aligned} \quad (1.79)$$

In kartesischen Koordinaten gilt (NACHRECHNEN)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.80)$$

## 1.4.1.2 Parabel

Alle Punkte mit gleicher Entfernung  $r$  von einem Brennpunkt  $F$  und einer Leitlinie  $L$ , die einen Abstand  $c$  vom Scheitel hat (SKIZZZE), also

$$r = 2c - r \cos \phi \rightsquigarrow r = \frac{k}{1 + \cos \phi}, \quad k = 2c \quad (1.81)$$

## 1.4.1.3 Hyperbel

Alle Punkte mit Entfernung  $r$  bzw.  $r'$  von zwei festen Brennpunkten  $F, F'$ , die den Abstand  $2c$  haben, erfüllen (SKIZZZE)

$$r - r' = 2a, \quad c \equiv \varepsilon a, \quad \varepsilon > 1, \quad 2a \text{ Abstand der zwei Scheitel.} \quad (1.82)$$

Es folgt wieder (Winkel zwischen den Vektoren beachten!)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= 2\mathbf{c} - \mathbf{r} \rightsquigarrow r'^2 = 4c^2 + r^2 + 2r2c \cos \phi \\ \rightsquigarrow r &= \frac{k}{1 + \varepsilon \cos \phi}, \quad k \equiv a(1 - \varepsilon^2). \end{aligned} \quad (1.83)$$

In kartesischen Koordinaten gilt (NACHRECHNEN)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.84)$$

### 1.4.2 Keplersche Gesetze

Kepler leitete aus den Beobachtungsdaten ab:

1. Alle Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
2. In gleichen Zeiten überstreicht der Fahrstrahl Sonne-Planet gleiche Flächen.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen der Bahnen zweier Planeten.

AUFGABE: 1. Leiten Sie das 2. Keplersche Gesetz (Flächensatz) aus der Drehimpulserhaltung ab. Zeigen Sie, dass

$$r^2 \dot{\phi} = \text{const}, \quad \text{Flächensatz} . \quad (1.85)$$

Es handelt sich um Ellipsen und nicht um die ästhetischeren (weil symmetrischeren) Kreise! Vielleicht ein gutes Beispiel gegen zu viel Ästhetik in den Naturgesetzen (vgl. die Diskussion in Lee Smolins Buch 'The trouble with physics').

#### 1.4.2.1 Von Kepler zum Gravitationsgesetz

Wir stellen die Newtonschen Gleichungen durch Komponentenvergleich der Beschleunigung mit der Kraft in Polarkoordinaten auf. Die Beschleunigung in 3d Polarkoordinaten ist (AUFGABE, vgl auch SKRIPT MM)

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \mathbf{e}_\theta \\ &+ (2r\dot{\theta}\dot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + r\ddot{\phi} \sin \theta) \mathbf{e}_\phi, \end{aligned} \quad (1.86)$$

hier setzen wir wiederum  $\theta = \pi/2$ , da die Bewegung in einer Ebene erfolgt (das wissen wir bereits aus der allgemeinen Behandlung zentralsymmetrischer Probleme in  $d = 3$ , wir könnten uns an dieser Stelle aber auch auf Kepler berufen). Die Newtonschen Gleichungen  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$  mit der Kraft in Polarkoordinaten in der  $x$ - $y$ -Ebene,  $\mathbf{F} = F_r \mathbf{e}_r + F_\phi \mathbf{e}_\phi$ , liefern durch Komponentenvergleich

$$m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 = F_r \quad (1.87)$$

$$m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = F_\phi. \quad (1.88)$$

Aus Kepler II,  $mr^2\dot{\phi} \equiv L = \text{const}$ , folgt sofort

$$F_\phi = 0. \quad (1.89)$$

Aus Kepler I,  $r = k/(1 + \varepsilon \cos \phi)$ , folgt dann

$$\begin{aligned} m\dot{r} &= m \frac{\varepsilon k \dot{\phi} \sin \phi}{(1 + \varepsilon \cos \phi)^2} = \frac{\varepsilon}{k} L \sin \phi \\ m\ddot{r} &= \frac{\varepsilon}{k} L \dot{\phi} \cos \phi = \frac{m}{k} \dot{\phi}^2 r^2 \left( \frac{k}{r} - 1 \right) = mr\dot{\phi}^2 - \frac{L^2}{mk} \frac{1}{r^2}. \end{aligned} \quad (1.90)$$

Der Vergleich ergibt das gesuchte Kraftgesetz;

$$F_r = -\frac{L^2}{mk} \frac{1}{r^2}, \quad F_\phi = 0. \quad (1.91)$$

AUFGABE: Bestimmen Sie umgekehrt aus dem Potential  $V(r) = -\alpha/r$  die Form der Bahnkurve. Bestimmen Sie den Zusammenhang von Gesamtenergie  $E$  und Drehimpuls  $L$  mit den Parametern  $k$  und  $\varepsilon$  der Bahn.

#### 1.4.2.2 Drittes Keplersches Gesetz

Die Umlaufzeit  $T$  erhalten wir aus

$$L = mr^2\dot{\phi} = \text{const} \rightsquigarrow LT = \int_0^{2\pi} mr^2 d\phi \quad (1.92)$$

Das ist ein **Flächenintegral**, es folgt wegen  $k = b^2/a$

$$LT = 2\pi mab = 2\pi m\sqrt{a^3k} \rightsquigarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m^2 k}{L^2} \quad (1.93)$$

Kepler III sagt

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \text{const}, \quad \text{3. Keplersches Gesetz}, \quad (1.94)$$

d. h.  $m^2k/L^2$  in Gl. (1.93) ist unabhängig von der reduzierten Masse  $m$ , und wir können schreiben

$$F_r = -\text{const} \frac{m}{r^2} \quad (1.95)$$

mit einer Konstanten, die nicht mehr von der reduzierten Masse  $m$  abhängt.

#### 1.4.3 Runge-Lenz-Vektor

Im Kepler-Problem, d.h. der Bewegung im radialsymmetrischen Potential in  $d = 3$ ,

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad (1.96)$$

gibt es eine weitere Erhaltungsgröße

$$\mathbf{\Lambda} \equiv \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{L}}{\alpha m} - \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (1.97)$$

Die Exzentrizität  $\varepsilon = |\mathbf{\Lambda}|$ , und  $\mathbf{\Lambda}$  zeigt vom Brennpunkt zum Perihel (zentrumsnächster Bahnpunkt).

### 1.4.4 Periheldrehung

Die erste allgemeinrelativistische Korrektur zum  $1/r$ -Gravitationsgesetz ergibt sich in der Form (z.B. STRAUMANN, 'Allgemeine Relativitätstheorie')

$$V(r) = -\frac{GM}{r} \left( 1 + \frac{L^2}{r^2 c^2} \right), \quad (1.98)$$

wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit ist.

AUFGABE:

1. Zeige mit Hilfe von Gl. (1.76), dass durch den Zusatzterm  $\frac{L^2}{r^2 c^2}$  die Bahnkurve keine geschlossene Ellipse mehr bleibt, sondern sich das Perihel der Bahn bei jedem Umlauf um etwa

$$\delta\phi = \frac{6\pi(GM)^2 m^2}{L^2 c^2} \quad (1.99)$$

ändert.

2. Überprüfe, ob sich das Ergebnis Gl. (1.99) numerisch mit dem Java-Applet zur Planetenbewegung (web-page des Instituts zur Lehre) überprüfen lässt.

### 1.4.5 Weiter zum Lesen empfehlenswert

Vor allem GOLDSTEIN ist in seinem Kapitel 3 über Zentralkräfte sehr ausführlich. Hier in der Vorlesung nicht behandelte, aber auch sehr interessante Aspekte sind: Das Virialtheorem, allgemeine Potenzgesetze in  $V(r) \sim r^n$  (vgl. auch das Java-Applet zur Mechanik auf unseren web-pages zur Lehre), das Theorem von Bertrand, und die zeitliche Bewegung im Kepler-Problem, die auf ein für die Astronomie interessantes numerisches Problem führt, das auch die Entwicklung der numerischen Mathematik beeinflusst hat. Ebenso ausgelassen haben wir das Problem der **Streuung** und das **Dreikörperproblem**.

## 1.5 Einfache Potentialtheorie

### 1.5.1 Potential einer Massenverteilung

Das Gravitationspotential für eine feste Punktmasse  $m_i$  am Ort  $\mathbf{r}_i$  und eine 'Testmasse'  $m$  am Ort  $\mathbf{r}$  ist  $V(\mathbf{r}) = -Gmm_i/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$ . Entsprechend ist das von  $N$  sich an den Orten  $\mathbf{r}_i$  befindlichen Massen erzeugte Potential durch die Summe

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= -Gm \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} = -Gm \sum_{i=1}^N m_i \int d^3r' \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= -Gm \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \rho(\mathbf{r}') \equiv \sum_{i=1}^N m_i \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \end{aligned} \quad (1.100)$$

gegeben. Hierbei haben wir die **Massendichte**  $\rho(\mathbf{r}') \equiv \sum_{i=1}^N m_i \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i)$  als Summe über dreidimensionale **Deltafunktionen** eingeführt. Die Deltafunktion ist uns bereits

in MM begegnet, wir erinnern uns an ihre Eigenschaft

$$\int dx' \delta(x' - x) f(x') = f(x), \quad \int dx' \delta(x' - x) = 1, \quad \text{Deltafunktion in } d = 1. \quad (1.101)$$

Analog hat man in  $d > 1$  Dimensionen in kartesischen Koordinaten einfach Produkte von Deltafunktionen

$$\mathbf{r} = (x_1, \dots, x_d), \quad \delta^d(\mathbf{r}) = \delta(x_1) \cdot \dots \cdot \delta(x_d) \quad (1.102)$$

$$\int d^d r' \delta^d(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) f(\mathbf{r}') = f(\mathbf{r}), \quad \int d^d r' \delta^d(\mathbf{r}') = 1. \quad (1.103)$$

Für ein System von Massenpunkten  $m_i$  ist die entsprechende Dichte

$$\rho(\mathbf{r}) \equiv \sum_{i=1}^N m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (1.104)$$

also einfach eine mit den Massen  $m_i$  gewichtete Summe über Deltafunktionen. Eine einzelne **Punktmasse**, die am Ort  $\mathbf{r}_i$  sitzt, hat mathematisch Dichte Null ausserhalb  $\mathbf{r}_i$  und unendliche Dichte in  $\mathbf{r}_i$ , und zwar so, dass das räumliche Integral über die Dichte gerade die Masse  $m_i$  ergibt. Dieses ist ein außerordentlich nützliches Konzept nicht nur in der Mechanik, sondern in allen Gebieten der Physik, wo mit Massen-, Ladungs- und anderen Verteilungen operiert wird.

### 1.5.2 Newtonsches Gravitationsfeld

(z.B. WIKEPEDIA) Die Gravitationskraft zwischen einer Testmasse  $m$  und einer festen Masse  $m_i$  bei  $\mathbf{r}_i$  ist

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \equiv m \mathbf{g}_i(\mathbf{r}), \quad \mathbf{g}_i(\mathbf{r}) = -G m_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}. \quad (1.105)$$

Wir bezeichnen das Vektorfeld  $\mathbf{g}_i(\mathbf{r})$  als **Newtonsches Gravitationsfeld**. Es wird von der festen Masse erzeugt und beschreibt die Gravitationskraft pro Testmasse  $m$ . Wir legen eine Kugel von Radius  $R$  um die feste Masse  $m_i$  bei  $\mathbf{r}_i$  und integrieren über die Kugeloberfläche

$$\int d\mathbf{A} \mathbf{g}_i(\mathbf{r}) = -G m_i 4\pi R^2 \frac{1}{R^2} = -4\pi G m_i. \quad (1.106)$$

Wir schreiben die rechte Seite als Volumenintegral über die Massendichte  $\rho_i(\mathbf{r}) = m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$  und benutzen den Gaußschen Integralsatz (siehe MM),

$$-4\pi G \int dV \rho_i(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{A} \mathbf{g}_i(\mathbf{r}) = \int dV \nabla \cdot \mathbf{g}_i(\mathbf{r}). \quad (1.107)$$

Das gilt für beliebige Radien  $R > 0$ , und wir folgern für die Divergenz des Gravitationsfeldes

$$\text{div} \mathbf{g}_i(\mathbf{r}) = -4\pi G \rho_i(\mathbf{r}). \quad (1.108)$$

Summation über viele Massenpunkte  $m_i$  führt zu dem Gravitationsfeld  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$  einer beliebigen Massendichte  $\rho(\mathbf{r})$ ,

$$\operatorname{div}\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -4\pi G\rho(\mathbf{r}), \quad \text{Gaußsches Gesetz für Newtonsches Gravitationsfeld. (1.109)}$$

AUFGABE: Berechne mit Hilfe des Gaußsches Gesetzes und des Gaußschen Integralsatzes das Gravitationsfeld  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$  a) einer homogenen Kugel der Masse  $M$  mit Radius  $R$  b) einer homogenen Kugelschale mit Radien  $R_1, R_2$  und Masse  $M$ .

### 1.5.3 Poisson-Gleichung, Laplace-Operator

Die durch eine Massendichte  $\rho(\mathbf{r})$  erzeugte Gravitationskraft auf eine punktförmige Testmasse  $m$  bei  $\mathbf{r}$  ist

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \equiv m\mathbf{g}(\mathbf{r}), \quad \operatorname{div}\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -4\pi G\rho(\mathbf{r}) \quad (1.110)$$

Dieses ist eine konservative Kraft mit Potential  $V(\mathbf{r})$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \equiv -\nabla V(\mathbf{r}), \quad V(\mathbf{r}) = -Gm \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.111)$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{r}) &= -\operatorname{div}\operatorname{grad}V(\mathbf{r}) = -4\pi Gm\rho(\mathbf{r}) \\ \operatorname{div}\operatorname{grad}V(\mathbf{r}) &\equiv \nabla \cdot \nabla V(\mathbf{r}) \equiv \Delta V(\mathbf{r}) = 4\pi Gm\rho(\mathbf{r}), \quad \text{Poisson-Gleichung (1.112)} \end{aligned}$$

Hierbei heisst  $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla$  **Laplace-Operator**, in 3d kartesischen Koordinaten gilt (AUFGABE)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.113)$$

Bei gegebener, beliebiger Massenverteilung  $\rho(\mathbf{r})$  lässt sich das Potential und damit die Kraft also aus einer einzigen partiellen Differentialgleichung bestimmen.

### 1.5.4 Die Divergenz und der Laplace-Operator

Die Divergenz geht analog zur Rotation, und ich verweise an dieser Stelle einfach auf die Lehrbücher, z.B. GREINER. Entsprechend der Laplace-Operator, evtl. später.

### 1.5.5 Vergleich mit der Elektrostatik. Multipolentwicklung

Das Gaußsche Gesetz und die Poisson-Gleichung sollten Ihnen aus der Elektrostatik bekannt sein (wenn nicht, den Berkeley Physik-Kurs Band 2 unbedingt durcharbeiten). Die Elektrostatik hat mit dem Coulomb-Gesetz eine der Newtonschen Gravitationskraft entsprechende Kraft mit  $1/r$ -Potential in drei Dimensionen. Allerdings gibt es Ladungen mit zwei verschiedenen Vorzeichen. Auf die Multipol-Entwicklung des Potentials  $V(\mathbf{r})$ , Gl. (1.111), wird spätestens in der Elektrodynamik-Vorlesung zurückgekommen (vgl. Lehrbuch SCHECK für die Mechanik).

AUFGABE: Denken Sie über den Faradayschen Käfig nach. Gibt es so etwas mit der Gravitationskraft? Welche Rolle spielen Äquipotentialflächen?

## 2. LAGRANGE-MECHANIK

### 2.1 Zwangskräfte und Nebenbedingungen

In vielen mechanischen Problemen verläuft eine Bewegung eingeschränkt durch Nebenbedingungen, z.B. auf der Oberfläche einer Kugel etc.

#### 2.1.1 Beispiel: Teilchen auf einer schiefen Ebene

Beispiel schiefe Ebene: Die Zwangskraft  $\mathbf{Z}$  addiert sich mit der gegebenen Kraft (Schwerkraft)  $\mathbf{F}$  zur Kraft in Bahnrichtung.  $\mathbf{Z}$  kompensiert die Komponente von  $\mathbf{F}$ , die gegen die Bahn drückt. Dadurch bleibt die Masse stets auf der Bahn.  $\mathbf{Z}$  muß letztlich durch weitere äußere Kräfte von außen ‘aufgebracht’ werden, z.B. durch Aufhängungen etc., die dafür sorgen, daß sich die Bahn nicht verschiebt oder dreht. *Diese äußeren Kräfte werden als gegeben angenommen und nicht explizit modelliert.*

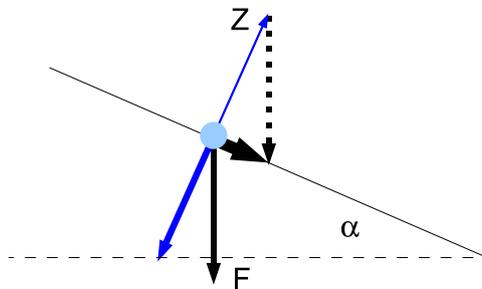


Fig. 2.1: Schiefe Ebene

#### 2.1.2 Teilchen auf einer Fläche

(FLIESSBACH Kap. 7) Zwangsbedingungen werden durch Zwangskräfte  $\mathbf{Z}$  hergestellt, die i. A. von der (gesuchten) Bewegung abhängen (vgl. ARNOLD Kap 21). Betrachte die Bewegung eines Massenpunktes  $\mathbf{r}(t)$  auf einer Fläche. Wären Newton's Gleichungen  $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r})$  erfüllt, dann wäre die Bahn in Abwesenheit äußerer Kräfte

( $U \equiv \text{const}$ ) eine gerade Bahn, also nicht auf der Fläche. Deshalb muss es eine Zwangskraft  $\mathbf{Z}$  geben, die den Massenpunkt auf der Fläche halten, so dass insgesamt

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{Z}. \quad (2.1)$$

Die Fläche sei durch

$$g(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \text{holonome Randbedingungen} \quad (2.2)$$

gegeben. Die Zwangskraft  $\mathbf{Z}$  muss senkrecht zur Fläche sein,

$$\mathbf{Z} \parallel \nabla g(\mathbf{r}, t) \rightsquigarrow \mathbf{Z}(\mathbf{r}, t) = \lambda(t) \nabla g(\mathbf{r}, t) \quad (2.3)$$

mit der zu bestimmenden Funktion  $\lambda(t)$ , die wegen  $g = g(\mathbf{r}(t), t)$  von der Zeit  $t$  abhängt. Der Gradient kommt hier ins Spiel, weil er in Richtung des stärksten Anstiegs von  $g(\mathbf{r}, t)$  zeigt und  $g(\mathbf{r}, t) = 0 = \text{const}$  eine 'Äquipotentialfläche' definiert, auf der der Gradient senkrecht steht.

### 2.1.3 Mehrere Freiheitsgrade und Zwangskräfte: Lagrange I

Ein mechanisches System werde jetzt durch ein System von Newtonschen Gleichungen mit Nebenbedingungen beschrieben, in kartesischen Koordinaten als

$$\begin{aligned} m_n \ddot{x}_n &= F_n + Z_n, \quad n = 1, \dots, K \\ g_\alpha(x_1, \dots, x_K, t) &= 0, \quad \alpha = 1, \dots, r. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Hierbei ist z.B. für  $N$  Teilchen in  $d$  Dimensionen  $K = dN$ , die  $F_n$  sind äußere Kräfte, und die  $Z_n$  sind Zwangskräfte für insgesamt  $r$  holonome Zwangsbedingungen  $g_\alpha$ . Ein Beispiel für zwei Nebenbedingungen in  $d = 3$  sind **Kegelschnitte**

$$z^2 = \alpha^2(x^2 + y^2), \quad z = a + bx + cy, \quad (2.5)$$

(vgl. 'Conic section' in wikipedia).

Kompakt schreiben wir im Konfigurationsraum (mit der **symmetrischen Massen-Matrix**  $M$ , AUFGABE: wie lautet ihre explizite Form?)

$$\begin{aligned} M\ddot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F} + \mathbf{Z} \\ g_\alpha(\mathbf{x}, t) &= 0, \quad \alpha = 1, \dots, r. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Hier sind die Vektoren  $K$ -dimensional. Jede der  $r$  Zwangsbedingungen schränkt die Bewegung auf eine  $K - 1$ -dimensionale Mannigfaltigkeit (Hyperfläche) ein, innerhalb derer die Bewegung noch erlaubt ist und senkrecht zu der also eine Kraft  $\mathbf{Z}_\alpha \propto \nabla g_\alpha$  wirken muss:

$$\mathbf{Z}_\alpha = \lambda_\alpha(t) \nabla g_\alpha \quad (2.7)$$

mit zu bestimmenden Funktionen  $\lambda_\alpha(t)$ . Die  $\mathbf{Z}_\alpha$  ergeben sich durch die Lösung der Gleichungen dabei gerade so, dass die Bewegung unter dem Einfluß der Gesamtkräfte (äußere plus Zwangskräfte) tatsächlich die geforderten Nebenbedingungen erfüllt.

Sind alle Zwangsbedingungen voneinander unabhängig, muss es  $r$  unabhängige Komponenten der Zwangskraft im Konfigurationsraum geben, insgesamt also

$$M\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} + \sum_{\alpha=1}^r \lambda_\alpha(t) \nabla g_\alpha \quad (2.8)$$

$$g_\alpha(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, r. \quad (2.9)$$

Damit hat man  $K + r$  Gleichungen für die  $K + r$  gesuchten Funktionen  $x_n(t)$  und  $\lambda_\alpha(t)$ , die man nun eindeutig lösen kann und aus denen nicht nur die gesuchte Bewegung  $x_n(t)$  folgt, sondern auch explizit die Zwangskräfte  $Z_n$ .

### 2.1.4 Beispiel: Teilchen auf einer Kurve

Ein Massenpunkt  $m$  bewege sich in  $d = 2$  Dimensionen entlang einer Kurve  $g_1(x, y) = y - f(x) = 0$  unter dem Einfluß der Schwerkraft  $\mathbf{F} = (0, -mg)$ ,  $g > 0$ . Die Bewegungsgleichung für die  $x$ -Koordinate des Massenpunktes hat die Form einer DGL zweiter Ordnung für  $x(t)$  mit  $x$ -abhängigen Koeffizienten (AUFGABE),

$$\ddot{x}(1 + f'(x)^2) + \dot{x}^2 f''(x) + g f'(x) = 0. \quad (2.10)$$

Wir haben mit dieser Lösung eine Erhaltungsgröße, nämlich die Gesamtenergie  $E$  (AUFGABE)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}^2 (1 + f'(x)^2) + m g f(x) \right] &= 0 \\ \rightsquigarrow E &\equiv \frac{1}{2} m \dot{x}^2 (1 + f'(x)^2) + m g f(x) = \text{const} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Aus der Zwangsbedingung folgt (NACHPRÜFEN)

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &= y - f(x) = 0 \rightsquigarrow \mathbf{Z} = \lambda(t)(-f'(x), 1) \rightsquigarrow \lambda(t) = -\frac{m\ddot{x}}{f'(x)} \\ \rightsquigarrow \lambda(t) &= m \frac{g + \dot{x}^2 f''(x)}{1 + f'(x)^2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Wir haben z.B. für die schiefe ‘Ebene’ (eigentlich eine Gerade, wir haben die Bewegung in eine Raumrichtung bereits herausgenommen, NACHPRÜFEN, vgl. mit Skizze oben)

$$f(x) = -x \tan \alpha \rightsquigarrow \mathbf{Z} = m g \cos^2 \alpha (\tan \alpha, 1) = m g \cos \alpha (\sin \alpha, \cos \alpha) \quad (2.13)$$

AUFGABE: Versuche, einen geschlossenen Ausdruck für die Lösung  $x(t)$  für andere Kurvenformen zu erhalten, z.B.  $f(x) = \frac{1}{2} c x^2$ ,  $c > 0$ . Welches mathematisches Problem tritt dabei auf?

## 2.2 Die Erlösung: Lagrange II

### 2.2.1 Elimination der Zwangskräfte

Wir führen  $f = K - r$  neue Koordinaten  $q_i$  ein,

$$x_n = x_n(q_1, \dots, q_f, t), \quad n = 1, \dots, K, \quad (2.14)$$

so dass die Zwangsbedingungen erfüllt werden,

$$g_\alpha(\mathbf{x}(q_1, \dots, q_f, t), t) = 0. \quad (2.15)$$

Daher

$$\frac{\partial}{\partial q_k} g_\alpha = \nabla g_\alpha \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k} = 0, \quad (2.16)$$

und aus Lagrange I, Gl. (2.8), folgt durch Multiplikation mit  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k}$

$$M\ddot{\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k} = \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k}. \quad (2.17)$$

Die linke Seite wird jetzt durch die kinetische Energie  $T$  des gesamten Systems ausgedrückt,

$$T \equiv \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} M \dot{\mathbf{x}}. \quad (2.18)$$

Diese hängt von den neuen Koordinaten  $q_k$  und den neuen Geschwindigkeiten  $\dot{q}_k$  ab,

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = \dot{\mathbf{x}} M \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \dot{\mathbf{x}} M \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \dot{q}_k} = \dot{\mathbf{x}} M \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k}, \quad (2.19)$$

wobei wir im letzten Schritt die ‘Punkte kürzen’ dürfen wegen

$$\dot{x}_n = \sum_{k=1}^f \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_n}{\partial t} \rightsquigarrow \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k}. \quad (2.20)$$

Jetzt berechnen wir

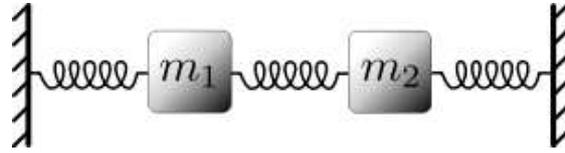
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \ddot{\mathbf{x}} M \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k} + \dot{\mathbf{x}} M \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k} = \ddot{\mathbf{x}} M \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k} + \dot{\mathbf{x}} M \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial q_k} = \ddot{\mathbf{x}} M \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k}, \quad (2.21)$$

wobei

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial q_k} \quad (2.22)$$

und die Tatsache, dass  $M$  symmetrisch ist, ausgenutzt wurde (AUFGABE). Insgesamt haben wir also mit Gl. (2.17)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k} \equiv Q_k, \quad (2.23)$$



**Fig. 2.2:** Normalmoden ©WIKIPEDIA <http://en.wikipedia.org/wiki/Normalmode>

wobei wir gleich die **verallgemeinerten Kräfte**  $Q_k$  definiert haben. Für äußere Kräfte  $\mathbf{F}$  mit einem Potential  $U(\mathbf{x}, t)$  gilt

$$\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{x}, t) \rightsquigarrow Q_k = \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k} = -\nabla U(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k} = -\frac{\partial}{\partial q_k} U(\mathbf{x}(q_1, \dots, q_f), t). \quad (2.24)$$

Wir definieren die **Lagrange-Funktion**

$$L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) \equiv T(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) - U(q_1, \dots, q_f, t) \quad (2.25)$$

und erhalten so die **Lagrange-Gleichungen zweiter Art**,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, f, \quad \text{Lagrange-Gleichungen 2. Art} \quad (2.26)$$

**AUFGABE:** Wiederhole diese Herleitung für den Fall, dass die Matrix  $M$  der Massen von der Zeit  $t$  abhängt,  $M = M(t)$ .

## 2.2.2 Beispiele für Lagrange II

### 2.2.2.1 Kartesische Koordinaten

Hieraus folgen natürlich sofort die Newtonschen Gleichungen in der üblichen Form (NACHPRÜFEN)

### 2.2.2.2 Polarkoordinaten

Für ein freies Teilchen in  $d = 3$  Dimensionen ist die Lagrange-Funktion, vgl. Gl. (1.69)

$$L(r, \theta, \phi) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right), \quad d = 3. \quad (2.27)$$

Die daraus folgenden Lagrange-Gleichungen (AUFGABE) sind einfach die drei Komponenten-Gleichungen  $m\ddot{\mathbf{x}} = 0$  mit den Komponenten der Beschleunigung in Polarkoordinaten, vgl. Gl. (1.86). Die Lagrange-Gleichungen sind also ein direkter Weg, um sich die Beschleunigung (und damit die Christoffel-Symbole, vgl. MM) in krummlinigen Koordinaten zu besorgen.

### 2.2.2.3 Über Federn gekoppelte Massen

Jetzt betrachten wir ein spezielles Beispiel zweier gleicher Massen  $m$ , die sich auf einer Geraden bewegen (räumliche Dimension  $d = 1$ ) und durch Federn mit gleicher Federkonstante  $k$  aneinander und jeweils an eine Wand links und rechts gekoppelt sind (Bild, vgl. SKRIPT MM). Wir nehmen Koordinaten  $x_1$  und  $x_2$ , gerechnet von den jeweiligen Ruhelagen der Massen.

Wir berechnen kinetische und potentielle Energie,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \\ V &= \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Aus Lagrange II mit  $L = T - V$  folgen die Bewegungsgleichungen,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 0 \rightsquigarrow m_1\ddot{x}_1 + kx_1 + k(x_1 - x_2) = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 0 \rightsquigarrow m_2\ddot{x}_2 + kx_2 - k(x_1 - x_2) = 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

AUFGABE: Bewegungsgleichungen für dreiatomiges Molekül herleiten.

### 2.2.2.4 Doppelpendel

Als AUFGABE. Lösung der Bewegungsgleichung für kleine Winkel.

### 2.2.2.5 Atwoodsche Fallmaschinen

Als AUFGABE, mit Lösung der Bewegungsgleichungen.

## 2.2.3 Bewegung entlang einer Kurve

Wiederum betrachten wir einen Massenpunkt  $m$ , der sich entlang der Kurve  $y = f(x)$  bewege. Zunächst wirke außer der Zwangskraft keine weitere äußere Kraft. Da es sich um ein eindimensionales Problem handelt, brauchen wir eine generalisierte Koordinate  $q$  im Lagrange-Formalismus. Wir wählen die **Bogenlänge**  $s$  als neue Koordinate, denn die Bogenlänge hat die schöne Eigenschaft (vgl MM)

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt \rightsquigarrow L = T = \frac{1}{2}m\dot{s}^2. \quad (2.30)$$

Die Bewegungsgleichung lautet daher einfach

$$\begin{aligned} m\ddot{s}(t) &= 0 \rightsquigarrow \frac{d}{dt} \sqrt{\dot{x}^2(1 + f'(x)^2)} = 0 \\ \rightsquigarrow \ddot{x}(1 + f'(x)^2) + \dot{x}^2 f'(x) f''(x) &= 0, \end{aligned} \quad (2.31)$$

was wir schon von Gl. (2.10) kennen (hier  $g = 0$ ).

Entlang der Kurve wirke nun die Kraft  $F(s)$ ,

$$m\ddot{s} = F(s) = -\frac{d}{ds}U(s) \quad (2.32)$$

mit dem Potential  $U(s)$ . Daraus folgt Energieerhaltung,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + U(s) \right) = 0. \quad (2.33)$$

Die Gesamtenergie  $E$  ist konstant, das führt zu

$$E \equiv \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + U(s) \rightsquigarrow t - t_0 = \int_{s_0}^s \frac{ds'}{\sqrt{2[E - U(s')]/m}}, \quad (2.34)$$

man bekommt die Lösung in einer Dimension also durch direkte Integration. AUFPASSEN: man hat hier die positive Wurzel gezogen.

AUFGABE:

1. Diskutieren für  $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ ,  $x$  Koordinate auf einer Geraden (harmonischer Oszillator).
2. Diskutieren für Kraft mit Potential  $U(s) = \frac{1}{2}m\omega^2s^2$  ( $s$  Bogenlänge) entlang der Kurve  $y = f(x)$  in der  $x$ - $y$ -Ebene.
3. Diskutieren für Kraft in  $x$ -Richtung mit Potential  $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$  für Bewegung entlang der Kurve  $y = f(x) = \alpha^{-1}\sin(\alpha x)$  in der  $x$ - $y$ -Ebene.
4. Diskutieren für Kraft in  $y$ -Richtung mit Potential  $U(y)$  für Bewegung entlang einer Kurve  $y = f(x)$  in der  $x$ - $y$ -Ebene.
5. Schwingungsdauer für nichttriviales Potential (anharmonischer Oszillator).

## 2.3 Extremalprinzipien

Wir werden nun ein wichtiges neues Verfahren kennenlernen, mit dessen Hilfe Grundgleichungen (Bewegungsgleichungen) in der Physik hergeleitet werden können.

### 2.3.1 Das Brachistochronen-Problem

(z.B. FLIESSBACH). (Johann, Jakob) Bernoulli und andere 1696, vgl.

<http://mathworld.wolfram.com/BrachistochroneProblem.html>.

Ein Massenpunkt  $m$  bewegt sich längs einer Kurve  $y = f(x)$  im homogenen Schwerkelfeld (Potential  $U(x) = mgy = mgf(x)$ ) von Punkt  $P_1 = (x_1, y_1)$  nach  $P_2 = (x_2, y_2)$ . Für welche Kurvenform  $f(x)$  durch diese beiden Punkte ( $f(x_1) = y_1$  und  $f(x_2) = y_2$ ) wird die Zeit  $t$ , die das Teilchen (Anfangsgeschwindigkeit Null) braucht, minimal?

Wir können dieses Problem bereits mittels unserer Lösung Gl. (2.34) für die Bewegung entlang einer Kurve formulieren,

$$E \equiv \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + U(s) \rightsquigarrow t = \int_0^s \frac{ds'}{\sqrt{2[E - U(s')]/m}} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{2[E/m - gf(x)]}} dx = \min. \quad (2.35)$$

Da die Kurve  $f(x)$  hier gesucht ist, wird die Zeit  $t$  zu einem **Funktional**,

$$t = t[f(x)], \quad (2.36)$$

das minimiert werden muss.

### 2.3.2 Einschub: Funktionale und Variationsableitungen

Wir definieren das zunächst relativ allgemein (VOGELSANG, VL Göttingen 1988), um z.B. später auch die Maxwell- Gleichungen oder die Schrödinger-Gleichung aus einem Variationsprinzip herleiten zu können: Statt einer Funktion  $f(x)$  betrachten wir allgemeiner vektorwertige Funktionen  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , d.h.  $m$  Funktionen  $(u_1(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x}))$  mit  $u_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (sprechen aber trotzdem noch salopp von 'Funktion'). Statt der Integration über das Intervall  $[x_1, x_2]$  haben wir nun eine Integration über ein Gebiet  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ , wobei das Integral so aussieht:

$$J[\mathbf{u}] \equiv \int_{\Omega} d^n \mathbf{x} F(\mathbf{x}, u_1(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x}), \nabla u_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla u_m(\mathbf{x})) \quad (2.37)$$

mit einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion  $F$  als Integrand und einmal stetig differenzierbarem  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ . Das Integral  $J[\mathbf{u}]$  wird als **Funktional** aufgefaßt: jeder Funktion  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  wird eine reelle Zahl  $J[\mathbf{u}]$  zugeordnet.

**Definition** Das Argument  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  werde ein wenig variiert, d.h.  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{h}(\mathbf{x})$  mit  $\varepsilon > 0$  und  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), \dots, h_m(\mathbf{x}))$ . Dann heißt

$$\delta J_{\mathbf{u}}[\mathbf{h}] \equiv \left. \frac{d}{d\varepsilon} J[\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{h}] \right|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J[\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{h}] - J[\mathbf{u}]}{\varepsilon} \quad (2.38)$$

die **1. Variation** von  $J$  im Punkt  $\mathbf{u}$  in Richtung  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ .

Grob hat man folgende Analogie (vgl MM zur Richtungsableitung):

Funktion $f(\mathbf{x})$	Funktional $J[\mathbf{u}]$
Punkt $\mathbf{x}$ ist ein Vektor $\in \mathbb{R}^n$	Punkt $\mathbf{u}$ ist eine Funktion
Gradient $\nabla f(\mathbf{x})$ (als lineares Funktional)	1. Variation $\delta J_{\mathbf{u}}$ (als lineares Funktional)
Richtungsableitung $\mathbf{v} \nabla f(\mathbf{x})$ in Richtung $\mathbf{v}$	1. Variation $\delta J_{\mathbf{u}}[\mathbf{h}]$ in Richtung $\mathbf{h}$ .

**Definition** Die Funktion  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  heißt **stationärer Punkt** des Funktionals  $J[u]$ , wenn  $\delta J_{\mathbf{u}}[\mathbf{h}] = 0$  für alle  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ , die auf dem Rand des Gebiets  $\Omega$  verschwinden.

Im obigen Brachistochronen-Problem entspricht das Verschwinden auf dem Rand gerade der Bedingung  $f(x_1) = y_1$  und  $f(x_2) = y_2$ , d.h. die gesuchte Kurve muss durch die zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$  gehen (SKIZZZE).

**Satz 2.** Ein stationärer Punkt  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  des Funktionals  $J[u]$  genügt den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial u_{1,k}} - \frac{\partial F}{\partial u_1} &= 0 \\ &\dots = \dots \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial u_{m,k}} - \frac{\partial F}{\partial u_m} &= 0, \quad u_{i,k} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Im Spezialfall  $n = 1$ , wo also  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(t)$  eine einparametrische Kurve im  $\mathbb{R}^m$  ist, lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{u}_1} - \frac{\partial F}{\partial u_1} &= 0 \\ &\dots = \dots \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{u}_m} - \frac{\partial F}{\partial u_m} &= 0, \quad \dot{u}_i \equiv \frac{\partial u_i}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Beweis: wir betrachten zunächst  $m = 1$ , d.h.  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x})$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} J[u_1 + \varepsilon h_1] \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\Omega} d^n \mathbf{x} F(\mathbf{x}, u_1 + \varepsilon h_1, \nabla u_1 + \varepsilon \nabla h_1) \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_{\Omega} d^n \mathbf{x} \left( \frac{\partial F}{\partial u_1} h_1 + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial u_{1,k}} \frac{\partial h_1}{\partial x_k} \right) \\ &= \int_{\Omega} d^n \mathbf{x} \left( \frac{\partial F}{\partial u_1} - \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial u_{1,k}} \right) \right) h_1, \quad \text{part. Int., } h_1 = 0 \text{ auf dem Ran} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Da das für beliebige  $h_1(\mathbf{x})$  gelten muss, folgt

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} - \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial u_{1,k}} \right) = 0. \quad (2.42)$$

Für  $m > 0$  geht das entsprechend, nur hat man da eine Summe über die  $m$  verschiedenen  $h_i$ , und es folgen die Euler-Lagrange-Gleichungen Gl. (2.39). Ende des Beweises.

Die hier vorgestellten Ableitungen sind Teil der **Variationsrechnung** in der Mathematik.

AUFGABE: Löse das Brachistochronen-Problem (s.o.) explizit.

### 2.3.3 Das Hamiltonsche Prinzip

Aus diesem Prinzip werden die Lagrange-Gleichungen 2. Art der Mechanik wie folgt abgeleitet: Gegeben sei ein festes Zeitintervall  $[t_1, t_2]$  und ein mechanisches System mit

$f$  Freiheitsgraden und Lagrangefunktion  $L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$  mit dem Vektor der verallgemeinerten Koordinaten  $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_f(t))$ . Üblicherweise ist  $L = T - V$  die Differenz von kinetischer und potentieller Energie. Dann definieren wir das **Wirkungsfunktional**

$$S[\mathbf{q}] \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t), \quad \text{Wirkung(sintegral)}. \quad (2.43)$$

Dann besagt das Hamiltonsche Prinzip: *Die Dynamik des mechanisches Systems in der Zeit von  $t_1$  nach  $t_2$  wird durch einen stationären Punkt  $\mathbf{q}(t)$  der Wirkung beschrieben.* Anders gesagt: Die Natur wählt die ‘Bahn’  $\mathbf{q}(t)$  derart, dass die zu dieser Bahn gehörige Wirkung extremal im Vergleich zu allen anderen benachbarten Bahnen  $\mathbf{q}(t) + \varepsilon \mathbf{h}(t)$  wird, wobei wie bei unserer obigen Definition der 1. Variation immer  $\mathbf{h}(t_1) = \mathbf{h}(t_2) = 0$  gelten muss.

Unsere Lagrange-Gleichungen Gl. (2.26) folgen nun als Spezialfall von Gl. (2.39) mit  $n = 1$ , d.h. Gl. (2.40) und  $m = f, \Omega = [t_1, t_2]$  und  $L = F$  aus

$$\delta S[\mathbf{q}] = 0, \quad \text{Hamiltonsches Prinzip} \quad (2.44)$$

$$\rightsquigarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, f, \quad \text{Lagrange-Gleichungen 2. Art} \quad (2.45)$$

Das Hamiltonsche Prinzip ist ein Integralprinzip, in dem die Bahn des Systems zur Zeit  $t$  durch die Wirkung für *alle* Zeiten  $t \in [t_1, t_2]$  festgelegt wird, insbesondere also auch durch zukünftige Zeiten (SOMMERFELD): ‘Das Hamiltonsche Prinzip ist scheinbar nicht kausal, sondern teleologisch’. Die Bahn folgt letztlich aber als Lösung der Lagrangegleichungen. Diese können als Anfangswertproblem (kausal, Orte und Geschwindigkeiten zur Zeit  $t_1$  vorgeben) bzw. als Randwertproblem (Orte zu den zwei Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  vorgeben) gelöst werden. Beide Problemarten werden vom Hamiltonschen Prinzip erfaßt.

### 2.3.4 Nicht-Eindeutigkeit von $L$ , Eichtransformationen

Das Hamiltonsche Prinzip und die Lagrange-Funktion  $L$  sind ein einfacher Ausgangspunkt zur Herleitung von Bewegungsgleichungen, vgl. z.B. die Diskussion in FLIESSBACH. Allerdings gilt folgender

**Satz 3.** *Zwei Lagrange-Funktionen  $L$  und  $L'$  führen zu denselben Euler-Lagrange-Bewegungsgleichungen (Lagrange-Gleichungen 2. Art) genau dann, wenn sie sich um eine totale Ableitung einer Funktion  $M(\mathbf{q}(t), t)$  unterscheiden, d.h.*

$$L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) = L'(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) + \frac{d}{dt} M(\mathbf{q}(t), t), \quad \text{Eichtransformation.} \quad (2.46)$$

Die eine Richtung des Beweises ist klar:

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial}{\partial q_k} \right] \frac{d}{dt} M(\mathbf{q}(t), t) = \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial}{\partial q_k} \right] \left[ \sum_l \frac{\partial M}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial M}{\partial t} \right] \\
&= \frac{d}{dt} \frac{\partial M}{\partial q_k} - \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_l \frac{\partial M}{\partial q_l} \dot{q}_l - \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial M}{\partial t} \\
&= \sum_l \frac{\partial}{\partial q_l} \frac{\partial M}{\partial q_k} \dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial M}{\partial q_k} - \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_l \frac{\partial M}{\partial q_l} \dot{q}_l - \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial M}{\partial t} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.47}$$

weil wir die Ableitungen vertauschen dürfen. Ende der einen Beweisrichtung, für die andere Richtung vgl. STRAUMANN. Alternativ können wir auch mit dem Hamiltonschen Prinzip argumentieren (LANDAU, FLIESSBACH): Für die beiden Wirkungsintegrale gilt

$$\begin{aligned}
S &= \int_{t_1}^{t_2} dt L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ L'(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) + \frac{d}{dt} M(\mathbf{q}(t), t) \right] \\
&= S' + M(\mathbf{q}(t_2), t_2) - M(\mathbf{q}(t_1), t_1)
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Wenn wir die Variationsableitungen berechnen, fallen die  $M$ -Terme weg, d.h es gilt

$$\delta S = \delta S' \tag{2.49}$$

was zu denselben Lagrangegleichungen führt. Allerdings ist bei dieser Argumentation  $M(\mathbf{q}(t_2), t_2) - M(\mathbf{q}(t_1), t_1)$  eigentlich kein Funktional - man ist mit Gl. (2.47) auf der mathematisch sicheren Seite.

Zusammenfassend merken wir uns, dass der Zusatzterm  $\frac{d}{dt} M(\mathbf{q}(t), t)$  in der Eichtransformation  $L \rightarrow L'$  also für die Bewegungsgleichungen nichts ausmacht: er läßt die Bewegungsgleichungen **invariant**.

### 2.3.5 Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

Als AUFGABE!

## 2.4 Symmetrien und Noether-Theorem

Wir betrachten in der Lagrange-Funktion  $L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$  eine Transformation  $h_s$  der verallgemeinerten Koordinaten,

$$h_s : \mathbf{q}(t) \rightarrow \mathbf{Q}(s, t), \quad \mathbf{Q}(s=0, t) = \mathbf{q}(t). \tag{2.50}$$

mit einem kontinuierlichen Parameter  $s$ . Beispiel: freies Teilchen der Masse  $m$  in  $d = 3$  Dimensionen,

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(t) &= (x(t), y(t), z(t)), \quad L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{q}}^2, \quad \text{Lagrange-Fkt.} \\ \mathbf{Q}(s, t) &\equiv \mathbf{q}(t) + s\mathbf{e}_1 = (x(t) + s, y(t), z(t)), \quad \text{Translation in } x\text{-Richtung.} \\ &\rightsquigarrow \frac{d}{ds}L(\mathbf{Q}(s, t), \dot{\mathbf{Q}}(s, t)) = \frac{d}{ds}\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{Q}}^2(s, t) = 0,\end{aligned}\quad (2.51)$$

wobei der Punkt die Differentiation nach der Zeit  $t$  bedeutet. Die Lagrange-Funktion hängt also nicht von  $s$  ab, sie ist **invariant** unter der Transformation  $h_s$ , insbesondere sind die Lagrange-Gleichungen also invariant unter der Transformation  $h_s$ , d.h. die Bewegungsgleichungen für die neuen Koordinaten  $\mathbf{Q}$  (nämlich  $m\ddot{\mathbf{Q}}=0$ ) haben die gleiche Form wie die Bewegungsgleichungen für die alten Koordinaten ( $m\ddot{\mathbf{q}}=0$ ). Die Lagrange-Funktion des freien Teilchens ist *translations-invariant*.

Wir formulieren jetzt allgemeiner den

**Satz 4** (Theorem von Emmy Noether). *Die Wirkung  $S[\mathbf{q}]$  eines mechanischen Systems mit Lagrange-Funktion  $L$  sei unter der Transformation  $h_s : \mathbf{q}(t) \rightarrow \mathbf{Q}(s, t)$ ,  $h_{s=0} = id$  invariant, d.h. die Wirkung habe die kontinuierliche **Symmetrie**  $S[\mathbf{q}] = S[\mathbf{Q}]$ . Dann gilt für Lösungskurven  $\mathbf{q}(t)$  (Lösungen der Lagrange-Gleichungen) die Aussage*

$$\frac{d}{dt}I[\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}] \equiv \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{d}{ds} \mathbf{Q}(s, t) \Big|_{s=0} \right) = 0, \quad (2.52)$$

d.h. die Größe  $I[\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}]$  ist eine **Erhaltungsgröße**.

Beweis: Die Wirkung  $S$  ist invariant unter der Symmetrietransformation  $h$ , d.h.

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{ds}S[\mathbf{Q}(s, t)] \Big|_{s=0} = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{ds}L(\mathbf{Q}(s, t), \dot{\mathbf{Q}}(s, t)) \Big|_{s=0} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \frac{d}{ds} \mathbf{Q}(s, t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{d}{ds} \dot{\mathbf{Q}}(s, t) \right] \Big|_{s=0} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] \frac{d}{ds} \mathbf{Q}(s, t) \Big|_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{d}{ds} \mathbf{Q}(s, t) \Big|_{s=0} \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{d}{ds} \mathbf{Q}(s, t) \Big|_{s=0} \Big|_{t_1}^{t_2}.\end{aligned}\quad (2.53)$$

Lassen wir jetzt die Differenz der Grenzen  $t_2 - t_1$  gegen Null gehen, wird aus dem letzten Term die Ableitung nach der Zeit, Gl. (2.52). Ende des Beweises.

Zur Notation bemerken wir, dass Größen wie  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{d}{ds} \mathbf{Q}(s, t)$  Richtungsableitungen sind (hier z.B. die Richtungsableitung von  $L$  bezüglich  $\mathbf{q}$ -Änderungen in Richtung  $\frac{d}{ds} \mathbf{Q}(s, t)$ ). Man hätte das auch alles komponentenweise ausschreiben können.

### 2.4.1 $N = 1$ Teilchen, Translationsinvarianz in drei Dimensionen

Die Lagrange-Funktion sei

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x}) \quad (2.54)$$

mit einem Potential  $V(\mathbf{x})$ . Hier gilt mit einem Einheitsvektor in  $\hat{\mathbf{n}}$ -Richtung

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{Q}(s, t) \equiv \mathbf{x}(t) + s\hat{\mathbf{n}}. \quad (2.55)$$

Falls die Wirkung invariant unter dieser Transformation ist, so ist

$$I[\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}] = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \frac{d}{ds} \mathbf{Q}(s, t) \right|_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \hat{\mathbf{n}} = m\dot{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{p}\hat{\mathbf{n}}, \quad (2.56)$$

zeitlich konstant, d.h. die Komponente des Impulses in  $\hat{\mathbf{n}}$ -Richtung ist eine Konstante der Bewegung (die Masse  $m$  ist als konstant vorausgesetzt). Hinreichend für die Invarianz der Wirkung ist die Invarianz der Lagrange-Funktion und damit die Invarianz des Potentials unter dieser Transformation. Wenn das Potential  $V(\mathbf{x})$  also in  $\hat{\mathbf{n}}$ -Richtung konstant ist, folgt die Erhaltung des Impulses in  $\hat{\mathbf{n}}$ -Richtung! *Aus Translationssymmetrie folgt Impulserhaltung.*

### 2.4.2 $N = 1$ Teilchen, Rotationsinvarianz in drei Dimensionen

Die Lagrange-Funktion sei

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - V(\rho, z), \quad \rho \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.57)$$

Das ist invariant unter Rotationen um die  $z$ -Achse, z.B. um den Winkel  $s = \phi$ ,

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{Q}(\phi, t) \equiv R_z(\phi)\mathbf{x}(t), \quad R_z(\phi) \equiv \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

Deshalb ist

$$I[\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}] = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{p} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = p_x y - p_y x = -L_z \quad (2.59)$$

zeitlich konstant, d.h. die  $z$ -Komponente des Drehimpulses  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  ist eine Konstante der Bewegung! Falls  $V = V(|\mathbf{x}|)$  zentralsymmetrisch ist, hat man **Isotropie** und es sind alle drei Komponenten des Drehimpulses erhalten. *Aus Rotationssymmetrie folgt Drehimpulserhaltung.*

Für die Drehimpulserhaltung für ein Potential, das rotations-symmetrisch bzgl. einer Achse  $\hat{\mathbf{n}}$  ist, folgt für eine infinitesimale Drehung um die Achse  $\hat{\mathbf{n}}$  (SKIZZE)

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}\hat{\mathbf{n}}) + \mathbf{x} - \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}\hat{\mathbf{n}}) \rightarrow \mathbf{Q}(\delta\phi) = \mathbf{x} + (\mathbf{x} \times \hat{\mathbf{n}})\delta\phi, \quad (2.60)$$

denn nur der Anteil  $\mathbf{x}_\perp \equiv \mathbf{x} - \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}\hat{\mathbf{n}})$  wird gedreht, und zwar infinitesimal als Verschiebung um  $\delta\phi$  in die Richtung senkrecht zu  $\mathbf{x}_\perp$  und senkrecht zu  $\hat{\mathbf{n}}$ , also parallel zu  $\mathbf{x}_\perp \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{x} \times \hat{\mathbf{n}}$ . Damit folgt für die Erhaltungsgröße

$$\begin{aligned} I[\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}] &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x} \times \hat{\mathbf{n}}) = \mathbf{p}(\mathbf{x} \times \hat{\mathbf{n}}) = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{p} \times \mathbf{x}) = -\hat{\mathbf{n}}L \\ \mathbf{L} &= \mathbf{x} \times \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Auch wenn wir die Definition des Drehimpuls gar nicht kennen, würden wir durch das Noether-Theorem bei Rotationsinvarianz automatisch auf ihn (bis auf einen konstanten Faktor!) als die korrespondierende Erhaltungsgröße geführt. Das zeigt die Stärke dieses Theorems.

AUFGABE: Symmetrie und Rotation um  $x, y$ -Achse.

## 2.5 D'Alembertsches Prinzip

### 2.5.1 Formulierung

Dieses Prinzip hat für die Entwicklung der Lagrange-Mechanik eine Rolle gespielt. Wir formulieren hier eine einfache Version, Verallgemeinerungen sind einfach und i. W. nur ein Umschreiben mit etwas aufwändigerer Notation. Es gilt

**Satz 5.** *Sei ein mechanisches System mit Lagrangefunktion  $L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x})$  und holonomer Nebenbedingung  $g(\mathbf{x}) = 0$  gegeben. Wir betrachten die Kurve  $\mathbf{x}(t)$  und kleine Variationen  $\mathbf{x}(t) + \varepsilon\mathbf{h}(t)$ , wobei  $\mathbf{x}(t)$  die Nebenbedingung erfülle und  $\mathbf{h}(t)$  in einer Tangentialebene der Fläche  $g(\mathbf{x}) = 0$  liege. Dann gilt: Die Kurve  $\mathbf{x}(t)$  ist ein Extrempunkt der Wirkung  $S[\mathbf{x}]$  bezüglich Variationen  $\mathbf{x}(t) + \varepsilon\mathbf{h}(t)$  mit  $\mathbf{h}(t) = 0$  am End- und Anfangspunkt der Kurve genau dann, wenn für alle solche Variationen*

$$\mathbf{Z} \equiv m\ddot{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \perp \mathbf{h}, \quad \text{D'Alembertsches Prinzip} \quad (2.62)$$

*gilt (Die Zwangskräfte  $\mathbf{Z}$  stehen senkrecht auf den virtuellen Verrückungen).*

Die virtuellen Verrückungen sollen möglichst wenig aus der durch die Nebenbedingung definierten Fläche herausführen - deshalb sind die  $\mathbf{h}$  tangential zu dieser Fläche.

Wir beweisen nur die eine Richtung (vgl. ARNOLD),

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} S[\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{h}] \right|_{\varepsilon=0} &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} dt L(\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{h}, \dot{\mathbf{x}} + \varepsilon\dot{\mathbf{h}}) \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{h} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \dot{\mathbf{h}} \right] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right] \mathbf{h} \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + m\ddot{\mathbf{x}} \right] \mathbf{h}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Falls das D'Alembertsche Prinzip gilt, verschwindet die 1. Variation und die Wirkung ist extremal. Ende der einen Beweisrichtung.

### 2.5.2 Anwendungen

Zunächst verallgemeinert man wieder auf  $N$  Newtonsche Gleichungen für  $N$  Teilchen in  $d$  Dimensionen und

$$\sum_{n=1}^N (m_n \ddot{\mathbf{x}}_n + \mathbf{F}_n) \mathbf{h}_n = 0, \quad \text{D'Alembertsches Prinzip, } N \text{ Teilchen,} \quad (2.64)$$

wobei  $\mathbf{F}_n$  die Gesamtkraft ( $d$ -dimensionaler Vektor) auf das  $n$ -te Teilchen und  $\mathbf{h}_n$  die virtuelle Verrückung des  $n$ -ten Teilchens ist.

Wir betrachten den *statischen* Spezialfall des D'Alembertschen Prinzips, nämlich

$$\sum_{n=1}^N \mathbf{F}_n \mathbf{h}_n = 0, \quad \text{D'Alembertsches Prinzip, } N \text{ Teilchen,} \quad (2.65)$$

d.h. der Beschleunigungsterm ist Null.

#### 2.5.2.1 Hebel

Wir stellen ihn uns als eine Linie von  $N$  Massenpunkten mit zwei senkrechten äußeren Kräften  $\mathbf{F}_a$ ,  $\mathbf{F}_b$  auf die beiden äußeren Massenpunkte vor. Die Linie wird durch innere Kräfte zusammengehalten. Die Zwangsbedingung teilt den Hebel in zwei Arme mit Länge  $a$  und  $b$ , der Hebel kann um den Winkel  $\phi$  rotieren. Im statischen Gleichgewicht muss die Summe der virtuellen Arbeiten verschwinden, also  $F_a a \delta\phi - F_b b \delta\phi = 0$  gelten, denn die inneren Kräfte stehen senkrecht auf den Verrückungen  $h_n$  und geben keinen Beitrag zur Summe. Es gilt also

$$F_a a = F_b b, \quad \text{Hebelgesetz,} \quad (2.66)$$

was wir auch über das Verschwinden des Drehmoments auf den Hebel, aufgefasst als **starrer Körper** (nächstes Kapitel), herleiten können.

## 2.6 Klassifikation von Randbedingungen

Die bisher betrachteten holonomen Randbedingungen teilt man weiter ein in

$$g_\alpha(x_1, \dots, x_K) = 0, \quad \text{skleronom (enthält die Zeit } t \text{ nicht)} \quad (2.67)$$

$$g_\alpha(x_1, \dots, x_K, t) = 0, \quad \text{rheonom (enthält die Zeit)} \quad (2.68)$$

Randbedingungen, die nicht in dieser geschlossenen Form formuliert werden können, nennt man **nicht-holonome Randbedingungen**. Hierunter fallen z.B. Ungleichungen. Falls die Randbedingungen durch Differentiale formuliert werden können, kann man die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren verwenden, vgl. GREINER II.

## 3. DER STARRE KÖRPER

### 3.1 Newtonsche Gleichungen in Nichtinertialsystemen

In ihrer ursprünglichen, empirisch gefundenen Form sind die Newtonschen Gleichungen Gl. (1.1),  $m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i$ , in kartesischen Koordinaten und für Inertialsysteme formuliert. Mit Lagrange II hatten wir durch die Elimination von Zwangskräften verallgemeinerte Koordinaten  $q_k$  ( $k = 1, \dots, f$  mit  $f$  : Anzahl der Freiheitsgrade) kennen gelernt, die sich explizit über die kartesischen Koordinaten  $x_n = x_n(q_1, \dots, q_f)$  unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen ergeben. Die entsprechenden Lagrange-Gleichungen sind äquivalent zu den Newtonschen Gleichungen und beziehen sich genau wie diese zunächst auf einen Beobachter, der sich in einem Inertialsystem  $K$  befindet.

Wir fragen nun, was bei einem Übergang in ein beliebiges anderes Bezugssystem  $K'$  passiert. Bei  $K'$  kann es sich z.B. um ein rotierendes System handeln (z.B. die Erde), was uns dann auf die bekannten **Scheinkräfte** in den für  $K'$  formulierten Newtonschen Gleichungen führen wird.

ARNOLD beschreibt den Übergang  $K \rightarrow K'$  als Abbildung zwischen zwei verschiedenen euklidischen Räumen. Wir versuchen im Folgenden eine etwas andere Variante, bei der wir nur einen Vektorraum betrachten und in diesem Vektorraum eine Basistransformation einführen.

#### 3.1.1 Basiswechsel

Wir betrachten hier den Übergang  $K \rightarrow K'$  zunächst als einfachen *Basiswechsel* innerhalb ein und desselben  $d$ -dimensionalen reellen Vektorraums  $\mathbb{R}^d$  (üblicherweise  $d = 3$ ),

$$\mathbf{e}_i \rightarrow \mathbf{e}'_i \equiv R\mathbf{e}_i, \quad \det R \neq 0 \quad (3.1)$$

mit der Transformationsmatrix  $R$ . Hierbei bleibt der Ursprung beider Koordinatensystem derselbe (später werden wir ihn noch verschieben). Ein und derselbe physikalische Punkt  $\mathbf{r}$  läßt sich dann sowohl in  $K$  als auch in  $K'$  schreiben als

$$\mathbf{r} = x^i \mathbf{e}_i = x'^i \mathbf{e}'_i. \quad (3.2)$$

Die Vektoren der Komponenten von  $\mathbf{r}$  in den jeweiligen Koordinatensystemen bezeichnen wir mit  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{x}'$ , so dass gilt (STRAUMANN)

$$\mathbf{x} = R\mathbf{x}'. \quad (3.3)$$

Hier erscheinen, im Vergleich zu Gl. (3.1), die gestrichenen und die ungestrichenen Größen in umgekehrter Reihenfolge. Der erste Basisvektor  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T$  wird durch  $R$  laut Gl. (3.1) in  $R\mathbf{e}_1$  transformiert und hat in  $K$  neue Koordinaten in der  $K$ -Basis, z.B. bei einer Drehung um die  $z$ -Achse die Koordinaten  $(\cos \phi, \sin \phi, 0)$ . In der gedrehten Basis hat dieser Vektor allerdings die Komponenten  $\mathbf{x}' = (1, 0, 0)^T$ , was mit Gl. (3.3) wieder zu  $\mathbf{x} = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$  wird. Man mache sich anhand einer Skizze nochmal genau klar, was hier passiert.

### 3.1.2 Zeitabhängiger Basiswechsel

Wir nehmen jetzt sowohl die Transformation  $R$  als auch den Punkt  $\mathbf{r}$  als zeitabhängig an. Der Übersichtlichkeit halber wird das Zeitargument  $t$  in allen Größen weggelassen. Der Vektor der Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{x}}$  hängt dann mit dem in der  $K'$ -Basis zusammen über

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{R}\mathbf{x}' + R\dot{\mathbf{x}}' = \dot{R}R^{-1}\mathbf{x} + R\dot{\mathbf{x}}'. \quad (3.4)$$

Wenn  $R$  zeitunabhängig ist, gilt einfach  $\dot{\mathbf{x}} = R\dot{\mathbf{x}}'$ , d.h. wie beim Ortsvektor werden die  $K'$ -Geschwindigkeitskoordinaten einfach in  $K$ -Geschwindigkeitskoordinaten transformiert. Für zeitabhängiges  $R$  gibt es den Zusatzterm  $\dot{R}R^{-1}\mathbf{x}$ , der auch der einzige Term für  $\dot{\mathbf{x}}' = 0$ , d.h. ein für das System  $K'$  ruhenden Punkt  $\mathbf{r}$  ist. Man definiert

$$\dot{R}(t)R^{-1}(t) \equiv \Omega(t) \rightsquigarrow \dot{\mathbf{x}} = \Omega\mathbf{x} + R\dot{\mathbf{x}}', \quad (3.5)$$

Selbst wenn der Punkt  $\mathbf{r}$  in  $K'$  ruht ( $\dot{\mathbf{x}}' = 0$ ), bewegt er sich in  $K$  ( $\dot{\mathbf{x}} = \Omega\mathbf{x}$ ). Dabei ist  $\Omega = \Omega(t)$  zu jedem Zeitpunkt  $t$  eine lineare Abbildung in  $\mathbb{R}^3$ , und seine Komponenten beziehen sich wie  $R$  und  $\dot{R}$  auf die  $K$ -Basis. Die entsprechende Abbildung  $\Omega'$  in der  $K'$ -Basis folgt aus

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \Omega\mathbf{x}, \quad \text{in } K \\ R^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{y}' &= \Omega'\mathbf{x}' = \Omega'R^{-1}\mathbf{x}, \quad \text{in } K' \\ \rightsquigarrow \Omega' &= R^{-1}\Omega R = R^{-1}\dot{R}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Es gilt also

$$\dot{\mathbf{x}} = \Omega\mathbf{x} + R\dot{\mathbf{x}}' = R\Omega'R^{-1}\mathbf{x} + R\dot{\mathbf{x}}' = R(\Omega'\mathbf{x}' + \dot{\mathbf{x}}') \quad (3.7)$$

womit man alles in  $K'$ -Koordinaten ausdrücken und dann nach  $K$  transformieren kann.

### 3.1.3 Beschleunigung

Die Beschleunigung erhalten wir aus der zweiten Ableitung

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} [R\dot{\mathbf{x}}' + \Omega\mathbf{x}] \quad (3.8)$$

$$= \underbrace{\dot{R}\dot{\mathbf{x}}'}_{\Omega R\dot{\mathbf{x}}'} + R\ddot{\mathbf{x}}' + \dot{\Omega}\mathbf{x} + \Omega\dot{\mathbf{x}} \quad (3.9)$$

$$= \Omega R\dot{\mathbf{x}}' + R\ddot{\mathbf{x}}' + \dot{\Omega}\mathbf{x} + \Omega(\Omega\mathbf{x} + R\dot{\mathbf{x}}') \quad (3.10)$$

$$= RR^{-1}\Omega R\dot{\mathbf{x}}' + R\ddot{\mathbf{x}}' + RR^{-1}\dot{\Omega}RR^{-1}\mathbf{x} + RR^{-1}\Omega RR^{-1}(\Omega RR^{-1}\mathbf{x} + R\dot{\mathbf{x}}') \quad (3.11)$$

$$= R \left[ \Omega'\dot{\mathbf{x}}' + \ddot{\mathbf{x}}' + R^{-1}\dot{\Omega}R\dot{\mathbf{x}}' + \Omega'(\Omega'\mathbf{x}' + \dot{\mathbf{x}}') \right] \quad (3.12)$$

Mit

$$RR^{-1} = 1 \rightsquigarrow \dot{R}^{-1} = -R^{-1}\dot{R}R^{-1} \quad (3.13)$$

$$\dot{R}R^{-1} = \Omega \rightsquigarrow R^{-1}\dot{R} = R^{-1}\Omega R = \Omega' \quad (3.14)$$

$$\rightsquigarrow \dot{\Omega}' = \frac{d}{dt} R^{-1}\Omega R = R^{-1}\dot{\Omega}R + R^{-1}\dot{\Omega}R + R^{-1}\Omega\dot{R} \quad (3.15)$$

$$= R^{-1}\dot{\Omega}R - R^{-1}\dot{R}\Omega' + \Omega'R^{-1}\dot{R} = R^{-1}\dot{\Omega}R \quad (3.16)$$

vereinfacht sich das zu

$$\ddot{\mathbf{x}} = R \left[ \underbrace{2\Omega'\dot{\mathbf{x}}'}_{\text{'Coriolis-artig'}} + \ddot{\mathbf{x}}' + \Omega'\mathbf{x}' + \underbrace{\Omega'\Omega'\mathbf{x}'}_{\text{'Zentrifugal-artig'}} \right]. \quad (3.17)$$

Die Newtonschen Gleichungen  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$  im Inertialsystem  $K$  werden im rotierenden System  $K'$  nun mit Hilfe von

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} = R\mathbf{F}', \quad \mathbf{F}' \text{ Komponenten des Kraftvektors in } K' \quad (3.18)$$

und  $\mathbf{F}' = mR^{-1}\ddot{\mathbf{x}}$  zu

$$m\ddot{\mathbf{x}}' = \mathbf{F}' - \underbrace{2m\Omega'\dot{\mathbf{x}}'}_{\text{'Coriolis-artig'}} - m\Omega'\mathbf{x}' - \underbrace{m\Omega'\Omega'\mathbf{x}'}_{\text{'Zentrifugal-artig'}} \quad (3.19)$$

Im Nicht-Inertialsystem  $K'$  treten also auch in Abwesenheit eigentlicher Kräfte (d.h.  $\mathbf{F}'$ ) sogenannte **Scheinkräfte** auf, die aus der Zeitabhängigkeit der Transformation  $R(t)$  herrühren: Es war ja  $\Omega' = R^{-1}\dot{R}$ , vgl. Gl. (3.6). Im System  $K$  dagegen gibt es keine Scheinkräfte, es gilt schlichtweg  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$ . Man beachte, dass sich in Gl. (3.19) alle Größen auf die Basis  $K'$  beziehen. Ein Beobachter in  $K'$  würde also seine Newtonschen Bewegungsgleichungen Gl. (3.19) so interpretieren: zusätzlich zu  $\mathbf{F}'$  wirken Kräfte auf eine Masse  $m$ . Hierbei ist vorausgesetzt, dass sich  $m$  beim Übergang zwischen  $K$  und  $K'$  nicht ändert, d.h.  $m = m'$ .

**AUFGABE:** Finde eine Transformation  $R(t)$ , die zu einer Bewegungsgleichung in  $d$  Dimensionen mit nur der 'Coriolis-artigen' Scheinkraft in Gl. (3.19) führt. Nimm hierzu die Form  $R(t) = g(t)\mathbb{E}$  an, wobei  $\mathbb{E}$  die  $d$ -dimensionale Einheitsmatrix und  $g(t)$  eine skalare Funktion ist. Bestimme die Form von  $g(t)$  und zeige, dass man als Scheinkraft eine Reibungskraft mit zeitabhängiger 'Reibungskonstanten' erhält.

### 3.1.4 Echte Kräfte und Scheinkräfte

An dieser Stelle ergibt sich natürlich die Frage, ob und wie man als Beobachter überhaupt zwischen ‘echten’ Kräften und Scheinkräften unterscheiden kann. Hier kommt man im Falle der Schwerkraft schon dem Gedanken des Einsteinschen Äquivalenzprinzips etwas näher. Allerdings haben unsere Transformationen hier noch nichts mit Relativitätstheorie zu tun: wir haben bisher an der Zeit  $t$  als absoluter Größe festgehalten. Desweiteren sind unsere Basis-Transformationen  $R$  globale Transformationen im gesamten physikalischen Raum  $\mathbb{R}^d$  und nicht lokale (z.B. von der lokalen Massenverteilung abhängige) Transformationen.

### 3.1.5 Rotationen

Als wichtigen Spezialfall betrachten wir **Rotationen** mit dreidimensionalen Rotationsmatrizen  $R \in SO(3)$ . Es gilt dann

**Satz 6.** Für dreidimensionale Rotationen  $R \in SO(3)$  ist die Matrix  $\Omega(t) \equiv \dot{R}(t)R^{-1}$  schiefssymmetrisch, und es gilt

$$\Omega(t)\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{x}, \quad \text{Winkelgeschwindigkeit } \boldsymbol{\omega}(t) \quad (3.20)$$

Explizit schreibt sich  $\Omega$  und das Kreuzprodukt als

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \quad \text{Winkelgeschwindigkeit } \boldsymbol{\omega} \text{ in } K \quad (3.21)$$

Beweis als AUFGABE. Für den Vektor der Winkelgeschwindigkeit gilt bei Transformation nach  $K'$

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} = R\mathbf{y}' = R(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{x}') = R\boldsymbol{\omega}' \times R\mathbf{x}', \quad \rightsquigarrow \boldsymbol{\omega} = R\boldsymbol{\omega}' \quad (3.22)$$

also

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + R\dot{\mathbf{x}}' = R(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{x}' + \dot{\mathbf{x}}'), \quad (3.23)$$

womit man alles in  $K'$ -Koordinaten ausdrücken und dann nach  $K$  rotieren kann.

#### 3.1.5.1 Beispiel: Rotation im Uhrzeigersinn um die $z$ -Achse

Es sei  $\omega_0 > 0$  konstant und die Drehmatrix  $R$

$$\begin{aligned} R(t) &= \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t & \sin \omega_0 t & 0 \\ -\sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \dot{R}(t) = \omega_0 \begin{pmatrix} -\sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t & 0 \\ -\cos \omega_0 t & -\sin \omega_0 t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \dot{R}R^{-1} &= \omega_0 \begin{pmatrix} -\sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t & 0 \\ -\cos \omega_0 t & -\sin \omega_0 t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t & -\sin \omega_0 t & 0 \\ \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \omega_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow \boldsymbol{\omega} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}' = R^{-1}\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Die Koordinaten der Winkelgeschwindigkeit sind in  $K$  und  $K'$  gleich, wie man es auch anschaulich erwartet.  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}'$  zeigt in die negative  $z$ -Richtung: es gilt also eine ‘Rechte-Hand-Regel’ für den Vektor der Winkelgeschwindigkeit.

### 3.1.5.2 Dynamik bei Rotationen

Bei Rotationen  $R$  haben die Scheinkräfte, wie bereits in Gl. (3.19) angedeutet, eigene Bezeichnungen: Wir schreiben die Matrix  $\boldsymbol{\Omega}'$  jetzt wieder explizit mit Hilfe des Vektorprodukts und dem Vektor  $\boldsymbol{\omega}$  der Winkelgeschwindigkeit,

$$m\ddot{\mathbf{x}}' = \mathbf{F}' - \underbrace{2m\boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{x}}'}_{\text{Coriolis-Kraft}} - m\dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \mathbf{x}' - \underbrace{m\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{x}')}_{\text{Zentrifugalkraft}}. \quad (3.25)$$

### 3.1.5.3 Beispiel: Foucault-Pendel

(LANDAU) Wir nehmen ein Labor auf geographischer Breite  $\lambda$  auf der rotierenden Erde als Bezugssystem  $K'$ . Wir transformieren uns in zwei Schritten nach  $K''$  (alle Systeme haben ihren Ursprung jeweils im Erdmittelpunkt): Im festen ‘Weltall’-Inertialsystem  $K$  rotiert die Erde um die  $z$ -Achse,

$$\boldsymbol{\omega} = \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

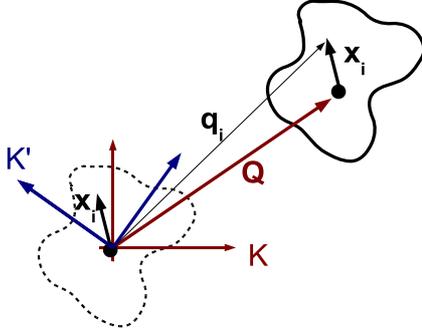
Das transformieren wir nach  $K''$  so, dass die Äquatorebene  $x''$ - $y''$  um die  $z$ -Achse ( $= z''$ -Achse) rotiert, dann gilt  $\boldsymbol{\omega}'' = \boldsymbol{\omega}$ , siehe das Beispiel oben. Im rotierenden  $K''$ -System rotieren wir jetzt um die  $y''$ -Achse, so dass die neue  $z'$ -Achse durch das Labor geht und mit der  $z$ -( $= z''$ -) Achse den Winkel  $\pi/2 - \lambda$  bildet (nördliche Hemisphäre, SKIZZE). Es ist also  $\mathbf{e}_y'' \rightarrow \mathbf{e}'_y$ , und die  $x'$ -Achse und die neue  $x'$ -Achse bildet mit der  $z$ -Achse den Winkel  $\lambda$ . Also folgt  $\boldsymbol{\omega}'$  mit einer einfachen Drehung aus  $\boldsymbol{\omega}'' = \boldsymbol{\omega}$  als

$$\boldsymbol{\omega}' = \Omega \begin{pmatrix} \cos \lambda \\ 0 \\ \sin \lambda \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

(Spezialfälle als CHECK betrachten). Ohne Rotation der Erde ( $\Omega = 0$ ) haben wir für eine harmonische Schwingung des Pendels (kleine Auslenkungen, Punkt  $\mathbf{r}$  der Masse  $m$  mit Koordinaten  $(x', y', z')$ , die Auslenkung in  $z'$  interessiert hier aber nicht) das DGL-System für zwei harmonische Bewegungen,

$$\begin{aligned} \ddot{x}' + \omega^2 x' &= 0 \\ \ddot{y}' + \omega^2 y' &= 0, \end{aligned} \quad (3.28)$$

wobei die Winkelfrequenz  $\omega$  durch die Fadenlänge und die Erdbeschleunigung bestimmt ist (AUFGABE: WIE). Mit der Rotation kommt als Scheinkraft die Coriolis-Kraft hinzu,



**Fig. 3.1:** Starrer Körper mit Schwerpunkt  $\mathbf{Q}$ . Das System  $K$  ist fest, das System  $K'$  rotiert gegenüber  $K$ . Die  $\mathbf{x}_i$  rotieren in  $K$ , die entsprechenden  $\mathbf{x}'_i$  sind in  $K'$  zeitlich konstant.

wobei wir die Zentrifugalkraft in die Erdbeschleunigung mit hineindefiniert (STRAU-MANN) bzw. als klein (LANDAU) vernachlässigt haben. Es gilt also

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{x}}' + \omega^2 \mathbf{x}' &= -2\boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{x}}' \rightsquigarrow \\ \ddot{x}' + \omega^2 x' &= 2\Omega_z \dot{y}' \\ \ddot{y}' + \omega^2 y' &= -2\Omega_z \dot{x}', \quad \Omega_z \equiv \Omega \sin \lambda.\end{aligned}\quad (3.29)$$

AUFGABE: 1. Wiederhole die Schritte der obigen Herleitung. 2. Löse dieses System für  $\Omega_z \ll \omega$ : Zeige, dass man die Lösung als

$$x'(t) + iy'(t) = e^{-i\Omega_z t}(x'_0(t) + iy'_0(t)) \quad (3.30)$$

schreiben kann, wobei  $x'_0(t)$  und  $y'_0(t)$  Gl. (3.28) erfüllen. 3. Diskutiere die Lösung.

## 3.2 Kinematik und Dynamik des Starren Körpers

### 3.2.1 Bezugssysteme $K$ und $K'$

Wir bezeichnen ein System aus  $N$  Massenpunkten  $m_i$  als **starrer Körper**, wenn der allgemeine Bewegungszustand auf eine Schwerpunktsbewegung  $\mathbf{Q}(t)$  und eine Rotationsbewegung eingeschränkt ist, vgl. Figur 3.1

$$\mathbf{q}_i(t) = \mathbf{Q}(t) + \mathbf{x}_i(t), \quad \mathbf{Q}(t) \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{q}_i(t), \quad \text{Schwerpunkt } \mathbf{Q}(t) \quad (3.31)$$

$$\mathbf{x}_i(t) = R(t)\mathbf{x}'_i, \quad R(t) \in SO(3), \quad \mathbf{x}'_i = \text{const in } K'. \quad (3.32)$$

Hierbei ist  $M = \sum_{i=1}^N m_i$  die Gesamtmasse. Die Freiheitsgrade des starren Körpers sind die *drei Translationsfreiheitsgrade* der Schwerpunktsbewegung  $\mathbf{Q}(t)$  und die *drei Rotationsfreiheitsgrade*, die in der Drehmatrix  $R(t)$  enthalten sind. Für die Geschwindigkeiten

gilt

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \dot{\mathbf{Q}} + \dot{R}R^{-1}\mathbf{x}_i = \dot{\mathbf{Q}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_i \quad (3.33)$$

mit der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  im festen Inertialsystem  $K$ .

### 3.2.2 Kinetische Energie und Trägheitstensor

Die kinetische Energie  $T$  ist einfach die Summe

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{q}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \dot{\mathbf{Q}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_i \right)^2 = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{Q}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_i)^2 \quad (3.34)$$

$$\equiv T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}} \quad (3.35)$$

denn der in  $\mathbf{x}_i$  lineare Term fällt weg wegen

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i = 0. \quad (3.36)$$

(kleiner Beweis als AUFGABE). Die Rotationsenergie  $T_{\text{rot}}$  ist vom Bezugssystem unabhängig, denn sie ist eine Summe von *quadratischen Formen* bzw. hier einfachen Skalarprodukten der Vektoren  $\Omega \mathbf{x}_i$ , die unter orthogonalen Transformationen invariant bleiben,

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i^T \Omega^T \Omega \mathbf{x}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i^T R R^{-1} \Omega^T R R^{-1} \Omega R R^{-1} \mathbf{x}_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{x}'_i)^T (\Omega')^T \Omega' \mathbf{x}'_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{x}'_i)^2. \end{aligned} \quad (3.37)$$

AUFGABE: man mache sich diese Invarianz nochmal explizit klar (beachte, dass  $R$  orthogonal ist, d.h.  $R^{-1} = R^T$ ).

Wir können die kinetische Energie  $T_{\text{rot}}$  des starren Körpers mit Hilfe der Identität für das Kreuzprodukt,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \quad (3.38)$$

(Beweis als AUFGABE) umformen. In Komponenten  $\alpha = x, y, z$  schreiben wir explizit

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})^2 = \left( \sum_{\alpha} \omega_{\alpha}^2 \right) \left( \sum_{\beta} x_{\beta}^2 \right) - \left( \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} x_{\alpha} \right)^2 = \sum_{\alpha, \beta} \omega_{\alpha} (\delta_{\alpha\beta} \mathbf{x}^2 - x_{\alpha} x_{\beta}) \omega_{\beta} \quad (3.39)$$

Die kinetische Energie wird damit

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \sum_{i=1}^N m_i \omega_\alpha (\delta_{\alpha\beta} \mathbf{x}_i^2 - x_{i,\alpha} x_{i,\beta}) \omega_\beta \quad (3.40)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \omega_\alpha \Theta_{\alpha\beta} \omega_\beta = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \Theta \boldsymbol{\omega} \quad (3.41)$$

$$\Theta_{\alpha\beta} \equiv \sum_{i=1}^N m_i (\delta_{\alpha\beta} \mathbf{x}_i^2 - x_{i,\alpha} x_{i,\beta}), \quad \text{Trägheitstensor in } K \quad (3.42)$$

Der Trägheitstensor ist eine  $3 \times 3$ -Matrix mit reellen Einträgen. Häufig ist es zweckmäßiger, den Trägheitstensor in  $K'$ , d.h. im 'körperfesten', rotierenden Koordinatensystem zu berechnen. Wegen der Invarianz der kinetischen Energie gilt natürlich

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \omega'_\alpha \Theta'_{\alpha\beta} \omega'_\beta = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}')^T \Theta' \boldsymbol{\omega}' \quad (3.43)$$

$$\Theta'_{\alpha\beta} \equiv \sum_{i=1}^N m_i (\delta_{\alpha\beta} (\mathbf{x}'_i)^2 - x'_{i,\alpha} x'_{i,\beta}), \quad \text{Trägheitstensor in } K'. \quad (3.44)$$

Mit der Massendichte im System  $K'$

$$\rho(\mathbf{x}') \equiv \sum_{i=1}^N m_i \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i), \quad \text{Massendichte} \quad (3.45)$$

können wir den Trägheitstensor mit Hilfe der dreidimensionalen Delta-Funktion in  $\rho(\mathbf{x}')$  als *Volumen-Integral* schreiben,

$$\Theta'_{\alpha\beta} \equiv \int d^3 \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') (\delta_{\alpha\beta} \mathbf{x}'^2 - x'_{\alpha} x'_{\beta}). \quad (3.46)$$

Diese wichtige Formel gestattet die Berechnung von  $\Theta'$  für kontinuierliche Massenverteilungen, also z.B. auch für Körper homogener Dichte.

### 3.2.3 Eigenschaften des Trägheitstensors

Der Trägheitstensors ist nach seiner Definition

$$\Theta_{\alpha\beta} \equiv \sum_{i=1}^N m_i (\delta_{\alpha\beta} \mathbf{x}_i^2 - x_{i,\alpha} x_{i,\beta}) \quad (3.47)$$

(in  $K$  oder in  $K'$  spielt hier keine Rolle) eine reelle symmetrische  $3 \times 3$ -Matrix, kann also diagonalisiert werden zu

$$\Theta = O \Theta_D O^{-1}, \quad \Theta_D = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix}, \quad \text{Hauptachsentransformation,} \quad (3.48)$$

wobei die **Hauptachsen** durch die Eigenvektoren von  $\Theta$  definiert werden. Diese Eigenvektoren stehen senkrecht aufeinander und bilden die orthogonale Matrix  $O$ . Die Eigenwerte  $\Theta_i$  heißen **Hauptträgheitsmomente**. Im Hauptachsensystem ist der Trägheitstensors also diagonal, insbesondere gilt in diesem System

$$\Theta_1 = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{x}_i^2 - x_{i,1}x_{i,1}) = \sum_{i=1}^N m_i (x_{i,2}^2 + x_{i,3}^2) > 0 \quad (3.49)$$

und entsprechend für  $\Theta_2, \Theta_3$ , d.h. die Hauptträgheitsmomente sind alle positiv und der Trägheitstensor ist als Matrix positiv definit.

### 3.2.4 Praktische Berechnung des Trägheitstensors

Für einfache Fälle mit diskreten Massenpunkten (z.B. zwei hantelförmig angeordnete Massenpunkte) erfolgt die Berechnung über die Definition. Für kontinuierliche Massenverteilungen mit kontinuierlicher Dichte  $\rho(\mathbf{x}')$  hat man ein **Volumenintegral** zu berechnen. Die hierfür erforderliche Mathematik bezieht sich im Wesentlichen auf die Transformation des Volumenelements  $dV$  bei geschickter Wahl der Koordinatentransformation (z.B. Polarkoordinaten bei kugelförmigen Massenverteilungen etc.) Hier brauchen wir demnächst einen EINSCHUB VOLUMENINTEGRALE.

#### 3.2.4.1 Beispiel: Trägheitstensor eines Quaders

(FLIESSBACH/WALLISER) Für einen homogenen Quader mit Dichte  $\rho$  und Seitenlängen  $a, b, c$  verwenden wir Achsen in  $K'$ , die durch den Quadermittelpunkt gehen und parallel zu den Kanten sind. Dann folgt (wir lassen im Folgenden den Strich an allen Variablen weg)

$$\begin{aligned} \Theta_{33} &= \int d^3\mathbf{x} \rho (\mathbf{x}^2 - z^2) = \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz (x^2 + y^2) \\ &= \rho c \left( b \int_{-a/2}^{a/2} dx x^2 + a \int_{-b/2}^{b/2} dy y^2 \right) = \rho c \left( 2b \frac{1}{24} a^3 + 2a \frac{1}{24} b^3 \right) \\ &= \frac{1}{12} \rho abc (a^2 + b^2) = \frac{M}{12} (a^2 + b^2), \end{aligned} \quad (3.50)$$

wobei  $M$  die Masse des Quaders ist. Aus Symmetriegründen folgt entsprechend

$$\Theta_{22} = \frac{M}{12} (a^2 + c^2), \quad \Theta_{11} = \frac{M}{12} (b^2 + c^2). \quad (3.51)$$

Für die Außerdiagonalterme folgt

$$\Theta_{\alpha\beta} \equiv \int d^3\mathbf{x} \rho (-x_\alpha x_\beta) = 0, \quad \alpha \neq \beta, \quad (3.52)$$

da z.B.  $\int_{-a/2}^{a/2} x dx = 0$  ist. Also ist der Trägheitstensor in diesem System, das damit das Hauptachsensystem ist, bereits diagonal,

$$\Theta' = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

(wir fügen den Strich wieder an, da wir im  $K'$ -System sind). Rotiert der Quader z.B. mit der Winkelfrequenz  $\omega_0$  um die Raumdiagonale des Quaders,

$$\boldsymbol{\omega}' = \omega_0 \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \equiv \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad (3.54)$$

so ist die Rotationsenergie

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}')^T \Theta' \boldsymbol{\omega}' = \frac{1}{2} \omega_0^2 \Theta'_{\mathbf{n}} \\ \Theta'_{\mathbf{n}} &\equiv \frac{M}{12} \frac{a^2(b^2 + c^2) + b^2(a^2 + c^2) + c^2(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{M}{6} \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Hierbei heißt  $\Theta'_{\mathbf{n}}$  das **Trägheitsmoment bezüglich der Achse  $\mathbf{n}$** .

### 3.2.4.2 Trägheitstensor eines Ellipsoides

Als AUFGABE.

### 3.2.5 Der Satz von Steiner

(STRAUMANN)

**Satz 7.** *Der Trägheitstensor*

$$\Theta'_{\alpha\beta}(\{\mathbf{x}'_i\}) \equiv \sum_{i=1}^N m_i (\delta_{\alpha\beta} (\mathbf{x}'_i)^2 - x'_{i,\alpha} x'_{i,\beta}) \quad (3.56)$$

eines Körpers mit Gesamtmasse  $M = \sum_{i=1}^N m_i$  transformiert sich bei einer euklidischen Bewegung (affine Abbildung)  $\mathbf{x}'_i \rightarrow O\mathbf{x}'_i + \mathbf{a}$  mit orthogonaler Matrix  $O$  und Verschiebungs-Vektor  $\mathbf{a}$  gemäß

$$\Theta'_{\alpha\beta}(\{O\mathbf{x}'_i + \mathbf{a}\}) \equiv M [|\mathbf{a}|^2 \delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta] + (O\Theta(\{\mathbf{x}'_i\})O^T)_{\alpha\beta}. \quad (3.57)$$

Zum Beweis:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N m_i (\delta_{\alpha\beta} (O\mathbf{x}'_i + \mathbf{a})^2 - (O\mathbf{x}'_i + \mathbf{a})_\alpha (O\mathbf{x}'_i + \mathbf{a})_\beta) = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i (\delta_{\alpha\beta} [(O\mathbf{x}'_i)^2 + \mathbf{a}^2] - (O\mathbf{x}'_i + \mathbf{a})_\alpha (O\mathbf{x}'_i + \mathbf{a})_\beta) \\ &= M [|\mathbf{a}|^2 \delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta] + \sum_{i=1}^N m_i (\delta_{\alpha\beta} (O\mathbf{x}'_i)^2 - (O\mathbf{x}'_i)_\alpha (O\mathbf{x}'_i)_\beta) \end{aligned} \quad (3.58)$$

wegen  $\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}'_i = 0$  (Definition des Schwerpunkts!). Weiterhin gilt

$$(O\mathbf{x}'_i)_\alpha (O\mathbf{x}'_i)_\beta = \sum_{\alpha'\beta'} O_{\alpha\alpha'} x'_{i\alpha'} O_{\beta\beta'} x'_{i\beta'} = \sum_{\alpha'\beta'} O_{\alpha\alpha'} x'_{i\alpha'} x'_{i\beta'} O_{\beta'\beta}^T \quad (3.59)$$

$$(O\mathbf{x}'_i)^2 \delta_{\alpha\beta} = (\mathbf{x}'_i)^2 \delta_{\alpha\beta} = (\mathbf{x}'_i)^2 (OO^T)_{\alpha\beta} \quad (3.60)$$

In der letzten Zeile ist  $\mathbf{x}'_i{}^2$  ein unter orthogonalen Trafos invariantes Skalarprodukt, für diesen Anteil in  $O\Theta(\{\mathbf{x}'_i\})O^T$  wird also schlichtweg die Einheitsmatrix transformiert. Summieren über  $\sum_i m_i$  gibt das gesuchte Ergebnis. Ende des Beweises.

Der Satz von Steiner ist manchmal nützlich bei der konkreten Berechnung von Trägheitstensen, z.B. wenn man aus rechentechnischen Gründen eine Verschiebung des Koordinatensystems um einen Verschiebungsvektor  $\mathbf{a}$  vornehmen möchte.

### 3.2.6 Drehimpuls

Für den Drehimpuls des starren Körpers haben wir den Gesamtdrehimpuls aller seiner  $N$  Massenpunkte zu berechnen, d.h.

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{q}_i \times \dot{\mathbf{q}}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{Q} + \mathbf{x}_i) \times (\dot{\mathbf{Q}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_i) \\ &= M\mathbf{Q} \times \dot{\mathbf{Q}} + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_i), \end{aligned} \quad (3.61)$$

wobei wieder zwei Terme wegen  $\sum_i \mathbf{x}_i = 0$  weggefallen sind. Das können wir wieder vereinfachen mit

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\mathbf{b}), \quad \text{'bac-cab'-Regel} \quad (3.62)$$

(vgl. MM). Damit ergibt sich dann

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{trans}} + \mathbf{L}_{\text{rot}} \quad (3.63)$$

$$\mathbf{L}_{\text{trans}} = M\mathbf{Q} \times \dot{\mathbf{Q}}, \quad \mathbf{L}_{\text{rot}} = \sum_{i=1}^N m_i ((\mathbf{x}_i)^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{x}_i (\mathbf{x}_i \boldsymbol{\omega})) \quad (3.64)$$

Selbst ohne Rotation des Körpers,  $\boldsymbol{\omega} = 0$ , gibt es i.A. einen nichtverschwindenden Drehimpulsanteil  $\mathbf{L}_{\text{trans}}$ . Der eigentlich interessante Anteil ist natürlich der Rotationsanteil  $\mathbf{L}_{\text{rot}}$ . Er kann wieder über den Trägheitstensor ausgedrückt werden;

$$\mathbf{L}_{\text{rot}} = \Theta \boldsymbol{\omega}, \quad \text{in } K \quad (3.65)$$

wobei hier einfach die Matrix  $\Theta$  auf den Vektor  $\boldsymbol{\omega}$  angewendet wird. Zum Beweis dieser Darstellung genügt es zu zeigen, dass

$$(\mathbf{x}_i)^2 \omega_\alpha - \mathbf{x}_{i\alpha} (\mathbf{x}_i \boldsymbol{\omega}) = \sum_{\beta} (\delta_{\alpha\beta} \mathbf{x}_i^2 - x_{i\alpha} x_{i\beta}) \omega_\beta, \quad (3.66)$$

was eigentlich klar sein sollte. Dann hat man nach Multiplikation mit  $m_i$  und Summation über  $i$  links  $\mathbf{L}_{\text{rot}}$  und rechts  $\Theta\boldsymbol{\omega}$  stehen (nochmal nachrechnen als AUFGABE!)

Im körperfesten  $K'$ -System gilt entsprechend mit unserer Rotationsmatrix  $R$  wieder

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{\text{rot}} &\equiv R\mathbf{L}'_{\text{rot}} = \Theta\boldsymbol{\omega} = \Theta RR^{-1}\boldsymbol{\omega} \\ \rightsquigarrow \mathbf{L}'_{\text{rot}} &= \Theta'\boldsymbol{\omega}', \quad \Theta' \equiv R^{-1}\Theta R, \quad \boldsymbol{\omega} = R\boldsymbol{\omega}', \quad \text{in } K\end{aligned}\quad (3.67)$$

### 3.2.7 Die Eulerschen Gleichungen

(STRAUMANN) Wir schreiben wieder  $\mathbf{q}_i = \mathbf{a} + \mathbf{x}_i$  für die Massenpunkte  $m_i$  des starren Körpers, vgl. Fig. 3.1, lassen jetzt aber einen beliebigen Aufpunkt  $\mathbf{a}$  (nicht notwendigerweise den Schwerpunkt  $\mathbf{Q}$ ) als Ursprung des körperfesten  $K'$ -Koordinatensystems zu, fordern allerdings

$$\ddot{\mathbf{a}} = 0. \quad (3.68)$$

Für den Drehimpuls  $\mathbf{L}$  im  $K$ -System haben wir

$$\mathbf{L} \equiv \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{q}_i \times \dot{\mathbf{q}}_i, \quad \mathbf{L}_{\text{rot}} \equiv \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i \times \dot{\mathbf{x}}_i \rightsquigarrow \quad (3.69)$$

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{q}_i \times \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a} \times \ddot{\mathbf{q}}_i + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i \times \ddot{\mathbf{x}}_i \equiv \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a} \times \ddot{\mathbf{q}}_i + \dot{\mathbf{L}}_{\text{rot}} \quad (3.70)$$

Für die Summe über alle externen Kräfte  $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$  auf die Massenpunkte  $m_i$  gilt für den Schwerpunkt  $\mathbf{Q}$

$$M\ddot{\mathbf{Q}} = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \quad (3.71)$$

und deshalb

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{q}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \equiv \mathbf{M} \quad (3.72)$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a} \times \ddot{\mathbf{q}}_i + \dot{\mathbf{L}}_{\text{rot}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^N \mathbf{a} \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \quad (3.73)$$

$$\dot{\mathbf{L}}_{\text{rot}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \equiv \mathbf{M}_{\text{rot}}, \quad \text{Drehmoment für Rotation.} \quad (3.74)$$

Jetzt transformieren wir diese Gleichung in das  $K'$ -System mittels unserer Rotationsmatrix  $R$ ,

$$\mathbf{M}_{\text{rot}} = \dot{\mathbf{L}}_{\text{rot}} = R(\dot{\mathbf{L}}'_{\text{rot}} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L}'_{\text{rot}}) = R\mathbf{M}'_{\text{rot}} \quad (3.75)$$

$$\rightsquigarrow \mathbf{M}'_{\text{rot}} = \dot{\mathbf{L}}'_{\text{rot}} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L}'_{\text{rot}}. \quad (3.76)$$

Zusammen mit  $\mathbf{L}'_{\text{rot}} = \Theta' \boldsymbol{\omega}'$  und  $\dot{\mathbf{L}}'_{\text{rot}} = \Theta' \dot{\boldsymbol{\omega}}'$  (der Trägheitstensor ist zeitlich konstant in  $K'$ ) folgt

$$\mathbf{M}'_{\text{rot}} = \Theta' \dot{\boldsymbol{\omega}}' + \boldsymbol{\omega}' \times \Theta' \boldsymbol{\omega}', \quad \text{Eulersche Gleichungen in } K'. \quad (3.77)$$

Dieses ist ein *nichtlineares* System von drei Differentialgleichungen erster Ordnung für die drei Komponenten  $\omega'_1(t)$ ,  $\omega'_2(t)$ ,  $\omega'_3(t)$  im  $K'$ -System.

### 3.3 Kreiseltheorie

#### 3.3.1 Der Symmetrische Kräftefreie Kreisel

(STRAUMANN) Die Eulerschen Gleichungen im Hauptachsensystem lauten

$$\Theta'_1 \dot{\omega}'_1 = \omega'_2 \omega'_3 (\Theta'_2 - \Theta'_3) \quad (3.78)$$

$$\Theta'_2 \dot{\omega}'_2 = \omega'_3 \omega'_1 (\Theta'_3 - \Theta'_1) \quad (3.79)$$

$$\Theta'_3 \dot{\omega}'_3 = \omega'_1 \omega'_2 (\Theta'_1 - \Theta'_2) \quad (3.80)$$

Beim symmetrischen Kreisel sind zwei der Hauptträgheitsmomente im  $K'$ -System gleich, z.B.  $\Theta'_1 = \Theta'_2$ . Dann heißt die  $x'_3$  Achse im  $K'$ -System **Figurenachse**. Es folgt sofort

$$\omega'_3 = \text{const} \quad (3.81)$$

$$\Theta'_1 (\dot{\omega}'_1 + i \dot{\omega}'_2) = i \omega'_3 (\Theta'_3 - \Theta'_1) (\omega'_1 + i \omega'_2) \quad (3.82)$$

$$\rightsquigarrow \dot{\omega}'_{\perp}(t) = i \omega'_0 \omega'_{\perp}(t), \quad \omega'_0 \equiv \omega'_3 (\Theta'_3 - \Theta'_1) / \Theta'_1 \quad (3.82)$$

$$\rightsquigarrow \omega'_{\perp}(t) = \omega'_{\perp} e^{i \omega'_0 t} \quad (3.83)$$

$$\rightsquigarrow \omega'_1(t) = \omega'_{\perp} \cos(\omega'_0 t), \quad \omega'_2(t) = \omega'_{\perp} \sin(\omega'_0 t) \quad (3.84)$$

mit der Integrationskonstanten  $\omega'_{\perp}$ . Es gilt

$$|\boldsymbol{\omega}'|^2 = (\omega'_{\perp})^2 + (\omega'_3)^2 = \text{const}, \quad (3.85)$$

der Vektor  $\boldsymbol{\omega}'$  rotiert also im  $K'$ -System auf dem **Polkegel** (SKIZZE) um die  $x'_3$ -Figurenachse. Desweiteren gilt für die Komponenten des Drehimpulses

$$L'_3 = \Theta'_3 \omega'_3 = \text{const} \quad (3.86)$$

$$L'_1(t) = \Theta'_1 \omega'_{\perp} \cos(\omega'_0 t), \quad L'_2(t) = \Theta'_1 \omega'_{\perp} \sin(\omega'_0 t), \quad (3.87)$$

der Vektor  $\mathbf{L}'$  rotiert also im  $K'$ -System genau wie  $\boldsymbol{\omega}'$  um die  $x'_3$ -Figurenachse und liegt mit  $\boldsymbol{\omega}'$  in einer Ebene (SKIZZE) Im  $K$ -System liegen deshalb die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$ , die Figurenachse (Basisvektor  $\mathbf{e}'_3 \equiv \text{Re}_3 \equiv \mathbf{f}$  in  $K$ -Koordinaten) und der Drehimpuls  $\mathbf{L}$  ebenfalls in einer Ebene. Da  $\mathbf{L}$  im  $K$ -System zeitlich konstant ist, rotieren  $\mathbf{f}$  und  $\boldsymbol{\omega}$  um  $\mathbf{L}$  so, dass alle stets in einer Ebene liegen und  $\boldsymbol{\omega}$  gleichzeitig mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega'_0 = \omega'_3 \left( \frac{\Theta'_3}{\Theta'_1} - 1 \right)$  auf dem Polkegel um  $\mathbf{f}$  rotiert. Der Polkegel rollt dabei auf dem festen **Spurkegel** um  $\mathbf{L}$  ab, dadurch läuft die Figurenachse auf dem **Präzessionskegel** um (FLIESSBACH).

Die Bewegung der Massenpunkte des Kreisels im  $K$ -System wird durch die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  bestimmt: sie rotieren gemäß  $\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$  mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $|\boldsymbol{\omega}| = |R\boldsymbol{\omega}'| = |\boldsymbol{\omega}'|$  um die momentane  $\boldsymbol{\omega}$ -Achse. Gleichzeitig rotiert die ganze Ebene der drei Vektoren  $\mathbf{L}, \mathbf{f}, \boldsymbol{\omega}$ .

### 3.3.2 Die Eulerschen Winkel

Es ist zweckmäßig, die Basisvektoren  $\mathbf{e}'_i$  des  $K'$ -Systems durch die drei Eulerschen Winkel  $\phi, \psi, \theta$  zu charakterisieren. Etwas Ähnliches haben wir schon oben beim Foucault-Pendel diskutiert.

Wir drehen die  $\mathbf{e}_x$  und  $\mathbf{e}_y$  mit dem Winkel  $\phi$  um die  $z$ -Achse:  $\mathbf{e}_x$  geht in  $\mathbf{e}_K$  entlang der '**Knotenlinie**' über. Danach kippen wir  $\mathbf{e}_z$  mit dem Winkel  $\theta$  um die Knotenlinie  $\mathbf{e}_K$ , um  $\mathbf{e}'_z$  zu erhalten. Schließlich drehen wir mit dem Winkel  $\psi$  um die neue  $\mathbf{e}'_z$ -Achse (SKIZZE).

Es gilt

$$\mathbf{e}_K = \cos \psi \mathbf{e}'_x - \sin \psi \mathbf{e}'_y. \quad (3.88)$$

Wir zerlegen  $\mathbf{e}_z$  bezüglich  $\mathbf{e}'_z$  und dem Einheitsvektor  $\mathbf{e}'$  in der  $\mathbf{e}'_x$ - $\mathbf{e}'_y$ -Ebene, mit  $\mathbf{e}_z$  und  $\mathbf{e}'_z$  eine Ebene aufspannt. Dann gilt

$$\mathbf{e}_z = \cos \theta \mathbf{e}'_z + \sin \theta \mathbf{e}', \quad \mathbf{e}' = \sin \psi \mathbf{e}'_x + \cos \psi \mathbf{e}'_y \rightsquigarrow \quad (3.89)$$

$$\mathbf{e}_z = \sin \psi \sin \theta \mathbf{e}'_x + \cos \psi \sin \theta \mathbf{e}'_y + \cos \theta \mathbf{e}'_z. \quad (3.90)$$

Für den Vektor  $\boldsymbol{\omega}$  der Winkelgeschwindigkeit gilt dann, ausgedrückt durch die Zeitableitungen der Euler-Winkel,

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{e}_K + \dot{\phi} \mathbf{e}_z + \dot{\psi} \mathbf{e}'_z \quad (3.91)$$

HIER MUSS MAN BEGRÜNDEN, WARUM MAN DAS SO SCHREIBEN DARF (FLIESSBACH). Einsetzen ergibt im  $K'$ -System

$$\omega'_x = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \quad (3.92)$$

$$\omega'_y = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \quad (3.93)$$

$$\omega'_z = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}. \quad (3.94)$$

Für einen symmetrischen Kiesel mit  $\Theta'_1 = \Theta'_2$  im körperfesten Hauptachsensystem erhalten wir z.B. damit einen expliziten Ausdruck für die kinetische Energie der Rotation

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}' \Theta' \boldsymbol{\omega}' = \frac{1}{2} ((\omega'_x)^2 + (\omega'_y)^2) \Theta'_1 + (\omega'_z)^2 \Theta'_3 \\ &= \frac{1}{2} \left( (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) \Theta'_1 + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \Theta'_3 \right), \quad \text{symm. Kiesel.} \end{aligned} \quad (3.95)$$

### 3.3.3 Der Schwere Symmetrische Kreisel

(FLIESSBACH) Auf einen symmetrischen Kreisel wirke jetzt eine konstante Kraft (z.B. homogenes Schwerfeld) in  $z$ -Richtung im  $K$ -System. Die potentielle Energie hat also die Form (SKIZZZE)

$$V = Mgz = Mgs \cos \theta, \quad (3.96)$$

wobei  $M$  die Gesamtmasse und  $z$  ( $s$ ) die Koordinate des Schwerpunkts in Richtung  $\mathbf{e}_z$  ( $\mathbf{e}'_z$ ) ist. Die Lagrangefunktion dieses Systems

$$L = T - V = \frac{1}{2} \left( \left( \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \right) \Theta'_1 + \left( \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \right)^2 \Theta'_3 \right) - Mgs \cos \theta \quad (3.97)$$

liefert uns über Lagrange II die Bewegungsgleichungen für die Eulerschen Winkel, die den Bewegungszustand des Kreisels eindeutig bestimmen. Wir erkennen zunächst den Nutzen *zyklischer* verallgemeinerter Koordinaten (d.h. solcher, von denen  $L$  nicht abhängt):

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0, \quad \phi \text{ zyklisch} \rightsquigarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \equiv \dot{L}_z = 0 \rightsquigarrow L_z \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \text{const} \quad (3.98)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = 0, \quad \psi \text{ zyklisch} \rightsquigarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \equiv \dot{L}'_z = 0 \rightsquigarrow L'_z \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \text{const} \quad (3.99)$$

Da  $\phi$  und  $\psi$  zyklisch sind, sind die entsprechenden Ableitungen nach den verallgemeinerten Geschwindigkeiten konstant. Dieses sind hier die Drehimpulskomponenten  $L_z$  in  $K$  und  $L'_z$  in  $K'$ , explizit also

$$L_z = \Theta'_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + \Theta'_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta \quad (3.100)$$

$$L'_z = \Theta'_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \quad (3.101)$$

Wir können das z.B. nach der Winkelgeschwindigkeit der Präzession  $\dot{\phi}$  auflösen,

$$\dot{\phi} = \frac{L_z - L'_z \cos \theta}{\Theta'_1 \sin^2 \theta}, \quad \text{Präzessionsgeschwindigkeit.} \quad (3.102)$$

Weiterhin ist die Gesamtenergie  $E$  konstant (die Lagrange-Funktion hängt nicht explizit von der Zeit ab - wir werden das weiter unten noch genauer diskutieren),

$$E = T + V = \frac{\Theta'_1}{2} \dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}}(\theta) = \text{const} \quad (3.103)$$

$$U_{\text{eff}}(\theta) \equiv \frac{(L_z - L'_z \cos \theta)^2}{2\Theta'_1 \sin^2 \theta} + \frac{(L'_z)^2}{2\Theta'_3} + Mgs \cos \theta \quad (3.104)$$

mit dem *effektiven Potential*  $U_{\text{eff}}(\theta)$ . Damit haben wir das Problem des schweren *symmetrischen* Kreisels im Prinzip gelöst: Diese DGL ist erster Ordnung und kann integriert werden. Wir haben durch die **drei Konstanten der Bewegung**  $E$ ,  $L_z$  und  $L'_z$  die Abbildung auf ein integrierbares eindimensionales Problem für die Variable  $\theta(t)$  als Funktion

der Zeit  $t$  erreicht. Die Konstanten der Bewegung hängen von den Anfangsbedingungen ab.

AUFGABEN:

1. Zeige, wie aus Gl. (3.102) für den kräftefreien symmetrischen Kreisel

$$\dot{\phi} = \frac{L_z}{\Theta'_1}, \quad \text{Präzessionsgeschwindigkeit (kräftefreier Kreisel)} \quad (3.105)$$

folgt. Zeige, wie daraus auch  $\theta = \text{const}$  folgen muss sowie weiterhin  $\dot{\psi} = \text{const}$ . Zeige ferner den Zusammenhang zwischen der Rotationsfrequenz um die Figurenachse, dem Neigungswinkel  $\theta$  und der Präzessionsfrequenz  $\dot{\phi}$ ,

$$\dot{\phi} = \frac{\Theta'_3}{\Theta'_1 - \Theta'_3 \cos \theta} \dot{\psi}, \quad (\text{kräftefreier Kreisel}). \quad (3.106)$$

### 3.3.3.1 Kleine Nutationsamplituden

(S. W. GROESBERG, 'ADVANCED MECHANICS', John Wiley 1968) Wir betrachten Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \theta(t=0) &= \theta_0, \quad \dot{\theta}(t=0) = \dot{\phi}(t=0), \quad \text{keine anfängliche Nutation und Präzession.} \\ \rightsquigarrow L_z &= \Theta'_3 \dot{\psi} \cos \theta_0, \quad L'_z = \Theta'_3 \dot{\psi}, \quad E = \frac{(L'_z)^2}{2\Theta'_3} + Mgs \cos \theta_0 \end{aligned} \quad (3.107)$$

Damit gehen wir in die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\Theta'_1}{2} \dot{\theta}^2 &= E - U_{\text{eff}}(\theta) = Mgs(\cos \theta_0 - \cos \theta) - \frac{(L_z - L'_z \cos \theta)^2}{2\Theta'_1 \sin^2 \theta} \\ &= Mgs(\cos \theta_0 - \cos \theta) - \frac{\Theta'^2_3 \dot{\psi}^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta)^2}{2\Theta'_1 \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Das 'schreit nach' der Substitution

$$\xi = \cos \theta_0 - \cos \theta \quad (3.109)$$

$$\rightsquigarrow \dot{\xi} = \dot{\theta} \sin \theta = \frac{\sin \theta}{\sqrt{\Theta'_1}} \sqrt{(2Mgs)\xi - \left( \frac{\Theta'^2_3 \dot{\psi}^2}{\Theta'_1 \sin^2 \theta} \right) \xi^2} \quad (3.110)$$

Bis hierhin ist noch alles exakt, auf der rechten Seite müssen wir  $\sin \theta$  natürlich durch  $\xi$  ausdrücken.

An dieser Stelle kommt nun der Näherungsansatz

$$\sin \theta = \sin \theta_0 + (\theta - \theta_0) \cos \theta_0 + \dots \approx \sin \theta_0 \quad (3.111)$$

ins Spiel, wenn wir von *sehr kleinen Nutationsamplituden*  $|\theta - \theta_0| \ll 1$  ausgehen. Als genäherte Differentialgleichung bekommt man dann die Lösung durch Trennung der

Variablen,

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{\Theta'_1}} \sqrt{(2Mgs)\xi - \left(\frac{\Theta'_3{}^2 \dot{\psi}^2}{\Theta'_1 \sin^2 \theta_0}\right) \xi^2} &= \dot{\xi} \\ \frac{d\xi}{\sqrt{(2Mgs)\xi - \left(\frac{\Theta'_3{}^2 \dot{\psi}^2}{\Theta'_1 \sin^2 \theta_0}\right) \xi^2}} &= \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{\Theta'_1}} dt. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Das kann integriert werden und liefert

$$\xi(t) = \cos \theta_0 - \cos \theta(t) = \frac{Mgs\Theta'_1 \sin^2 \theta_0}{\Theta'_3{}^2 \dot{\psi}^2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{\Theta'_3 \dot{\psi}}{\Theta'_1} t \right) \right]. \quad (3.113)$$

Daraus sieht man, dass die *Nutation* des Kreisels oszilliert, und zwar mit der Winkelfrequenz  $\frac{\Theta'_3 \dot{\psi}}{\Theta'_1}$ , die direkt proportional zur konstanten (wegen  $L'_z = \Theta'_3 \dot{\psi} = \text{const}$ ) Frequenz  $\dot{\psi}$  der Rotation um die Figurenachs ist. Entsprechend finden wir für die Präzession über Gl. (3.102)

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{L_z - L'_z \cos \theta}{\Theta'_1 \sin^2 \theta} = \frac{\Theta'_3 \dot{\psi} (\cos \theta_0 - \cos \theta)}{\Theta'_1 \sin^2 \theta} \\ &\approx \frac{Mgs}{\Theta'_3 \dot{\psi}} \left[ 1 - \cos \left( \frac{\Theta'_3 \dot{\psi}}{\Theta'_1} t \right) \right] \end{aligned} \quad (3.114)$$

mit derselben Näherung  $\sin \theta \approx \sin \theta_0$  wie oben. Die Präzessionsfrequenz  $\dot{\phi}$  des Kreisels ändert sich genauso wie die Nutation periodisch, und zwar mit derselben Winkelfrequenz  $\frac{\Theta'_3 \dot{\psi}}{\Theta'_1}$ !

Wir können uns jetzt die Bewegung des schweren Kreisels in diesem Fall wie folgt vorstellen: Zur Zeit  $t = 0$  gilt  $\theta = \theta_0, \dot{\theta} = 0$  sowie  $\dot{\phi} = 0$ , aber natürlich  $\dot{\psi} \neq 0$ . Der Kegel führt eine Präzessionsbewegung aus, bei der seine Figurenachs im zeitlichen Mittel mit

$$\langle \dot{\phi} \rangle \equiv \frac{Mgs}{\Theta'_3 \dot{\psi}}, \quad \text{mittlere Präzessionsfrequenz} \quad (3.115)$$

um die raumfeste  $z$ -Achse im  $K$ -System rotiert. Wegen Gl. (3.114) ist die Präzession allerdings nicht gleichförmig, sondern sie geschieht oszillatorisch mal schneller und mal langsamer (aber hier in unserer Näherung immer 'vorwärts' und nie 'zurück', da  $\dot{\phi}$  das Vorzeichen nicht wechselt). Zu bestimmten Zeiten gilt  $\dot{\phi} = 0$ , d.h. die Präzession bleibt dort momentan stehen.

Die Figurenachs wippt während der Präzessionsbewegung ein wenig auf und ab (Nutation), und zwar mit der hohen Nutationsfrequenz  $\frac{\Theta'_3 \dot{\psi}}{\Theta'_1}$  ( $\dot{\psi}$  ist normalerweise recht groß) und der kleinen Nutations-Amplitude  $\frac{Mgs\Theta'_1 \sin^2 \theta_0}{\Theta'_3{}^2 \dot{\psi}^2}$  gemäß Gl. (3.113)

### 3.3.3.2 Allgemeiner Fall

Für den allgemeinen Fall muss man das elliptische Integral, das beim Lösen der Bewegungsgleichung auftritt, lösen. (FRAGE an Mathematiker: wie ist der Zusammenhang zwischen elliptischen Funktionen/doppel-periodischen Funktionen in der Funktionentheorie und den periodischen Bewegungen des schweren Kreisels?) Ausgehend von dem Spezialfall kleiner Nutationsamplituden (oben) können wir uns aber bereits vorstellen, was für Bewegungen man haben wird: bei der Präzession kann  $\dot{\phi}$  sein Vorzeichen wechseln (manchmal geht die Präzession 'rückwärts') oder stets positiv oder negativ sein (SKIZZE).

## 4. DER HAMILTONSCHE FORMALISMUS

Hier werden wir eine Alternative zum Lagrangeschen Zugang zur Mechanik kennenlernen.

Bisher haben wir mechanische Systeme durch Lagrangefunktionen  $L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$  beschrieben, die von den generalisierten Koordinaten  $q_i$ , den generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$  und der Zeit  $t$  abhängen. BEISPIEL:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2), \quad \text{freies Teilchen in ebenen PKO.} \quad (4.1)$$

Statt der generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$  suchen wir jetzt eine äquivalente Beschreibung mittels der **generalisierten Impulse**,

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, f, \quad \text{zu } q_i \text{ konjugierter Impuls.} \quad (4.2)$$

Die generalisierten Impulse haben im Allgemeinen *nicht* wie in kartesischen Koordinaten die Form  $p_i = m\dot{x}_i$ . BEISPIEL:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) \rightsquigarrow p_r \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\phi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \dot{\phi} \quad (4.3)$$

mit den generalisierten Impulsen  $p_r$  und  $p_\phi$ . Insbesondere ist die physikalische Einheit (Dimension) i.A. nicht mehr  $\text{kg m s}^{-1}$ . Im obigen Beispiel bestimmt  $p_\phi$  die Flächengeschwindigkeit (z.B. des Fahrstrahls beim Kepler-Problem, Wiederholung davon als AUFGABE). Vom Kepler-Problem wissen wir z.B. auch  $p_\phi = \text{const}$ , d.h. die generalisierten Impulse scheinen nützliche Größen zu sein.

Die Hamilton-Mechanik basiert auf einer Formulierung der Mechanik durch generalisierten Koordinaten  $q_i$  und generalisierte Impulse.

### 4.1 Die Legendre-Transformation

Es stellt sich die Frage, wie wir die Ableitungen  $\dot{q}_i$  in der Lagrangefunktionen  $L$  durch die Impulse  $p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  ersetzen, ohne die in  $L$  enthaltenen Information zu verlieren.

#### 4.1.1 Beispiel

Wir betrachten zunächst ein Beispiel (CALLEN, THERMODYNAMICS). Sei  $L = L(\dot{q})$  gegeben. Wir schreiben das zur geometrischen Interpretation unten als einfache Funktion in der Form  $y = f(x)$  mit einer unabhängigen Variablen  $x$ , also  $f = L$  und  $x = \dot{q}$ . Jetzt

wollen wir statt  $x$  die Ableitung  $p \equiv f'(x)$  nach  $x$  benutzen, um  $y$  als Funktion von  $p$  darzustellen. Dann gilt mit der Umkehrfunktion  $(f')^{-1}$ ,

$$p = f'(x) \rightsquigarrow x = (f')^{-1}(p) \rightsquigarrow y = f(x) = f((f')^{-1}(p)) \equiv g(p), \quad (4.4)$$

also die gesuchte Darstellung  $y = g(p)$  als Funktion von  $p$ . Allerdings ist das *nicht gleichwertig* zum ursprünglichen  $y = f(x)$ , denn wollten wir daraus die ursprüngliche Funktion  $f(x)$  rekonstruieren, müssten wir

$$f = g(p) \rightsquigarrow g^{-1}(f) = p = f'(x), \quad (4.5)$$

d.h. eine DGL lösen, die allerdings mit  $f(x)$  auch  $f(x+c)$ ,  $c \in \mathbb{R}$  als Lösung enthält! Die Lösung wäre also nicht eindeutig. BEISPIEL:

$$\begin{aligned} y = f(x) = x^2, \quad p = f'(x) = 2x &\rightsquigarrow f(x) = \frac{p^2}{4} \rightsquigarrow g(p) = \frac{p^2}{4} \\ \rightsquigarrow p = 2\sqrt{g(p)} \leftrightarrow f'(x) = 2\sqrt{f} &\rightsquigarrow \frac{df}{2\sqrt{f}} = dx \rightsquigarrow \sqrt{f} = x + c \rightsquigarrow \underline{f(x) = (x+c)^2}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Wir können  $f(x)$  also nicht eindeutig rekonstruieren, da wir die Integrationskonstante  $c$  nicht kennen: Statt der ursprünglichen Parabel erhalten wir lauter verschobene Parabeln.

#### 4.1.2 Konvexe Funktionen

Benötigt wird als ein anderes Verfahren, nämlich die sogenannte **Legendretransformation**. Diese spielt auch in der Thermodynamik bei der Konstruktion der thermodynamischen Potentiale eine große Rolle. Die Legendretransformation wird zunächst für konvexe Funktionen  $f(x)$  einer Variablen  $x$  diskutiert. Zur Erinnerung (FORSTER, Analysis I)

**Definition** Eine Funktion  $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **konvex**, wenn für alle  $x_1, x_2 \in D$  und alle  $\lambda$  mit  $0 < \lambda < 1$  gilt

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2). \quad (4.7)$$

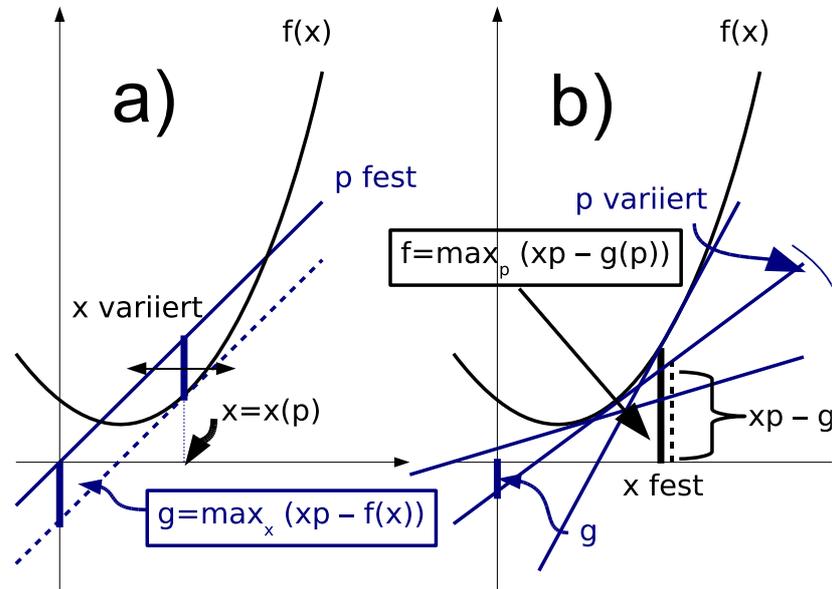
Die Funktion heißt **konkav**, wenn  $-f$  konvex ist.

Als Eselsbrücke: ‘konvex’ und ‘konkav’ gibt es auch bei optischen Linsen. Hier schauen wir ‘von unten’ auf den Graph der Funktion  $f$ : wie eine konvexe Linse (SKIZZE). In eine *konkave* Linse kann man *Kaffee* hineingießen.

Im folgenden betrachten wir konvexe Funktionen. Die Konstruktion der Legendretransformation funktioniert aber entsprechend auch für konkave Funktionen - der Unterschied ist ja nur ein Minuszeichen (das aber manchmal zur Verwirrung führen kann: aufpassen). Insbesondere ist die *Entropie*  $S(X)$  in der Thermodynamik eine konkave Funktion ihrer *natürlichen Variablen*  $X = (U, V, N)$  (innere Energie, Volumen und Teilchenzahl), es gilt also

$$S(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \geq \lambda S(x_1) + (1-\lambda)S(x_2), \quad 0 < \lambda < 1. \quad (4.8)$$

Dies folgt aus dem Prinzip der Maximierung der Entropie mit Bezug auf gehemmte Gleichgewichtszustände (vgl. SKRIPT Thermodynamik und Statistik WS 2006/2007 sowie STRAUMANN, ‘Thermodynamik’).



**Fig. 4.1:** Legendre-Transformation: a) Einfache Legendre-Transformation  $\mathcal{L}[f]$  einer konvexen Funktion  $f(x)$  und ihre geometrische Bedeutung; b) zweifache Legendre-Transformation  $\mathcal{L}\mathcal{L}[f]$  ergibt wieder die ursprüngliche Funktion  $f$ .

### 4.1.3 Konstruktion der Legendretransformation

Um  $f(x)$  eindeutig durch seine Ableitungen  $p = f'(x)$  beschreiben zu können, betrachten wir folgende Konstruktion (ARNOLD): Sei  $y = f(x)$  eine *konvexe*, zweimal differenzierbare Funktion mit  $f''(x) > 0$ . Wir nehmen eine Steigung  $p$  und betrachten den Abstand der Geraden  $y = px$  von der Kurve  $y = f(x)$  in vertikaler Richtung. Dieser Abstand  $px - f(x) \equiv F(p, x)$  hat ein Maximum (SKIZZZE) an einer Stelle  $x(p)$ , wenn wir  $x$  variieren. Es ist bestimmt durch  $0 = \frac{\partial F(p, x)}{\partial x} = p - f'(x)$ , also  $p = f'(x)$  wie gewünscht. Wir definieren also

**Definition** Die Legendretransformation für eine konvexe Funktion  $f(x)$  mit  $f''(x) > 0$  ist definiert durch

$$\mathcal{L}[f](p) \equiv g(p) \equiv \max_x (px - f(x)), \quad \text{Legendretransformation.} \quad (4.9)$$

Hierbei ist  $x = x(p)$  und  $p = f'(x)$ .

Es gilt also  $g(p) = px(p) - f(x(p)) = F(p, x(p))$  mit dem oben eingeführten Abstand  $F(p, x)$ , vgl. Fig. 4.1 a).

Der Wert  $g(p)$  ist der  $y$ -Achsenabschnitt der Tangente an  $f(x)$  mit Steigung  $p$ . Wir beschreiben die Kurve also durch ihre Tangenten - diese sind festgelegt durch die Stei-

gungen  $p$  und die Achsenabschnitte  $g$ . Die Angabe von  $g(p)$  definiert also genau die Schar von Tangenten, die die Kurve  $f(x)$  einhüllen.

AUFGABE: Zeige, dass  $g(p)$  konvex ist.

In einem weiteren Schritt kann man jetzt die Legendre-Transformation der Legendre-Transformation betrachten, d.h. die zweifache Legendre-Transformation  $\mathcal{L}\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[g]$ . Dann gilt

$$\mathcal{L}\mathcal{L}[f] = f, \quad (4.10)$$

die Legendre-Transformation ist involutiv (ihr Quadrat ist die Identität), man kommt also wieder zur ursprünglichen Funktion zurück. Geometrisch bedeutet dieses, dass man aus den Tangenten mit Steigung  $p$  und den Abschnitten  $g(p)$  die ursprüngliche Funktion  $f$  wirklich wieder rekonstruieren kann, vgl. Fig. (4.1 b).

Die mehrdimensionale Legendre-Transformation geht nun ganz entsprechend, obwohl dort etwas mehr formale Maschinerie bezüglich Auflösbarkeit bei Funktionen mehrerer Variablen aufgeföhren werden. muß, vgl. STRAUMANN.

## 4.2 Hamiltonsche Gleichungen

**Definition** Gegeben sei ein mechanisches System mit  $f$  Freiheitsgraden  $q_i$  und Lagrangefunktion  $L(q_1, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f; t)$ . Die **Hamiltonfunktion**  $H$  des Systems ist die Legendre-Transformation von  $L$  nach den verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$ ,

$$H(q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f; t) \equiv \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - L(q_1, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f; t), \quad (4.11)$$

In kompakter Notation schreiben wir

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \equiv \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad \text{Hamilton-Funktion} \quad (4.12)$$

Hierbei sind die  $p_i$  die **verallgemeinerten Impulse**,

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad \text{verallgemeinerten Impulse.} \quad (4.13)$$

Die verallgemeinerten Geschwindigkeiten werden hierbei als Funktionen  $\dot{q}_i = \dot{q}_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  der verallgemeinerten Koordinaten  $\mathbf{q}$ , der verallgemeinerten Impulse  $\mathbf{p}$  und der Zeit  $t$  (falls  $L$  explizit von der Zeit abhängt) ausgedrückt.

Wir betrachten die totale Ableitung der Hamiltonfunktion nach der Zeit,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f; t) &= \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \end{aligned} \quad (4.14)$$

Auf der anderen Seite folgt aus der Definition von  $H$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f; t) &= \sum_{i=1}^f (\dot{p}_i \dot{q}_i + p_i \ddot{q}_i) - \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \sum_{i=1}^f \left( \dot{p}_i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Das gilt zunächst allgemein, insbesondere schreiben wir für das Differential

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^f \left( \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Der Vergleich liefert

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad -\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (4.17)$$

Daraus folgt der wichtige Satz

**Satz 8.** *Ein mechanisches System mit  $f$  Freiheitsgraden  $q_i$  habe die Lagrangefunktion  $L$ . Dann sind Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichungen zweiter Art,  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$  äquivalent zu Lösungen der Hamiltonschen Gleichungen*

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, f, \quad \textbf{Hamiltonsche Gleichungen.} \quad (4.18)$$

mit der Hamiltonfunktion  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \equiv \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - L$  mit  $\mathbf{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ .

Beweis: a) Erfüllt  $\mathbf{q}(t)$  Lagrange II, so gilt  $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$  und mit Gl. (4.17)  $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ , also die Hamiltonschen Gleichungen. b) Sei umgekehrt eine Lösung der Hamiltonschen Gleichungen und eine Hamiltonfunktion  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  gegeben, so definiert man deren Legendre-Transformierte als

$$\mathcal{L}[H](\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathcal{L}\mathcal{L}[L](\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (4.19)$$

was wegen der zweifachen Legendre-Transformation die Lagrange-Funktion  $L$  ergibt mit  $\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}$ . Da die Hamiltonschen Gleichungen erfüllt sind, gilt zusammen mit Gl. (4.17)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (4.20)$$

also die Euler-Lagrange-Gleichungen zweiter Art. Ende des Beweises.

### 4.2.1 Konservative Systeme

(SKRIPT SCHÖNHAMMER) Wir betrachten als Beispiel ein mechanisches System mit Lagrangefunktion

$$L = T - V \equiv \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T A(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} - V(\mathbf{q}, t), \quad (4.21)$$

wobei die kinetische Energie durch die *quadratische Form*  $A(\mathbf{q}, t)$  ( $f \times f$ -Matrix) gegeben ist, d.h.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j A_{ij}(\mathbf{q}, t), \quad \det A > 0, \quad \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_f)^T. \quad (4.22)$$

Es folgt

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = A \dot{\mathbf{q}} \rightsquigarrow \dot{\mathbf{q}} = A^{-1} \mathbf{p} \quad (4.23)$$

Damit hat man

$$\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{p} = \dot{\mathbf{q}}^T A \dot{\mathbf{q}} = 2T \rightsquigarrow H = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{p} - L = T + V \quad (4.24)$$

und explizit

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p}^T A^{-1} \mathbf{p} \quad (4.25)$$

$$H = \mathbf{p}^T A^{-1}(\mathbf{q}, t) \mathbf{p} + V(\mathbf{q}, t), \quad \text{Hamiltonfunktion als Gesamtenergie} \quad (4.26)$$

### 4.2.2 Beispiel: Teilchen der Masse $m$ im Potential $V$ in $d$ Dimensionen

In kartesischen Koordinaten ist hier

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{q}}^2 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad \text{kinetische Energie,} \quad (4.27)$$

die Hamiltonfunktion wir also zu

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{q}, t). \quad (4.28)$$

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{m} \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} \equiv \mathbf{F}(\mathbf{q}, t). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Das ist natürlich äquivalent mit den Newtonschen Gleichungen Gl. (1.1). Mit Hamilton wird die Newtonsche DGL zweiter Ordnung also in ein System von zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung umgeschrieben.

### 4.2.3 Hamiltonfunktion als Erhaltungsgröße

Falls die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, gilt für Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichungen zweiter Art

$$\frac{d}{dt}H = \sum_{i=1}^f \left( \dot{p}_i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad (4.30)$$

vgl. Gl. (4.15). Man beachte, dass hier die totale Ableitung von  $H$  steht. Mit der kinetischen Energie  $T$  in der Form Gl. (4.22),  $T = \frac{1}{2} \sum_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j A_{ij}(\mathbf{q})$ , mit *zeitunabhängiger* Matrix  $A$  folgt dann

$$H = T + V = \text{konst.}, \quad \text{Gesamtenergie.} \quad (4.31)$$

### 4.2.4 Zyklische Koordinaten und Erhaltungsgrößen

Zyklische Koordinaten sind uns schon vorher begegnet, z.B. beim schweren Kreisel Gl. (3.98).

**Definition** Ein mechanisches System mit  $f$  Freiheitsgraden  $q_i$  habe die Lagrangefunktion  $L$ . Dann heißt eine Koordinate  $q_k$  **zyklisch**, falls

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0. \quad (4.32)$$

Aus Lagrange II und der Definition der konjugierten Impulse  $p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ , Gl. (4.2), folgt dann:

$$\dot{p}_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad (4.33)$$

also der Satz

**Satz 9.** Die zu zyklischen Koordinaten  $q_k$  konjugierten verallgemeinerten Impulse sind Erhaltungsgrößen, d.h. zeitlich konstant.

Im Hamilton-Formalismus gilt wegen

$$\dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad (4.34)$$

vgl. Gl. (4.17), die Aussage

$$q_k \text{ zyklisch} \leftrightarrow \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0. \quad (4.35)$$

**AUFGABE:** Stellen Sie die Hamiltonfunktion für ein zentralsymmetrisches Potential  $V(r)$  in  $d = 3$ -dimensionalen Kugelkoordinaten auf. Beweisen Sie im Hamilton-Formalismus den Flächensatz und die Konstanz der Ebene der Bewegung. Leiten Sie damit die Bewegungsgleichung für die Radius-Koordinate her.

### 4.3 Der Phasenraum

#### 4.3.1 Definitionen

Wir beginnen mit einer ‘Physiker’-Definition des Phasenraums,

**Definition** Der **Phasenraum**  $\Gamma$  eines mechanischen Systems mit  $f$  Freiheitsgraden und Hamiltonfunktion  $H(q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f; t)$  ist der Raum der  $2f$  *kanonischen Variablen*  $q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f$ .

(Was für ein Raum, fragt der Mathematiker). Wir geben uns erst einmal damit zufrieden, daß der Phasenraum *lokal* wie der reelle Vektorraum  $\mathbb{R}^{2f}$  aussieht.

Weiterhin

**Definition** Der **Zustand** zur Zeit  $t$  eines mechanischen Systems mit  $f$  Freiheitsgraden und Hamiltonfunktion  $H(q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f; t)$  ist ein Punkt

$$\mathbf{X}(t) \equiv (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \quad (4.36)$$

im *Phasenraum*.

Bemerkung: in der Quantenmechanik ist der Zustand eines (abgeschlossenen) quantenmechanischen Systemes zur Zeit  $t$  durch einen Vektor  $|\Psi(t)\rangle$  (Wellenfunktion) eines *Hilbertraums* (mehr- oder sogar unendlich-dimensionaler Vektorraum) bestimmt.

(SKRIPT SCHÖNHAMMER). Für eine zweimal stetig nach den  $p_i$  und  $q_i$  differenzierbare Hamiltonfunktion  $H$  sind die Lösungen der Hamiltonschen Gleichungen eindeutig. Deshalb bestimmt jede Punkt im Phasenraum eine eindeutige **Phasenraumtrajektorie**, d.h. eine Kurve  $t \rightarrow \mathbf{X}(t)$  im Phasenraum. Die Phasenraumtrajektorien können sich also nicht schneiden.

Wie bei der Definition des *Richtungsfeldes* für gewöhnliche DGL (vgl. SKRIPT MM) definieren wir im Phasenraum

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \end{pmatrix}, \quad \text{Phasenraum-Geschwindigkeitsfeld} \quad (4.37)$$

$$\rightsquigarrow \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{X}, t), \quad \text{Hamiltonsche Gleichungen} \quad (4.38)$$

Die  $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$  sind die Tangentialvektoren an die Kurve  $\mathbf{X}(t)$ . Mit der Hamiltonfunktion  $H$  ist  $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$  bestimmt, man kann also die Lösung des Anfangswertproblems  $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$ ,  $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$  im Prinzip ‘zeichnerisch’ ermitteln, indem man alle Tangenten des Phasenraum-Geschwindigkeitsfeldes durch eine Kurve mit Anfangspunkt  $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$  verbindet (SKIZZE).

**Definition** Die Abbildung

$$\phi^t : \mathbf{X}(0) \rightarrow \mathbf{X}(t), \quad (\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)) \rightarrow (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \quad (4.39)$$

bezeichnet man als **Hamiltonschen Fluss** oder **Phasenraumfluss**. Sie beschreibt die **Zeitentwicklung** in der klassischen (Hamiltonschen) Mechanik

Bemerkung: solche Abbildungen zwischen Zuständen physikalischer Systeme zu verschiedenen Zeiten sind in der Physik extrem wichtig, da in ihnen die gesamte *Dynamik* des Systems steckt. In der Quantenmechanik wird die Dynamik eines Quantensystems durch einen *Zeitentwicklungsoperator*  $\exp(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t)$  beschrieben, wobei  $\hat{H}$  der Hamiltonoperator und  $\hbar \equiv h/2\pi$  mit dem Planckschen Wirkungsquantum  $h$  ist.

### 4.3.2 Beispiel: harmonischer Oszillator in $d = 1$

Hier ist die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega^2q^2, \quad \text{harmonischer Oszillator in } d = 1 \quad (4.40)$$

mit dem Potential  $V(x) = \frac{1}{2}m\Omega^2q^2$ , aus dem die übliche Rückstellkraft  $f(q) = -V'(q) = -m\Omega^2q$  folgt. Hier kann  $x$  z.B. eine kartesische Koordinate sein, oder die Bogenlänge  $s$  längs einer eindimensionalen Kurve  $y = f(x)$ , vgl. Kap. 2.2.3. Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\Omega^2q, \end{aligned} \quad (4.41)$$

wie es natürlich auch aus Newton, Gl. (1.1), folgt. Dieses System hatten wir auch bereits in MM kennen gelernt und gelöst (WIEDERHOLEN!). Die Phasenraumtrajektorien sind **Ellipsen** im  $p$ - $q$ -Phasenraum, denn

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega^2q^2 = E = \text{konst}, \quad \text{Energieerhaltung} \quad (4.42)$$

ist eine Ellipsengleichung in den kartesischen, kanonischen Variablen  $p$  und  $q$ , vgl. Gl. (1.80). Ein Anfangspunkt  $(p_0, q_0)$  legt hier die Energie  $E$  und damit die Phasenraumtrajektorien fest. Insbesondere sieht man schön geometrisch die Bedeutung des Phasenraum-Geschwindigkeitsfeldes,

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \begin{pmatrix} \frac{p}{m} \\ -m\Omega^2q \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

als Vektorfeld der Tangentialvektoren an die Trajektorien (SKIZZIEREN!).

### 4.3.3 Doppelmuldenpotential in $d = 1$

Dieses Beispiel ist noch interessanter, denn hier tritt ein singulärer Punkt auf einer Separatrix auf. Wieder hat man ein Teilchen der Masse  $m$  in einer Dimension, aber in einem 'W-förmigen' sogenannten Doppelmuldenpotential  $V(x)$ . Die Größe der Gesamtenergie  $E$  im Vergleich zu  $V$  bestimmt den Charakter der Phasenraumtrajektorien. Sei  $V_0$  die Höhe des zentralen 'Buckels' im Doppelmuldenpotential (SKIZZE). Für  $E < V_0$  gibt es

zwei Phasenraumtrajektorien, die einer Bewegung in der linken oder der rechten Mulde entsprechen. Für  $E > V_0$  läuft das Teilchen in beiden Mulden und überwindet die zentrale Barriere. Für  $E = V_0$  gibt es drei Möglichkeiten, nämlich Bewegung links, Bewegung rechts, oder die instabile Ruhe auf dem Buckel. Die drei entsprechenden Phasenraumtrajektorien formen eine **Separatrix**, die wie eine geschlossene, sich kreuzende Kurve aussieht und die die zwei anderen Fälle  $E < V_0$  und  $E > V_0$  voneinander separiert.

**Definition** Phasenraumpunkte  $\mathbf{X}^{(i)}$  mit Phasenraum-Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(\mathbf{X}^{(i)}, t) = 0$  heißen **Fixpunkte** oder **singuläre Punkte**.

AUFGABE: Beweise, dass die Phasenraumtrajektorie durch einen Fixpunkt  $\mathbf{X}^{(i)}$  nur aus diesem Punkt besteht.

AUFGABE: Diskutiere qualitativ, was im obigen Beispiel des Doppelmuldenpotentials in  $d = 1$  auf der Separatrix bei Annäherung von der linken (oder der rechten) Potentialmulde passiert.

#### 4.4 Der Satz von Liouville

Häufig hat man Situationen vorliegen, wo man mehrere mechanische Systeme gleichzeitig betrachten möchte, z.B. ein **Ensemble** von  $N$  Systemen mit je  $2f$  Freiheitsgraden. Es gibt zwei Möglichkeiten:

- Beschreibung des Ensembles als einfacher Punkt in einem  $N \times 2f$ -dimensionalen Phasenraum  $\Gamma$ .
- Alle  $N$  Systeme haben dieselbe Hamiltonfunktion und seien unabhängig voneinander, z.B.  $N$  unabhängige Experimente mit identischen Kreiseln unter gleichen Bedingungen, aber mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen  $\mathbf{X}_0$

Im zweiten Fall beschreiben wir ein solches Ensemble durch die Angabe der **Phasenraumdichte**

$$\rho(q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f, t) \equiv \rho(\mathbf{X}, t), \quad \text{Phasenraumdichte.} \quad (4.44)$$

Es ist

$$\rho(q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f, t) dq_1 \dots dq_f dp_1 \dots dp_f \equiv \rho(\mathbf{X}, t) d\mathbf{X} \quad (4.45)$$

die Anzahl von Teilchen im Volumenelement  $dq_1 \dots dq_f dp_1 \dots dp_f \equiv d\mathbf{X}$  des Phasenraums. Die zeitliche Entwicklung der Phasenraumdichte  $\rho$  ist meist so kompliziert, dass sie sich nicht berechnen läßt (SKRIPT ATTLAND). Die gesamte Anzahl  $N$  der Systeme des Ensembles,

$$\int \rho(\mathbf{X}(t), t) d\mathbf{X} = N, \quad (4.46)$$

muss aber natürlich konstant bleiben. Zu allen Zeiten  $t$  ist das Integral von  $\rho$  über das Gesamtvolumen des Phasenraums also konstant.

Es gilt aber in Wirklichkeit eine noch stärkere Aussage: *Die Phasenraumdichte  $\rho(\mathbf{X}, t)$  ist zeitlich konstant, d.h.  $\frac{d}{dt}\rho(\mathbf{X}, t) = 0$ .* Wir untersuchen diese Aussage in zwei Schritten.

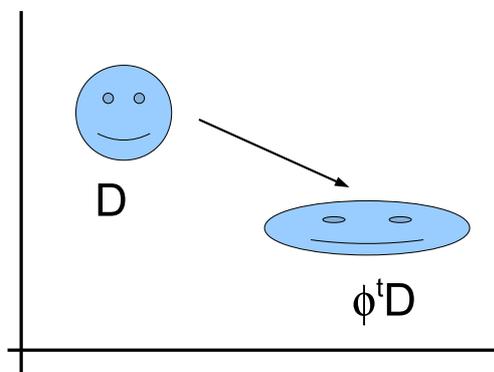


Fig. 4.2: Liouvillesches Theorem.

#### 4.4.1 Volumen im Phasenraum

(ARNOLD) Hier beweisen wir

**Satz 10** (Satz von Liouville). *Der Phasenraumfluss  $\phi^t : \mathbf{X}(0) \rightarrow \mathbf{X}(t)$  im Phasenraum  $\Gamma$  ist volumentreu: Für jedes Gebiet  $D \in \Gamma$  gilt*

$$\text{vol}(\phi^t D) = \text{vol}(D). \quad (4.47)$$

Wir beweisen wie ARNOLD zunächst ein etwas allgemeineres, nützliches Theorem:

**Satz 11.** *Sei*

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n) \quad (4.48)$$

*ein System von  $n$  gewöhnlichen DGL erster Ordnung. Sei  $g^t$  die 'Lösungsabbildung',*

$$g^t : \mathbf{X}(0) \rightarrow \mathbf{X}(t), \quad g^t \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(0) + \mathbf{f}(\mathbf{X}(0))t + O(t^2), \quad t \rightarrow 0. \quad (4.49)$$

*Dann gilt: Falls  $\text{div } \mathbf{f} = 0$  überall, dann erhält  $g^t$  das Volumen  $v(t)$  eines Gebietes  $D$  im Raum der  $\mathbf{X}$ , d.h.*

$$v(t) \equiv \text{vol}(g^t D) = \text{vol}(D) \equiv v(0). \quad (4.50)$$

Der Beweis erfolgt in drei Schritten:

1. Das Volumen  $v(t)$  berechnet sich mit Hilfe der Transformationsformel für Volumenintegrale,

$$v(t) = \int_{g^t D} d\mathbf{X} = \int_D \det \frac{\partial g^t \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X}. \quad (4.51)$$

Hierbei tritt die **Jacobi-Determinante** der Transformation auf, genau wie bei Koordinatentransformationen in Volumenintegralen (EXTRA ABSCHNITT ALS ERGÄNZUNG?). Die Ableitung  $\frac{\partial g^t \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}}$  ist hier eine kompakte Schreibweise für die Matrix

$$\frac{\partial g^t \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{X} + \mathbf{f}(\mathbf{X})t + O(t^2)) = E + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}} t + O(t^2), \quad t \rightarrow 0. \quad (4.52)$$

mit der  $n \times n$  Einheits-Matrix  $E$ .

2. Für eine  $n \times n$  Matrix  $A_{ij}$  gilt

$$\det(E + At) = 1 + t \operatorname{Tr} A + O(t^2), \quad t \rightarrow 0, \quad (4.53)$$

wobei  $\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^n A_{ii}$  die **Spur** (Summe der Diagonalelemente) der Matrix  $A$  ist. Das folgt durch direktes Entwickeln der Determinante  $\det(E + At)$  (AUFGABE).

3. Damit hat man

$$\begin{aligned} \det \frac{\partial g^t \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} &= \det \left( E + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}} t + O(t^2) \right) = 1 + t \operatorname{Tr} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}} + O(t^2) \\ &= 1 + t \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} + O(t^2) = 1 + t \operatorname{div} \mathbf{f} + O(t^2), \quad t \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Wegen  $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$  ändert sich das Volumen zur Zeit  $t = 0$  also nicht,

$$\left. \frac{d}{dt} v(t) \right|_{t=0} = \int_{D(0)} \operatorname{div} \mathbf{f} d\mathbf{X} = 0. \quad (4.55)$$

Entsprechend zu einer späteren Zeit  $t_0 > 0$ ,

$$\left. \frac{d}{dt} v(t) \right|_{t=t_0} = \int_{D(t_0)} \operatorname{div} \mathbf{f} d\mathbf{X} = 0, \quad (4.56)$$

wegen  $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$ : Das Volumen des Gebiets  $D(t)$  ändert sich zeitlich also überhaupt nicht. Damit ist Satz 11 bewiesen.

Für den Beweis des Liouvilleschen Theorems bemerken wir nur, dass für die Hamiltonschen Gleichungen, Gl. (4.38),

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{v}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} \equiv (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (4.57)$$

gilt

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad (4.58)$$

wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen (wir haben hier wieder eine kompakte Schreibweise gewählt). Zusammen mit Satz 11 ist damit das Liouvillesche Theorem bewiesen.

#### 4.4.2 Konstanz der Phasenraumdichte, Kontinuitätsgleichung

(GOLDSTEIN) Wir betrachten nun ein kleines Volumen  $dV$  in der Umgebung eines Punktes  $\mathbf{X}$  im Phasenraum. In diesem Volumen befinden sich eine kleine Anzahl  $dN$  von Systemen des Gesamt-Ensembles. Während der zeitlichen Entwicklung bewegt sich die Umgebung des Punktes  $\mathbf{X}$ , wegen des Satzes von Liouville bleibt ihr Volumen aber zu allen Zeiten konstant. Die Anzahl  $dN$  kann sich während der Zeitentwicklung ebenfalls nicht ändern: sollte einer der Punkte an den Rand des Volumens wandern, muß er wegen der Eindeutigkeit der Lösungen der Hamiltonschen Gleichungen im weiteren Verlauf der Zeitentwicklung am Rand bleiben und kann nicht darüber hinaus wandern. Deshalb gilt

$$\frac{d}{dt}\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = 0, \quad \text{Konstanz der Phasenraumdichte.} \quad (4.59)$$

Wir schreiben diese Aussage in etwas um: Die totale zeitliche Ableitung kann geschrieben werden als

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) &= \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \rho \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left( \rho \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right) - \rho \underbrace{\left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right]}_{\text{div} \mathbf{v} = 0} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= \text{div}(\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Dieses ist die **Kontinuitätsgleichung im Phasenraum**,

$$\text{div}(\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \text{Kontinuitätsgleichung.} \quad (4.61)$$

Hierbei ist die Divergenz die Operation  $\text{div} = \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right)$  sowie

$$\mathbf{v} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \end{pmatrix}, \quad \text{Phasenraum-Geschwindigkeit} \quad (4.62)$$

$$\mathbf{j} \equiv \rho \mathbf{v}, \quad \text{Phasenraum-Stromdichte.} \quad (4.63)$$

Kontinuitätsgleichungen wie Gl. (4.61) treten in vielen Gebieten der Physik auf (Hydrodynamik, Elektrodynamik etc.)

## 4.5 Poisson-Klammern

### 4.5.1 Zeitentwicklung

Wir betrachten die totale zeitliche Änderung einer auf dem Phasenraum  $\Gamma$  definierten Funktion

$$g : \Gamma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \rightarrow g(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad (4.64)$$

entlang einer Kurve (Phasenraumtrajektorie) in  $\Gamma$ . Mit Hilfe der Hamiltonschen Gleichungen findet man

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}g &= \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}}\dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial g}{\partial t} \\ &= \{H, g\} + \frac{\partial g}{\partial t},\end{aligned}\quad (4.65)$$

mit der **Poisson-Klammer**

$$\{f, g\} \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}} \equiv \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} \right), \quad (4.66)$$

die für zwei beliebige Funktionen  $f, g$  im Phasenraum definiert ist. Wir wiederholen die wichtige Aussage

$$\frac{d}{dt}g = \{H, g\} + \frac{\partial g}{\partial t}, \quad \text{Zeitentwicklung mit Poisson-Klammer,} \quad (4.67)$$

da eine völlig analoge Form der Zeitentwicklung später in der Quantenmechanik auftreten wird (Heisenberg-Bild).

Bemerkung: LANDAU definiert die Poisson-Klammer wie in Gl. (4.66), andere Bücher drehen die Reihenfolge in der Definition manchmal um.

#### 4.5.2 Eigenschaften der Poisson-Klammern

Aus ihrer Definition folgt schlicht (mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und Phasenraum-Funktionen  $f, g, h$ )

$$\{f, g\} = -\{g, f\}, \quad \text{Antisymmetrie} \quad (4.68)$$

$$\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha\{f, h\} + \beta\{g, h\}, \quad \text{Linearität} \quad (4.69)$$

$$\{\alpha, f\} = 0 \quad (4.70)$$

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{g, h\}f, \quad \text{Produktregel} \quad (4.71)$$

$$0 = \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}, \quad \text{Jacobi-Identität} \quad (4.72)$$

(nachrechnen als AUFGABE). Entsprechende Regeln gelten später für den **Kommutator**  $[A, B] \equiv AB - BA$  von Matrizen oder Operatoren in der Quantenmechanik. Die obigen Gleichungen definieren eine (nicht-assoziative) mathematische Struktur, die als **Lie-Algebra** bezeichnet wird.

#### 4.5.3 Erhaltungsgrößen

Zunächst gilt:

**Satz 12.** *Eine auf dem Phasenraum  $\Gamma$  definierten Funktion  $g$  ist eine Erhaltungsgröße (Konstante der Bewegung) genau dann, wenn*

$$\{H, g\} + \frac{\partial g}{\partial t} = 0. \quad (4.73)$$

Insbesondere sind Funktionen  $g$ , die nicht explizit von der Zeit abhängen, genau dann Erhaltungsgrößen, wenn  $\{H, g\} = 0$ . Beides folgt natürlich sofort aus Gl. (4.65). Außerdem gilt

**Satz 13** (Poissonsches Theorem). *Sind  $f$  und  $g$  Konstanten der Bewegung, so ist auch ihrer Poisson-Klammer  $\{f, g\}$  eine Konstante der Bewegung.*

Beweis über die Jacobi-Identität,

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \{H, \{f, g\}\} = -\{f, \{g, H\}\} - \{g, \{H, f\}\} = 0, \quad (4.74)$$

da  $\{H, f\} = \{g, H\} = 0$ .

#### 4.5.4 Kanonische Poisson-Klammern

Eine wichtige Rolle spielen die Poisson-Klammern der kanonischen Variablen  $q_k$  und  $p_k$  (generalisierte Orte und generalisierte Impulse),

$$\{p_k, q_l\} = \delta_{kl}, \quad \{q_k, q_l\} = 0, \quad \{p_k, p_l\} = 0. \quad (4.75)$$

Nachzurechnen als AUFGABE. In der Quantenmechanik entsprechen diese Gleichungen direkt den **kanonischen Vertauschungsrelationen** von Ort und Impuls.

AUFGABEN:

1. Leite die Bewegungsgleichungen des harmonischen Oszillators in  $d = 1$  mit Hamiltonfunktion Gl. (4.40) mittels Poisson-Klammern her.
2. Leite die Bewegungsgleichungen eines Teilchens der Masse  $m$  im Potential  $V$  in  $d$  Dimensionen mit Hamiltonfunktion Gl. (4.28) mittels Poisson-Klammern her.

## 4.6 Kanonische Transformationen

Wir beginnen zunächst mit einer speziellen Klasse kanonischer Transformationen, den Punkttransformationen, anhand derer wir auch noch einmal das Hamiltonsche Prinzip wiederholend diskutieren können.

### 4.6.1 Punkttransformationen

Aus dem Hamiltonschen Prinzip der extremalen Wirkung  $\delta S = 0$ , Gl. (2.44), haben wir die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0, \quad \text{Lagrange-Gleichungen 2. Art} \quad (4.76)$$

für die Lagrange-Funktion  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  hergeleitet. Lagrange II gilt für beliebige verallgemeinerte Koordinaten  $\mathbf{q}$  und nicht nur für kartesische Koordinaten - das ist der entscheidende Vorteil gegenüber Newton, Gl. (1.1). Man kann z.B. für ein gegebenes physikalisches Problem  $L$  in Polarkoordinaten oder in kartesischen Koordinaten aufstellen. Die Lösungskurven des Variationsproblems  $\delta S = 0$  sind aber dieselben, nur jeweils ausgedrückt in anderen Koordinaten: Das ist die Aussage des wichtigen Satzes

**Satz 14** (Punkttransformationen). *Gegeben sei eine **Punkttransformation***

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, t) \quad (4.77)$$

der  $f$  verallgemeinerten Koordinaten eines mechanischen Systems, d.h. eine (zeitabhängige) und umkehrbare Transformation der  $\mathbf{q}$  in neue Koordinaten  $\mathbf{Q}$ . Die Lagrange-Funktion  $L$  gehe dabei über in

$$L'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) \equiv L(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, t), \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t), t) \quad (4.78)$$

Dann gilt

$$\delta S[L] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0 \leftrightarrow \delta S[L'] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = 0, \quad (4.79)$$

und die zugehörigen Lagrange-Gleichungen 2. Art sind **forminvariant**, d.h.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{\mathbf{Q}}} - \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{Q}} = 0. \quad (4.80)$$

Damit ist sichergestellt, dass man ein und dieselbe Physik in unterschiedlichen Koordinaten beschreiben kann. Der Beweis erfolgt wieder durch exzessiven Gebrauch der Kettenregel,

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{\mathbf{Q}}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{\mathbf{Q}}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}}, \quad \text{Kürzen von Punkten} \quad (4.81)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \mathbf{Q}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{Q}} \quad (4.82)$$

Daraus folgt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{\mathbf{Q}}} - \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{Q}} = \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right] \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left[ \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{Q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}} \right] = 0, \quad (4.83)$$

denn der erste Term verschwindet wegen Lagrange II für  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ , und der zweite Term wegen  $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{Q}}$ . Die Rechnung geht natürlich entsprechend, wenn man von Lagrange II für  $L'$  startet, um Lagrange II für  $L$  herzuleiten. Da die Lagrange-Gleichungen 2. Art äquivalent zum Hamiltonschen Prinzip in den jeweiligen Koordinaten sind, ist die Forminvarianz gezeigt. Ende des Beweises.

Als Bemerkung schliessen wir an, dass die *Punkttransformationen*  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t)$  nicht mit den *Eichtransformationen*

$$L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) = L'(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) + \frac{d}{dt} M(\mathbf{q}(t), t), \quad \text{Eichtransformation,} \quad (4.84)$$

vgl. Kap. 2.3.4, verwechselt werden dürfen! Bei den Eichtransformationen addiert man eine Ableitung auf die Lagrangefunktion, um eine neue Lagrangefunktion (in denselben Koordinaten) zu erhalten.

## AUFGABEN:

1. Man mache sich noch einmal die einzelne Rechenschritte klar, insbesondere das ‘Kürzen von Punkten’ und die kompakte ‘Vektornotation’.
2. Ein Teilchen der Masse  $m$  bewege sich auf einem Kreis ohne weitere äußere Kräfte. Leite zwei äquivalente Formen von Lagrange-Funktionen mit den entsprechenden Lagrange-Gleichungen her, und zwar einmal mit Hilfe einer Winkelkoordinate  $\phi$  und einmal mit einer kartesischen Koordinate  $x$ .
3. Diskutiere, inwiefern es im Hamiltonschen Prinzip für das Wirkungsfunktional  $S = \int_{t_1}^{t_2} dt L$  des Teilchens auf dem Kreis mehrere Extremwerte gibt.

## 4.6.2 Variationsprinzip für die Hamiltonschen Gleichungen

(REBHAN) Wie die Lagrange-Gleichungen aus dem Hamiltonschen Prinzip  $\delta S[\mathbf{q}] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L = 0$ , Gl. (2.44), so können auch die Hamiltonschen Gleichungen direkt einem Variationsprinzip hergeleitet werden (ohne den Umweg über die Legendre-Transformation). Wie beim Hamiltonschen Prinzip gilt hier allerdings, salopp gesagt, ‘nachher ist man immer klüger’, d.h. man hat keine eigentliche ‘Herleitung’ im engeren Sinne, sondern gewissermaßen eine ‘Nachleitung’.

Wir formulieren

**Satz 15.** *Aus dem Variationsproblem*

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt L_H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0, \quad \delta \mathbf{q}(t_1) = \delta \mathbf{q}(t_2) = 0, \quad \delta \mathbf{p}(t_1) = \delta \mathbf{p}(t_2) = 0 \quad (4.85)$$

$$L_H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}, t) \equiv \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad \text{keine Legendre-Trafo,} \quad (4.86)$$

wobei in  $L_H$  alle Variablen unabhängig sind, folgen die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

Hierbei beachte man, dass  $L_H$  hier *nicht* die Legendre-Transformierte von  $H$  ist, da die  $\dot{\mathbf{q}}$  als eigenständige Variablen nicht nach den  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$  aufgelöst werden. Der Beweis ist einfach eine Anwendung unseres allgemeinen Variationstheorems, Gl. (2): die zu  $\delta \int_{t_1}^{t_2} dt L_H = 0$  gehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen lauten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_H}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L_H}{\partial \mathbf{q}} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L_H}{\partial \dot{\mathbf{p}}} - \frac{\partial L_H}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (4.87)$$

Das liefert mit  $L_H = \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - H$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad 0 = \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad (4.88)$$

also die Hamiltonschen Gleichungen Gl. (4.18).

Bemerkung: wie schon beim Hamiltonschen Prinzip  $\delta S[\mathbf{q}] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L = 0$  kann es mehrere Kurven (Lösungen) mit festen Randpunkten geben, für die  $\int_{t_1}^{t_2} dt L_H$  extremal wird.

### 4.6.3 Definition der kanonischen Transformationen

Wir kommen jetzt zu einem zentralen Punkt des gesamten Hamiltonschen Formalismus: den kanonischen Transformationen. Die Grundidee hierbei ist die völlige Gleichwertigkeit von (generalisierten) Orts- und Impuls-Koordinaten. Deshalb sollen Transformationen jetzt nicht nur auf Ortskoordinaten (Punkttransformationen) beschränkt bleiben, sondern man möchte beliebig innerhalb der Gesamtheit der Orts- und Impuls-Koordinaten, d.h. im Phasenraum  $\Gamma$ , hin- und hertransformieren. Insbesondere soll es auch erlaubt sein, Ortskoordinaten in Impulskoordinaten zu transformieren und umgekehrt.

Das erinnert ein wenig an einen Dialog zweier Studenten:

STUDENT 1: Was ist denn der Vorteil von diesem C++ ?

STUDENT 2: Das ist gegenüber C und anderen Sprachen wohl extrem flexibel. Du kannst damit alle möglichen Sachen machen, du kannst Dir damit sogar den Boden unter den eigenen Füßen wegziehen...

STUDENT 1: Geil!

Wir definieren zunächst (REBHAN)

**Definition** Umkehrbare Transformationen

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad (4.89)$$

welche die Hamiltonsche Form der Bewegungsgleichungen mit einer zu den  $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$  gehörigen Hamiltonfunktion  $K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$  invariant lassen,

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{P}}, \quad \dot{\mathbf{P}} = -\frac{\partial K}{\partial \mathbf{Q}}, \quad (4.90)$$

heißen **kanonische Transformationen**.

Jetzt gilt

**Satz 16.** *Eine Transformation*

$$\mathbf{q}, \mathbf{p}, H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \rightarrow \mathbf{Q}, \mathbf{P}, K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \quad (4.91)$$

ist kanonisch, wenn  $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  und  $\mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  die **erzeugende Gleichung**

$$L_H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L_K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \dot{\mathbf{Q}}, t) + \frac{d}{dt}F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \quad (4.92)$$

$$L_H \equiv \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad L_K \equiv \mathbf{P}\dot{\mathbf{Q}} - K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \quad (4.93)$$

mit der **erzeugenden Funktion**  $F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$  erfüllen.

Hierbei sind  $L_H$  und  $L_K$  *keine* Legendre-Transformierte von  $H$  bzw.  $K$ , sondern wieder ‘erweiterte’ Lagrange-Funktionen. Die  $L_H$  und  $L_K$  sind hier (wie bei dem Variationsproblem für die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen oben) nur Hilfsgrößen und haben im Gegensatz zu den Lagrange- und Hamiltonfunktionen der Mechanik eigentlich keine weitere Bedeutung (soweit ich sehe).

Zum Beweis: Es gilt mit den Randbedingungen  $\delta\mathbf{q}(t_1) = \delta\mathbf{q}(t_2) = \delta\mathbf{p}(t_1) = \delta\mathbf{p}(t_2) = 0$  sowie  $\delta\mathbf{Q}(t_1) = \delta\mathbf{Q}(t_2) = \delta\mathbf{P}(t_1) = \delta\mathbf{P}(t_2) = 0$ ,

$$\begin{aligned}\delta \int_{t_1}^{t_2} dt L_H &= 0 \rightsquigarrow \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, & \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \\ \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L_K &= 0 \rightsquigarrow \dot{\mathbf{Q}} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{P}}, & \dot{\mathbf{P}} &= -\frac{\partial K}{\partial \mathbf{Q}}.\end{aligned}\quad (4.94)$$

$L_H$  und  $L_K$  unterscheiden sich aber nur um eine totale zeitliche Ableitung, die bei der Variation wegfällt, da an den Rändern die  $\delta\mathbf{q}, \delta\mathbf{p}, \delta\mathbf{Q}, \delta\mathbf{P}$  verschwinden, es gilt also  $\delta \int_{t_1}^{t_2} dt L_H = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L_K$  und deshalb folgt aus dem Verschwinden der Variation im ‘ $\mathbf{q}$ - $\mathbf{p}$ -Bild’ das Verschwinden der Variation im ‘ $\mathbf{Q}$ - $\mathbf{P}$ -Bild’. Weiterhin gilt

$$\delta\mathbf{Q} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} \delta\mathbf{q} + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}} \delta\mathbf{p}, \quad \delta\mathbf{P} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} \delta\mathbf{q} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} \delta\mathbf{p}, \quad (4.95)$$

und aus  $\delta\mathbf{q} = 0, \delta\mathbf{p} = 0$  an den Rändern folgt deshalb  $\delta\mathbf{Q} = 0, \delta\mathbf{P} = 0$  an den Rändern und umgekehrt wegen der Umkehrbarkeit der Transformation. Ende des Beweises.

Eine kanonische Transformation involviert  $2f$  Transformationsgleichungen

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t). \quad (4.96)$$

Deshalb sind in der erzeugenden Gleichung

$$\mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{P}\dot{\mathbf{Q}} - K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) + \frac{d}{dt}F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \quad (4.97)$$

in der erzeugenden Funktion  $F$  in Wirklichkeit nur  $2f + 1$  Variablen unabhängig.

#### 4.6.3.1 $F_1$ : Auflösen nach $\mathbf{q}$ und $\mathbf{Q}$

Wir fassen in den Transformationsgleichungen Gl. (4.96) die alten und die neuen *Ortsvariablen*,  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{Q}$ , als  $2f$  unabhängige Variablen auf. Dazu lösen wir  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  nach  $\mathbf{p}$  auf, welches wir in  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  einsetzen. Die erzeugende Funktion  $F$  ist dann eine Funktion von  $\mathbf{q}, \mathbf{Q}$  und  $t$ ,

$$F = F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t). \quad (4.98)$$

Die erzeugende Gleichung lauten dann explizit, geschrieben als Differential (LANDAU)

$$dF_1 = \mathbf{p}d\mathbf{q} - \mathbf{P}d\mathbf{Q} + (K - H)dt, \quad (4.99)$$

was erfüllt ist, wenn

$$\mathbf{p} = \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{P} = -\frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{Q}}, \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (4.100)$$

Wir können Gl. (4.100) nun auch als *Definitionsgleichung* für eine durch ein gegebenes  $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$  erzeugte kanonische Transformation auffassen. Wegen der Vertauschbarkeit der Ableitungen gilt weiterhin

$$\left( \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{Q}} \right)^T = -\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}}. \quad (4.101)$$

BEISPIEL:

$$F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) \equiv \mathbf{q}\mathbf{Q} \rightsquigarrow \mathbf{p} = \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}, \quad \mathbf{P} = -\frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{Q}} = -\mathbf{q}, \quad K = H. \quad (4.102)$$

Hier hat man also so einen ‘Spaßvogel’-Fall: Die neuen Impulse sind (minus) die alten Orte, die neuen Orte sind die alten Impulse. Die Transformation ist kanonisch nach Konstruktion. Natürlich ist damit nichts gewonnen - man hat damit kein kompliziertes mechanisches Problem gelöst. Andererseits zeigt sich hier bereits, dass die Trennung zwischen Impuls- und Ortskoordinaten willkürlich wird: Die neuen  $Q$ -Koordinaten müssen z.B. nicht mehr die Bedeutung von Raumkoordinaten haben (LANDAU).

#### 4.6.3.2 $F_2$ : Auflösen nach $\mathbf{q}$ und $\mathbf{P}$

Wir drücken in  $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$  die  $\mathbf{Q}$ -Abhängigkeit durch die Ableitung  $\mathbf{P} = -\frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{Q}}$ , d.h. über eine *Legendre-Transformation* aus,

$$F_2(\mathbf{q}, -\mathbf{P}, t) \equiv -\mathcal{L}_{\mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{P}}[F_1](\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) = -\mathbf{Q}\mathbf{P} + F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) \quad (4.103)$$

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \mathbf{Q}\mathbf{P} + F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t), \quad (4.104)$$

wobei die Minuszeichen einfach wegen der Definition Gl. (4.9) auftreten. Weiterhin wird dieser erzeugenden Funktion  $F_2$  wegen ihrer ungeheueren Wichtigkeit einen weiteren, eigener Name ( $S$ ) gegeben.

Explizit finden wir

$$dS = d(F_1 + \mathbf{Q}\mathbf{P}) = \mathbf{p}d\mathbf{q} + \mathbf{Q}d\mathbf{P} + (K - H)dt. \quad (4.105)$$

Wir erkennen hier die bewährte Eigenschaft der Legendre-Transformation direkt im obigen Differential: die  $\mathbf{Q}$ -Abhängigkeit in  $dF_1$  ist durch eine  $\mathbf{P}$ -Abhängigkeit in  $dF_2 = dS$  ersetzt worden. Für die Ableitungen ergibt sich

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{Q} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{P}}, \quad K = H + \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (4.106)$$

Wiederum wird Gl. (4.106) nun als Definitionsgleichung für eine durch ein gegebenes  $S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$  erzeugte kanonische Transformation aufgefasst. *Diese kanonische Transformation stellt sich nun als außerordentlich wichtig heraus - sie ist die Grundlage*

der *Hamilton-Jacobi-Theorie*. Hier hat man also etwas wirklich Handfestes und keine ‘Spaßvogel’-Physik. Wegen der Vertauschbarkeit der Ableitungen gilt hier weiterhin (NACHPRÜFEN!)

$$\left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{P}}\right)^T = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}}. \quad (4.107)$$

Als wichtiges BEISPIEL für  $F_2$  geben wir die **Punkttransformationen**

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{q}, t)\mathbf{P} \rightsquigarrow \mathbf{Q} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, t), \quad \text{Punkttransformation,} \quad (4.108)$$

die damit also kanonisch sind.

AUFGABE: Berechne für die Punkttransformation  $\mathbf{Q} = (x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$  die ‘alte’ Hamiltonfunktion  $H(p_r, p_\phi)$  in ebenen Polarkoordinaten aus der ‘neuen’ Hamiltonfunktion  $K(p_x, p_y)$  für ein freies Teilchen der Masse  $m$ .

#### 4.6.3.3 $F_3$ : Auflösen nach $\mathbf{p}$ und $\mathbf{Q}$

Jetzt wird in  $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$  die  $\mathbf{q}$ -Abhängigkeit durch die Ableitung  $\mathbf{p} = \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{q}}$ , ausgedrückt, d.h. über eine Legendre-Transformation

$$F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t) \equiv -\mathcal{L}_{\mathbf{q} \leftrightarrow \mathbf{p}}[F_1](\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) = -\mathbf{p}\mathbf{q} + F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) \quad (4.109)$$

$$dF_3 = d(F_1 - \mathbf{p}\mathbf{q}) = -\mathbf{q}d\mathbf{p} - \mathbf{P}d\mathbf{Q} + (K - H)dt \quad (4.110)$$

Für die Ableitungen ergibt sich

$$\mathbf{q} = -\frac{\partial F_3}{\partial \mathbf{p}}, \quad \mathbf{P} = -\frac{\partial F_3}{\partial \mathbf{Q}}, \quad K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}. \quad (4.111)$$

Wiederum wird Gl. (4.111) nun als Definitionsgleichung für eine durch ein gegebenes  $F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t)$  erzeugte kanonische Transformation aufgefasst. Wegen der Vertauschbarkeit der Ableitungen gilt hier weiterhin

$$\left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}}\right)^T = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}}. \quad (4.112)$$

#### 4.6.3.4 $F_4$ : Auflösen nach $\mathbf{p}$ und $\mathbf{P}$

Jetzt werden in  $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$  sowohl die  $\mathbf{q}$ -Abhängigkeit als auch die  $\mathbf{Q}$ -Abhängigkeit durch die Ableitungen  $\mathbf{p} = \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{q}}$  und  $\mathbf{P} = \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{Q}}$  ausgedrückt, d.h. über eine Legendre-Transformation

$$F_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) \equiv -\mathbf{p}\mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{Q} + F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) \quad (4.113)$$

$$dF_4 = d(F_1 - \mathbf{p}\mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{Q}) = -\mathbf{q}d\mathbf{p} + \mathbf{Q}d\mathbf{P} + (K - H)dt \quad (4.114)$$

Für die Ableitungen ergibt sich

$$\mathbf{q} = -\frac{\partial F_4}{\partial \mathbf{p}}, \quad \mathbf{Q} = \frac{\partial F_4}{\partial \mathbf{P}}, \quad K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}. \quad (4.115)$$

Wiederum wird Gl. (4.115) nun als Definitionsgleichung für eine durch ein gegebenes  $f_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t)$  erzeugte kanonische Transformation aufgefasst. Wegen der Vertauschbarkeit der Ableitungen gilt hier weiterhin

$$\left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{P}}\right)^T = -\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}}. \quad (4.116)$$

Die obigen Herleitungen sehen sehr formal aus. Eine starke Analogie besteht zu den verschiedenen Legendre-Transformationen der *inneren Energie*  $U(S, V, N)$  in der Thermodynamik, die auf

$$F = U - TS, \quad \text{Freie Energie} \quad (4.117)$$

$$H = U + pV, \quad \text{Enthalpie} \quad (4.118)$$

$$\Omega = U - TS - \mu N, \quad \text{Großkanonisches Potential} \quad (4.119)$$

$$G = U - TS + pV, \quad \text{Gibbs-Potential} \quad (4.120)$$

führen und in denen jeweils einige der extensiven Größen ( $S$  die Entropie,  $V$  das Volumen,  $N$  die Teilchenzahl) durch (häufig einfacher experimentell zu kontrollierende) intensive Größen ( $p$  der Druck,  $T$  die Temperatur,  $\mu$  das chemische Potential) ersetzt werden. Die obigen Vertauschbarkeitsbedingungen für die zweiten Ableitungen entsprechen den **Maxwell-Relationen** der Thermodynamik, aus denen sich viele nützliche Beziehungen herleiten lassen. Weitere Information siehe mein SKRIPT THERMODYNAMIK oder entsprechende Lehrbücher.

AUFGABE: Der Joule-Thomson-Koeffizient  $\delta$  eines Gases ist definiert als

$$\delta \equiv -\frac{\frac{\partial H}{\partial p}}{C_p} \quad (4.121)$$

mit der spezifischen Wärme  $C_p$ , wobei die Ableitung  $\frac{\partial H}{\partial p}$  bei konstanter Temperatur zu nehmen ist. Zeigen Sie  $\frac{\partial H}{\partial p} = V + T\frac{\partial S}{\partial p}$  (Temperatur  $T$  konstant), und weiter die Maxwell-Relation  $\frac{\partial S}{\partial p} = -\frac{\partial V}{\partial T}$ .

Wie in der Thermodynamik, so ist auch in der Mechanik die Anzahl möglicher Legendre-Transformationen im Prinzip sehr groß, wenn man eine große Anzahl von Variablen hat. Die oben diskutierten Fälle  $F_1, F_2, F_3, F_4$  sind ja nur Spezialfälle insofern, als dass man sich auch 'gemischte' Legendre-Transformationen vorstellen kann, bei denen z.B. nur ein *Teil* der Impulse Legendre-transformiert wird. Die Nützlichkeit einer erzeugenden Funktion  $F$  (eines thermodynamischen Potentials in der Thermodynamik) hängt von der gegebenen Situation ab.

#### 4.6.4 Kanonizität und Symplektische Form $I$

Auf unserem Weg zu den erzeugenden Funktionen  $F_1, F_2, F_3, F_4$  haben wir notwendige Kriterien aufgesammelt, die kanonische Transformationen erfüllen müssen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{Q}}\right)^T &= -\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}}, & \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{P}}\right)^T &= \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} \\ \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}}\right)^T &= \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}}, & \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{P}}\right)^T &= -\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}}. \end{aligned} \quad (4.122)$$

Die Ableitungen hier sind  $f \times f$ -Matrizen, aus denen wir die  $2f \times 2f$ -Jacobi-Matrix der Transformation

$$T \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}} & \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{P}} \\ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{Q}} & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{P}} \end{pmatrix}, \quad T_{ik} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial X_k}. \quad (4.123)$$

konstruieren. Hier gilt der folgende

**Satz 17.** *Ein Transformation  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  ist genau dann kanonisch, wenn die Transformationsmatrix  $T = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}$  symplektisch ist, d.h. wenn gilt*

$$T^T I T = I, \quad I \equiv \begin{pmatrix} 0_f & 1_f \\ -1_f & 0_f \end{pmatrix}. \quad (4.124)$$

Die Matrix  $I$  heißt hierbei die **symplektische Eins**,  $1_f$  bezeichnet die  $f$ -dimensionale Einheitsmatrix. Für die eine Beweisrichtung schreiben wir

$$I^2 = -1_{2f} \rightsquigarrow -I T^T I = -T^{-1} \quad (4.125)$$

und damit

$$\begin{aligned} -I T^T I &= \begin{pmatrix} 0_f & -1_f \\ 1_f & 0_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}}\right)^T & \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{Q}}\right)^T \\ \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{P}}\right)^T & \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{P}}\right)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_f & 1_f \\ -1_f & 0_f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{P}}\right)^T & -\left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{P}}\right)^T \\ -\left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{Q}}\right)^T & \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}}\right)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}} \\ \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.126)$$

Die rechte Seite ist aber gerade die Jacobi-Matrix der inversen Transformation  $T^{-1}$ , also Ende der einen Beweisrichtung. Die andere Beweisrichtung als AUFGABE.

Mit Hilfe der symplektischen Eins  $I$  und unserer Kurznotation  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$  können wir die Poissonklammer elegant umschreiben, vgl. Gl. (4.66),

$$\begin{aligned} \{f, g\} &\equiv \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}} \\ &= -\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}\right) \begin{pmatrix} 0_f & 1_f \\ -1_f & 0_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}} \end{pmatrix} = -\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right)^T I \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (4.127)$$

ganz analog zum Skalarprodukt, nur dass hier die symplektische Matrix  $I$  statt der  $2f$ -dimensionalen Einheitsmatrix in der Mitte steht. Wir beweisen nun

**Satz 18.** *Unter kanonischen Transformationen  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$  bleiben die Poisson-Klammern zweier Funktionen  $f$  und  $g$  invariant,*

$$\{f, g\}_{\mathbf{x}} = \{f, g\}_{\mathbf{y}}. \quad (4.128)$$

Beweis: Es gilt

$$\frac{\partial g}{\partial y_i} = \sum_k \frac{\partial g}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} = \sum_k T_{ki} \frac{\partial g}{\partial x_k} \rightsquigarrow \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}} = T^T \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.129)$$

mit der Transformationsmatrix  $T_{ki} \equiv \frac{\partial x_k}{\partial y_i}$ , vgl. Gl. (4.123). Also gilt wegen  $TIIT^T = I$  (folgt aus  $T^TIT = I$ ) für die Poisson-Klammer bezüglich  $\mathbf{y}$ :

$$\{f, g\}_{\mathbf{y}} = -\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}\right)^T I \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}} = -\frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{x}} TIT^T \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{x}} I \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} = \{f, g\}_{\mathbf{x}}. \quad (4.130)$$

Ende des Beweises. Schließlich gilt noch folgender nützlicher

**Satz 19.** *1. Die kanonischen Poisson-Klammern lassen sich kompakt als*

$$\{x_i, x_j\} = -I_{ij} \quad (4.131)$$

*mit der symplektischen Eins  $I$  und  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$  schreiben.*

*2. Wenn bei einer Transformation  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow \mathbf{X} = (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  die Poissonklammern der Orts- und Impulskoordinaten forminvariant bleiben, d.h.*

$$\{X_i, X_j\}_{\mathbf{X}} = \{X_i, X_j\}_{\mathbf{x}} = -I_{ij}, \quad (4.132)$$

*dann ist die Transformation kanonisch.*

Beweis als AUFGABE.

Weitere AUFGABEN:

1. Infinitesimale kanonische Transformationen.
2. Zeitentwicklung.
3. Kanonische Invarianz des Phasenraum-Volumens.

## 5. DIE HAMILTON-JACOBI-THEORIE

Die Hamilton-Jacobi-Theorie wird neben den drei anderen Formulierungen der Mechanik (Newtonschen, Lagrange, und Hamilton) häufig als vierter, eigenständiger Zugang zur Mechanik aufgefasst und wird deshalb hier in einem eigenen Kapitel dargestellt.

Hamilton-Jacobi ist zunächst eine Anwendung der kanonischen Transformationen, die wir im Hamilton-Formalismus kennen gelernt haben.

### 5.1 Die Hamilton-Jacobi-Gleichung

Aus historischen Gründen wählt man meist die Erzeugende  $S \equiv F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ , die von den alten Koordinaten und den neuen Impulse abhängt, vgl. Gl. (4.106). Die Transformationsgleichungen dort waren

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{Q} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{P}}, \quad K = H + \frac{\partial S}{\partial t}, \quad S = S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t). \quad (5.1)$$

Die Idee ist nun, sich mit der Erzeugenden  $S$  auf eine *neue Hamiltonfunktion*  $K = 0$  zu transformieren, denn dann hat man die Hamiltonschen Gleichungen und damit das mechanische Problem gelöst: es gilt

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{P}} = 0, \quad P_i \text{ zyklisch} \quad (5.2)$$

$$\dot{\mathbf{P}} = -\frac{\partial K}{\partial \mathbf{Q}} = 0, \quad Q_i \text{ zyklisch,} \quad (5.3)$$

wobei in diesem Zusammenhang **zyklisch** bedeutet, dass die Hamiltonfunktion nicht von der entsprechenden Variablen abhängt (Impuls und Ortskoordinaten sind ja bei Hamilton gleichberechtigt und haben i.A. mit physikalischen Impulsen und Orten wenig oder nichts zu tun).

Es gilt dann

$$Q_i = \alpha_i = \text{const}, \quad P_i = \beta_i = \text{const}, \quad i = 1, \dots, f. \quad (5.4)$$

Die  $\alpha_i, \beta_i$  sind also Erhaltungsgrößen und von den Anfangsbedingungen abhängige Integrationskonstanten. Auflösen nach den alten Orts- und Impulskoordinaten gibt nun die Lösung in der Form

$$q_i = q_i(\{\alpha_j\}, \{\beta_j\}, t), \quad p_i = p_i(\{\alpha_j\}, \{\beta_j\}, t). \quad (5.5)$$

Die hierfür zu lösende Gleichung ist  $K = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$ , also ausgeschrieben

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, t\right) = 0, \quad \textbf{Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung.} \quad (5.6)$$

Dieses ist eine *partielle* Differentialgleichung für  $S \equiv S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ , wobei die  $\mathbf{P}$  als konstante Parameter aufgefasst werden. Bevor wir die allgemeine Diskussion beginnen, diskutieren wir ein konkretes Beispiel.

### 5.1.1 Beispiel: harmonischer Oszillator in $d = 1$

(GREINER) Hier ist (vgl. Gl. (4.40))  $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega^2 q^2$ , also

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}m\Omega^2 q^2 = 0. \quad (5.7)$$

Wir machen einen *additiven Separationsansatz*

$$S(q, t) = f(t) + g(q) \rightsquigarrow -\dot{f}(t) = \frac{1}{2m} (g'(q))^2 + \frac{1}{2}m\Omega^2 q^2 = \beta \equiv P, \quad (5.8)$$

wobei die Integrationskonstante  $\beta = P$  aus Dimensionsgründen die Einheit Energie haben muß. Zusammen mit unserem Ansatz versuchen wir, sie mit der neuen konstanten Impulskoordinate  $P$  zu identifizieren. Beide Seiten sind konstant, also folgt

$$f(t) = -P(t - t_0), \quad g'(q) = \sqrt{2mP - (m\Omega q)^2} \rightsquigarrow g(q) = \int dq \sqrt{2mP - (m\Omega q)^2} \quad (5.9)$$

mit der (trivialen) Integrationskonstanten  $t_0$ . Weiterhin gilt für die neue Ortskoordinate  $Q$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\partial S}{\partial P} = -(t - t_0) + \frac{\partial}{\partial P} \int dq \sqrt{2mP - (m\Omega q)^2} \\ &= -(t - t_0) + m \int \frac{dq}{\sqrt{2mP - (m\Omega q)^2}} = -(t - t_0) + \frac{1}{\Omega} \arcsin \sqrt{\frac{m\Omega^2}{2P}} q, \end{aligned} \quad (5.10)$$

sie hat also die physikalische Dimension einer Zeit. Also umgekehrt durch Auflösen

$$q = q(P, Q, t) = \sqrt{\frac{2P}{m\Omega^2}} \sin \Omega(t - t_0 + Q). \quad (5.11)$$

Das ist die bekannte Schwingungslösung des harmonischen Oszillators. Die Bedeutung der kanonisch konjugierten Variablen  $P$  und  $Q$  hier ist:

$$P, \quad \text{Gesamtenergie}; \quad Q, \quad \text{Zeitnullpunkt.} \quad (5.12)$$

### 5.1.2 Beispiel: separierende Hamiltonfunktion

(REBHAN) Ein weiterer Fall ist der eines Systems mit  $f$  Freiheitsgraden, die bereits in der Hamiltonfunktion  $H$  **separieren**, d.h.

$$H = \sum_{i=1}^f H_i(q_i, p_i), \quad (5.13)$$

wobei  $H_i$  die Hamiltonfunktion des  $i$ -ten Freiheitsgrades ist. Ein Beispiel wäre der dreidimensionale Oszillator in kartesischen Koordinaten,

$$H = \sum_{i=1}^3 H_i(q_i, p_i) = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \Omega^2 q_i^2 \right). \quad (5.14)$$

Die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung löst man dann durch einen **Separationsansatz**

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^f H_i \left( q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i} \right) = 0, \quad S = \sum_{i=1}^f S_i(q_i) - Et \quad (5.15)$$

$$\rightsquigarrow \sum_{i=1}^f H_i(q_i, S'_i(q_i)) = E. \quad (5.16)$$

Diese Gleichung wird dann durch den *Ansatz*

$$H_i(q_i, S'_i(q_i)) = E_i, \quad \sum_{i=1}^f E_i = E, \quad i = 1, \dots, f \quad (5.17)$$

gelöst: Das sind dann nämlich schlichtweg  $f$  entkoppelte, *gewöhnliche* Differentialgleichungen für die  $S_i(q_i)$ : Konkret wird, wie beim Beispiel des 1d Oszillators oben, jede dieser Gleichungen nach  $S'_i(q_i)$  aufgelöst und anschliessend integriert, um  $S_i(q_i)$  zu erhalten. Diesen Vorgang bezeichnet man als **Quadratur**. Die Gesamtlösung ist dann

$$S(q_1, \dots, q_f; P_1, \dots, P_f) = \sum_{i=1}^f (S_i(q_i, E_i) - E_i t). \quad (5.18)$$

### 5.1.3 Allgemeiner Fall

Im allgemeinen Fall hängt es auch von der richtigen Koordinatenwahl ab, ob ein gegebenes mechanisches Problem wie oben separierbar und damit lösbar ist. Vollständige Separierbarkeit bedeutet, dass man wie im Beispiel oben das Problem auf einfache Quadraturen (Auflösen von Gleichungen und Integrationen) zurückführen kann. Die dabei auftretenden Integrationskonstanten werden dabei mit den neuen kanonischen Impulse  $P_i$  identifiziert.

### 5.1.4 Die Wirkungsfunktion $S$

(REBHAN) Die Funktion  $S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$  in Gl. (5.6) wird als **Hamiltonsche Wirkungsfunktion** oder **Prinzipalfunktion** bezeichnet. Es gilt der

**Satz 20** (Satz von Jacobi). *Eine vollständige Lösung  $S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$  der Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung  $\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, t\right) = 0$  impliziert eine vollständige Lösung der Hamiltonschen kanonischen Bewegungsgleichungen  $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ ,  $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ .*

Die Lösung kann ja benutzt werden, um über  $Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} \equiv \alpha_i = \text{const}$  die alten Koordinaten in der Form  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$  zu bestimmen. Das ist aber gerade die eine Hälfte der Lösungen der Hamiltonschen kanonischen Bewegungsgleichungen - die andere Hälfte (für die die verallgemeinerten Impulse) folgt aus  $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ . Ende des Beweises.

Das Auflösen in der Form  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$  funktionierte in unserem Beispiel des harmonischen Oszillators in  $d = 1$  sehr gut, wir bekamen die Lösung *global* für alle Zeiten  $t$  und Anfangswerte. Häufig funktioniert dieses Auflösen nur *lokal*, insbesondere bei mehreren Freiheitsgraden.

Die physikalische Bedeutung von  $S$  erschließt sich aus der Betrachtung seiner totalen zeitlichen Ableitung längs einer Lösung  $\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$  zwischen der Zeit  $t_1$  und der Zeit  $t_2$ ,

$$\frac{d}{dt}S = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{P}}\dot{\mathbf{P}} + \frac{\partial S}{\partial t} = \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - H = L, \quad (5.19)$$

also die Lagrange-Funktion, also ist

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L + \text{const}, \quad \text{Wirkungsfunktional.} \quad (5.20)$$

Das ist bis auf die irrelevante Konstante mit dem Wirkungsfunktional ('Wirkungsfunktion') des Hamiltonschen Prinzips identisch!

Wenn die Zeit  $t$  nicht explizit in der Hamiltonfunktion auftritt, kann man wie im Beispiel des Oszillators oben die Zeitabhängigkeit abseparieren,

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = W(\mathbf{q}, \mathbf{P}) - Et, \quad \text{verkürzte Wirkung } W. \quad (5.21)$$

Die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung lautet dann

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}\right) = E. \quad (5.22)$$

(REBHAN) Dieselbe Gleichung erhält man alternativ, in dem man für konservative Systeme, bei denen Energieerhaltung  $H = E = \text{const}$  gilt, eine kanonische Transformation sucht, die nicht alle Variablen, sondern nur die Ortskoordinaten  $Q$  zyklisch macht, d.h. man sucht eine neue Hamiltonfunktion

$$K = K(\mathbf{P}) \rightsquigarrow \dot{\mathbf{P}} = \frac{\partial K(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{Q}} = 0. \quad (5.23)$$

Für die zu bestimmende *zeitunabhängige* Erzeugende  $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = W(\mathbf{q}, \mathbf{P})$  gilt dann wieder wegen  $\mathbf{p} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}$  und  $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$  die ‘verkürzte’ Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}\right) = K(\mathbf{P}). \quad (5.24)$$

Die Zeitentwicklung der neuen Ortskoordinaten  $Q_i$  ist dann linear, denn

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K(\mathbf{P})}{\partial P_i} \equiv \omega_i = \text{const} \rightsquigarrow Q_i = \omega_i t + \beta_i \quad (5.25)$$

mit der Integrationskonstanten  $\beta_i$ . Weiter unten werden wir Fälle betrachten, wo die  $\omega_i$  tatsächlich die Bedeutung von Winkelgeschwindigkeiten und dementsprechend die  $Q_i$  die Bedeutung von Winkelvariablen haben.

## 5.2 Die Eikonal-Gleichung

Wir diskutieren nun den Zusammenhang zwischen der klassischen Mechanik und der geometrischen Optik, was uns bereits sehr nahe an die Quantenmechanik heranführen wird.

### 5.2.1 Geometrische Bedeutung der Wirkung; Wirkungswellen

(GOLDSTEIN; alte Auflage). Die Gleichung  $S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = W(\mathbf{q}, \mathbf{P}) - Et$  hat eine wichtige geometrische Bedeutung. Wir stellen uns die verkürzte Wirkung  $W(\mathbf{q})$  als Fläche über dem Konfigurationsraum der  $\mathbf{q}$  vor, z.B. für zweidimensionales  $\mathbf{q}$  als Fläche  $z = W(\mathbf{q})$  über der  $\mathbf{q}$ -Ebene.  $\mathbf{P}$  ist als konstanter Parameter in der Notation im Folgenden weggelassen. Wir betrachten die Punkte im Konfigurationsraum, auf denen die Wirkung  $S$  konstant ist, d.h. diejenigen  $\mathbf{q}$  mit

$$S(\mathbf{q}, t) = W(\mathbf{q}) - Et = \text{const}. \quad (5.26)$$

Für festes  $t$  werden dadurch Untermannigfaltigkeiten im Konfigurationsraum (Kurven im 2d-Beispiel) definiert. Wegen der Verschiebung  $Et$  wandert die durch  $S(\mathbf{q}, t)$  definierte Fläche (im 2d-Beispiel) als ‘Kopie’ der  $W(\mathbf{q})$ -Fläche in Richtung  $z$ -Achse für wachsende Zeiten  $t$  nach unten (oder oben, je nach Vorzeichen von  $E$ ). Dadurch entstehen im Konfigurationsraum (in der  $\mathbf{q}$ -Ebene im 2d-Beispiel) ‘Wellenfronten’, die wandern.

BEISPIEL:  $W(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^2$  (Paraboloid), die Bedingung  $S(\mathbf{q}, t) = W(\mathbf{q}) - Et = \text{const}$  definiert Kreise um den Ursprung, die nach außen wandern (SKIZZE!)

Die Wandergeschwindigkeit der Wellenfronten berechnen wir so: die ‘Phase’  $S$  ist konstant, also gilt

$$0 = d(W - Et) = dW - E dt \rightsquigarrow \nabla W \dot{\mathbf{q}} = E. \quad (5.27)$$

Der Geschwindigkeitsvektor soll senkrecht auf der Wellenfront stehen, d.h. parallel zum Gradienten  $\nabla W$  sein. Dann ist das Skalarprodukt  $\nabla W \dot{\mathbf{q}} = |\nabla W| |\dot{\mathbf{q}}|$ . Das definiert die

‘Phasengeschwindigkeit’  $c = |\dot{\mathbf{q}}|$  im Punkt  $\mathbf{q}$ , d.h.

$$c(\mathbf{q}) = \frac{E}{|\nabla W(\mathbf{q})|}. \quad (5.28)$$

Die Phasengeschwindigkeit ist umso größer, je flacher die Fläche  $W(\mathbf{q})$  ist; man mache sich das an dem Beispiel  $W(\mathbf{q}) = \alpha \mathbf{q}^2$  für verschiedene  $\alpha > 0$  klar.

Offensichtlich haben wir hier also eine Analogie zu *Wellenphänomenen*, die wir im Folgenden etwas weiter ausbauen wollen. Vorher schreiben wir noch die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung für ein Teilchen der Masse  $m$  im Potential  $V(\mathbf{q})$  hin. Mit der Hamilton-Funktion  $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{q})$  folgt sofort

$$(\nabla W(\mathbf{q}))^2 = 2m(E - V(\mathbf{q})). \quad (5.29)$$

AUFGABE:

1. Berechne, skizziere und interpretiere die verkürzte Wirkung  $W(\mathbf{q})$  eines freien Teilchens der Masse  $m$  in zwei Dimensionen (kartesische Koordinaten). Löse hierzu die (verkürzte) Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung  $H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}\right) = E$  für  $W(\mathbf{q})$ , z.B. durch einen in  $\mathbf{q}$  linearen Ansatz für  $W(\mathbf{q})$ .
2. Berechne und interpretiere dasselbe Problem in zweidimensionalen Polarkoordinaten. Die verkürzte Wirkung  $W$  wird dann eine Funktion  $W(r, \phi)$ . Diskutiere zunächst einen Fall, wo die Winkelabhängigkeit nicht auftritt. Was bedeutet dieser Fall physikalisch (Stichwort: Drehimpuls).
3. Löse das Kepler-Problem mit Hilfe der (verkürzten) Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung.

### 5.2.2 Beispiel: Wirkungswellen an einer Potentialschwelle in $d = 2$

Wir betrachten einen zweidimensionalen Konfigurationsraum mit Hamiltonfunktion

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q} = (x, y), \quad (5.30)$$

d.h. kartesische Koordinaten, und eine **Potentialschwelle**

$$\begin{aligned} V(x, y) &= V_L, & x \leq 0 \\ &= V_R, & x > 0. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Wir lösen die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung  $H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}, \mathbf{P}}\right) = E$  mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} W(\mathbf{q}, \mathbf{P}) &= \mathbf{P}_L \mathbf{q} & x \leq 0 \\ &= \mathbf{P}_R \mathbf{q} & x > 0. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Einsetzen von  $\mathbf{p} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}$  in  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = E$  ergibt

$$\frac{\mathbf{P}_L^2}{2m} = E - V_L, \quad \frac{\mathbf{P}_R^2}{2m} = E - V_R. \quad (5.33)$$

Wegen  $\mathbf{p} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}$  ist  $\mathbf{P}_L$  der tatsächliche mechanische Impuls des Teilchens in der linken Halbebene  $x \leq 0$ , und  $\mathbf{P}_R$  der tatsächliche mechanische Impuls des Teilchens in der rechten Halbebene  $x > 0$ . An der Schwelle des Potential  $x = 0$  erfolgt ein Sprung des Impulsvektors. Das Teilchen bewegt sich also in beiden Halbebenen jeweils entlang einer Geraden, diese Geraden sind bei  $x = 0$  durch einen Knick verbunden. Wir berechnen den Knick durch die Forderung, dass die Wirkungsfunktion  $W(\mathbf{q}, \mathbf{P})$  eine *stetige* Funktion über dem Konfigurationsraum  $\mathbf{q}$  sei, und zwar auch direkt an der Schwelle. Die Stetigkeit an der Schwelle bedeutet

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} W((x - \delta, y), \mathbf{P}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} W((x + \delta, y), \mathbf{P}) \rightsquigarrow P_y^{(L)} = P_y^{(R)}, \quad (5.34)$$

die  $y$ -Komponente des Impulses ändert sich also beim Übergang nicht.

Bezeichnen wir mit  $\alpha_L$  ( $\alpha_R$ ) den Winkel zwischen  $\mathbf{P}_L$  und der  $x$ -Achse (die ja senkrecht zur Schwelle steht, SKIZZE), so folgt unmittelbar aus der Definition des Sinus mit  $\sin \alpha_L = P_y^{(L)} / |\mathbf{P}_L|$  und  $\sin \alpha_R = P_y^{(R)} / |\mathbf{P}_R|$  der Zusammenhang

$$\frac{\sin \alpha_L}{\sin \alpha_R} = \frac{|\mathbf{P}_R|}{|\mathbf{P}_L|} = \frac{\sqrt{E - V_R}}{\sqrt{E - V_L}}. \quad (5.35)$$

Das ist völlig analog zum **Brechungsgesetz von Snell** (Snellius) aus der geometrischen Optik! Vgl. z.B. JACKSON (Klassische Elektrodynamik).

AUFGABE: Man skizziere die Funktion  $W(\mathbf{q})$  bzw. baue sich ein kleines Modell (z.B. aus Papier)! Man diskutiere die ‘Wirkungswellen’ in diesem Beispiel.

### 5.2.3 Das Eikonal in der Optik

Unser Exkurs in die Optik startet von der skalaren Wellengleichung

$$\Delta u(\mathbf{q}, t) - \frac{n^2(\mathbf{q})}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(\mathbf{q}, t) = 0, \quad (5.36)$$

wo  $u(\mathbf{q}, t)$  z.B. eine elektrische Feldamplitude beschreibt. Hierbei ist  $\Delta$  der **Laplace-Operator**  $\Delta = \text{grad div}$ , in kartesischen Koordinaten z.B.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (5.37)$$

Polarisationseffekte etc. sind hier nicht berücksichtigt. Außerdem ist  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und  $n(\mathbf{q})$  der **Brechungsindex**, der i. A. ortsabhängig ist (eine Zeitabhängigkeit wird hier nicht betrachtet).

Für  $n(\mathbf{q}) = n = \text{const}$  hat die Wellengleichung *ebene Wellen* als Lösung in der Form

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}, t) = u_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{q} - \omega t)}, \quad |\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\omega}{c} \quad (5.38)$$

mit dem **Wellenvektor**  $\mathbf{k}$  und der Wellenlänge  $\lambda$ . Wie bei der Fourieranalyse (MM) können Lösungen  $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}, t)$  überlagert werden (**Superposition**) und ergeben wieder Lösungen der Wellengleichung.

Jetzt nehmen wir einen ortsabhängigen Brechungsindex  $n(\mathbf{q})$  an: die Wellengleichung ist dann nicht mehr exakt lösbar. Wir können jedoch einen Näherungsansatz

$$u(\mathbf{q}, t) = e^{A(\mathbf{q}) + i(k_0 L(\mathbf{q}) - \omega t)}, \quad k_0 = |\mathbf{k}_0| = \frac{\omega}{c}, \quad (5.39)$$

wobei  $\mathbf{k}_0$  die Richtung der Welle vorgibt und  $A(\mathbf{q})$  die Amplitude parametrisiert. Für  $n(\mathbf{q}) = n = \text{const}$  hat man wieder

$$k_0 L(\mathbf{q}) = n \mathbf{k}_0 \mathbf{q}, \quad n = \text{const}, \quad (5.40)$$

also

$$L(\mathbf{q}) = n \frac{\mathbf{k}_0}{k_0} \mathbf{q}, \quad \text{optische Weglänge (Eikonal), } n = \text{const}. \quad (5.41)$$

Für  $n(\mathbf{q}) \neq \text{const}$  liefert Einsetzen von Gl. (5.39) in die Wellengleichung (AUFGABE) die Differentialgleichung

$$\Delta A + (\nabla A)^2 + k_0^2 [n(\mathbf{q})^2 - (\nabla L(\mathbf{q}))^2] = 0. \quad (5.42)$$

Jetzt kommt die entscheidende Näherung (denn bis hier war alles noch exakt): Wir nehmen an, dass die Wellenlänge  $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}$  im Vakuum klein ist im Vergleich zu der Längenskala, auf der sich die Amplituden  $\nabla A$  beim Durchgang durch das Medium ändern. Dann können wir die Terme  $\Delta A + (\nabla A)^2$  vernachlässigen und bekommen

$$(\nabla L(\mathbf{q}))^2 = n(\mathbf{q})^2, \quad \text{Eikonal-Gleichung.} \quad (5.43)$$

Diese Gleichung ist eine gute Approximation der Wellengleichung im *Grenzfall der geometrischen Optik*, der also durch den Fall *kleiner Wellenlängen* (im Vergleich zu anderen Abmessungen im System) definiert ist.

#### 5.2.4 Klassische Mechanik als Grenzfall einer Wellenmechanik

Wir betrachten folgende Analogie zwischen der klassischen Mechanik eines Teilchens im Potential  $V(\mathbf{q})$  und einem Lichtstrahl in der geometrischen Optik:

$$\begin{aligned} (\nabla W(\mathbf{q}))^2 &= 2m(E - V(\mathbf{q})), & \text{Mechanik: verkürzte Wirkung } W. \\ (\nabla L(\mathbf{q}))^2 &= n(\mathbf{q})^2, & \text{Optik: Eikonal } L. \\ W(\mathbf{q}) - Et &= \text{const}, & \text{Mechanik: Wellenfronten der Wirkung } S = W - Et. \\ L(\mathbf{q}) - \frac{\omega}{k_0} t &= \text{const}, & \text{Optik: Wellenfronten der Phase } k_0 L(\mathbf{q}) - \omega t. \\ W(\mathbf{q}) &= \mathbf{kq}, & \text{Mechanik: } W \text{ für freies Teilchen } V = 0. \\ L(\mathbf{q}) &= \mathbf{kq}, & \text{Optik: } L \text{ für freien Lichtstrahl } n = 1. \end{aligned} \quad (5.44)$$

AUFGABE: Überprüfe die Aussage  $W(\mathbf{q}) = \mathbf{kq}$  mit  $\mathbf{k} = \text{const}$  für ein freies Teilchen  $V = 0$  in der Mechanik.

Da die geometrische Optik der Grenzfall einer Wellentheorie des Lichts ist, kann man jetzt vermuten, dass analog die klassische Mechanik der Grenzfall einer Wellentheorie ist. Diese Wellentheorie ist natürlich die Quantenmechanik. Weiter verstärkt wird diese Analogie durch den Vergleich der Extremalprinzipien in der Mechanik und der Optik:

### 5.2.5 Prinzip von Maupertuis. Prinzip von Fermat

Das Prinzip von Maupertuis diskutieren wir hier nur im dreidimensionalen Konfigurationsraum mit kartesischen Koordinaten  $\mathbf{r}$  (CORINALDESI, ‘Classical Mechanics for Physics Graduate Students’, World Scientific): Seien für ein konservatives System mit Hamiltonfunktion

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \quad (5.45)$$

(Teilchen der Masse  $m$  im Potential  $V(\mathbf{r})$ ) zwei Punkte  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$  fest vorgegeben und

$$W(\mathbf{r}, E) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}} \mathbf{p}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad |\mathbf{p}(\mathbf{r})| = |\nabla W| = \sqrt{2m[E - V(\mathbf{r})]} \quad (5.46)$$

die (verkürzte) Wirkung als Funktion des Endpunkts  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$  der Trajektorie des Teilchens. Es ist also  $\frac{\partial W}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{p}$ , d.h. das Integral ist wegunabhängig entlang jeder möglichen Trajektorie. Allerdings gilt entlang der wirklichen (physikalischen) Trajektorie für den Impuls  $\mathbf{p}(\mathbf{r}) = m\dot{\mathbf{r}}$ , also  $\mathbf{p}d\mathbf{r} = |\mathbf{p}||d\mathbf{r}|$ , d.h.  $\mathbf{p}$  und  $\dot{\mathbf{r}}$  sind immer parallel: die Trajektorie des Teilchens verläuft senkrecht zu den Äquipotentiallinien der Wirkung  $W$ . Entlang einer beliebigen Vergleichskurve gilt das aber nicht mehr (SKIZZE);

$$\mathbf{p}d\mathbf{r} = |\nabla W||d\mathbf{r}| \cos \theta \leq |\nabla W||d\mathbf{r}|, \quad (5.47)$$

d.h. entlang aller Vergleichkurven ist das Wegintegral  $\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}} |\nabla W||d\mathbf{r}'|$  immer größer als entlang der wirklichen Trajektorie. Man beachte, dass hier über  $|\nabla W|$  und nicht  $\nabla W$  integriert wird. Deshalb gilt

**Satz 21** (Variationsprinzip von Maupertuis). *Unter allen Bahnen gleicher Energie  $E$  mit festem Anfangs- und Endpunkt nimmt die verkürzte Wirkung  $W \equiv \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \sqrt{2m[E - V(\mathbf{r})]} d\mathbf{r}$  für die tatsächliche Bahn ein Minimum an.*

Explizit ausgeschrieben lautet das Variationsprinzip von Maupertuis also

$$\delta \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \sqrt{2m[E - V(\mathbf{r})]} |d\mathbf{r}| = 0. \quad (5.48)$$

Man beachte, dass hier im Gegensatz zum Hamiltonschen Variationsprinzip nur die Endpunkte der *Bahn* und nicht noch die Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  festgehalten werden. Insbesondere hat hier also das Teilchen bei fester Anfangszeit  $t_1$  beliebig viel Zeit, um bei fester Energie  $E$  nach  $\mathbf{r}_2$  zu gelangen. Bei Maupertuis wird also die Bahnkurve als *geometrisches Objekt* gesucht und nicht die Trajektorie als Funktion der Zeit. Beim Hamiltonschen Variationsprinzip ist dagegen die Zeit  $t_2$  fest, und das Teilchen ‘wählt’ die entsprechende Energie  $E$  entsprechend, um in der Zeitspanne  $t_2 - t_1$  nach  $\mathbf{r}_2$  zu gelangen. In den meisten Mechanikbüchern wird das Prinzip von Maupertuis (wenn überhaupt) über eine zusätzliche Variation der Endzeit  $t_2$  hergeleitet (z.B. LANDAU oder REBHAN) bzw. durch ‘Umdefinition’ des Variationssymbols  $\delta \rightarrow \Delta$  (GOLDSTEIN); diese etwas

fragwürdigen Konstruktionen wollten wir hier vermeiden. ARNOLD gibt eine wohl saubere Herleitung, die aber auf Differentialformen basiert und etwas mehr mathematische Maschinerie voraussetzt.

Das Prinzip von Fermat ist nun ganz analog dem Prinzip von Maupertuis, es lautet

$$\delta \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} n(\mathbf{r}) |d\mathbf{r}| = 0, \quad \text{Prinzip von Fermat.} \quad (5.49)$$

Wiederum sehen wir die Analogie zwischen dem optischen Brechungsindex  $n(\mathbf{r})$  (Fermat) und dem mechanischen Ausdruck  $\sqrt{2m[E - V(\mathbf{r})]}$  (Maupertuis), vgl. oben.

### 5.3 Wirkungs- und Winkelvariablen

Im Folgenden betrachten wir konservative Systeme mit  $H = E$  ( $E$  ist die Gesamtenergie) und periodische Bewegungen. UNTERSCHIEDUNG Libration, Rotation.

#### 5.3.1 Periodische Bewegung in einer Dimension

Die Bewegung in einer Dimension haben wir schon früher behandelt, vgl. Gl. (2.34). Hier ist die Hamiltonfunktion von der Form

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (5.50)$$

mit dem Potential  $V(q)$ . Aus den zwei Hamiltonschen Gleichungen  $\dot{q} = \frac{p}{m}$ ,  $\dot{p} = -V'(q)$  nimmt man nur die erste und setzt sie in  $H = E$  ein, woraus sofort

$$E \equiv \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + V(q) \rightsquigarrow t - t_0 = \int_{q_0}^q \frac{dq'}{\sqrt{2[E - V(q')]/m}} \quad (5.51)$$

folgt.

Alternativ und im Rahmen von Hamilton-Jacobi löst man dieses Problem über die verkürzte Wirkung  $W(q, P)$  durch

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{\partial W(q, P)}{\partial q}\right)^2}{2m} + V(q) &= E \equiv P = \text{const} \rightsquigarrow W(q, P) = \int_{q_0}^q \sqrt{2m[E - V(q')]} dq' \\ Q(q, P) &= \frac{\partial W(q, P)}{\partial P} = \int_{q_0}^q \frac{dq'}{\sqrt{2[P - V(q')]/m}}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Hier ist die neue 'Impulsvariable'  $P$  also die Energie  $E$ ; die kanonisch konjugierte neue Ortsvariable  $Q$  ist die Zeit  $t - t_0$ .

Wir nehmen nun eine periodische Bewegung zwischen den zwei Umkehrpunkten  $q_-$  und  $q_+$  an (SKIZZE). Die Bewegung starte z.B. zur Zeit  $t_0 = 0$  bei  $q_-$  und läuft dann bis zu  $q_+$  und schließlich wieder zurück zu  $q_-$ . Die zugehörige **Periode**  $\tau$  ist dann durch

$$\tau = \tau(E) = 2 \int_{q_-}^{q_+} \frac{dq'}{\sqrt{2[E - V(q')]/m}} = \frac{\partial}{\partial E} 2 \int_{q_-}^{q_+} dq' \sqrt{2m[E - V(q')]} \quad (5.53)$$

gegeben. Der Integrand ist nichts anderes als der Impuls  $p(q, E)$ , den man durch Auflösen von

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (5.54)$$

erhält. Es gibt natürlich zwei Lösungen  $p = \pm \sqrt{2m[E - V(q)]}$ ; die negative Lösung in Gl. (5.53) trägt bei der Rück-Bewegung von  $q_+$  nach  $q_-$  wegen der ‘Rückwärtsintegration’ genauso viel wie die positive Lösung zur Hin-Bewegung von  $q_-$  nach  $q_+$  bei, was durch den Faktor 2 vor dem Integral berücksichtigt wird. Formal kann man das Integral (inklusive der 2) im Ausdruck Gl. (5.53) für die Periode also als *geschlossenes Kurvenintegral* schreiben, d.h.

$$\tau(E) = \frac{\partial}{\partial E} \oint p(q, E) dq. \quad (5.55)$$

Damit haben wir den

**Satz 22.** *Die Periode einer eindimensionalen Bewegung lässt sich durch die Ableitung eines **Wirkungsintegrals**  $\oint p(q, E) dq$  nach der Energie  $E$  berechnen.*

Das ist insofern sehr praktisch, als dass man hierfür keine Differentialgleichung für die Bewegung  $q(t)$  zu lösen braucht - man hat einen expliziten, geschlossenen Ausdruck. Allerdings ist die Berechnung des Integrals Gl. (5.53) in den meisten Fällen nicht analytisch möglich.

AUFGABE:

1. Berechne die Periode für das Potential  $V(q) = \frac{1}{2}kq^2$ .
2. Berechne die Periode für das Potential  $V(q) = \frac{1}{2}kq^2 + \alpha q^4$  mit  $\alpha > 0$  näherungsweise durch Taylorentwicklung für kleine  $\alpha$ .

### 5.3.2 Die Wirkung als Kanonische Variable

Bei Problemen mit mehr als  $f = 1$  Freiheitsgraden (z.B. beim Kepler-Problem) führt die Separation der Hamilton-Jacobi-Gleichung, ‘wenn man Glück hat’, auf mehrere unabhängige, periodische Bewegungen im Phasenraum (das wird später mit einem Theorem von Liouville präzisiert). Wir nehmen das zunächst als Motivation, unser Ergebnis Gl. (5.53) für die Periode  $\tau(E)$  etwas allgemeiner zu formulieren, und zwar im Rahmen der Hamilton-Jacobi-Theorie. Wir bleiben zunächst bei  $f = 1$  Freiheitsgrad.

Die Idee besteht darin, eine kanonische Transformation  $q, p, H(q, p) = E \rightarrow Q, P, K(P)$  so zu konstruieren, dass die neue ‘Impulsordinate’

$$P \equiv J \equiv \frac{1}{2\pi} \oint p(q, E) dq, \quad \text{Wirkungsvariable} \quad (5.56)$$

das Wirkungsintegral, d.h. ein Flächenintegral im Impulsraum, wird. Da  $E$  konstant ist, ist dann natürlich ebenfalls  $J = J(E)$  konstant. Die neue Hamiltonfunktion  $K(P)$  soll einfach die Energie  $E(J)$  als Umkehrfunktion von  $J(E)$ , d.h. die Energie als Funktion der Wirkungsvariablen  $J$  werden.

Die gesuchte Transformation  $q, p, H(q, p) = E \rightarrow Q, J, E(J)$  wird durch die verkürzte Wirkung  $W(q, J)$  erzeugt. Die zugehörige neue ‘Ortsvariable’  $Q$  erhält man aus

$$Q(q, J) \equiv \phi \equiv \frac{\partial W(q, J)}{\partial J}, \quad (5.57)$$

sie muss die kanonische Poissonklammer

$$\{P, Q\} = 1 \quad (5.58)$$

erfüllen, vgl. Gl. (4.75). Wir überprüfen, dass die Bezeichnung von  $Q$  als **Winkelvariable**  $\phi$  tatsächlich gerechtfertigt ist (GOLDSTEIN): Dazu integrieren wir  $Q(q, J) \equiv \phi$  über einen kompletten Zyklus der Bewegung, d.h. wie im Beispiel oben von  $q_-$  nach  $q_+$  zurück nach  $q_-$ , und berechnen die Änderung  $\Delta\phi$  von  $\phi$ ,

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \oint \frac{\partial\phi}{\partial q} dq = \oint \frac{\partial^2 W(q, J)}{\partial q \partial J} dq = \frac{\partial}{\partial J} \oint \frac{\partial W(q, J)}{\partial q} dq \\ &= \frac{\partial}{\partial J} \oint p(q, E(J)) dq = \frac{\partial}{\partial J} 2\pi J = 2\pi, \end{aligned} \quad (5.59)$$

wobei wir den alten Impuls durch  $p = \frac{\partial W}{\partial q}$  ausgedrückt haben. Die Winkelvariable  $\phi$  ändert sich über einen kompletten Zyklus der Bewegung also tatsächlich um den Wert  $2\pi$ , wie es sich gehört.

Die Bewegungsgleichung für diese neue Winkelvariable  $\phi(t)$  als Funktion der Zeit  $t$  folgt aus den neuen Hamiltonschen Gleichungen,

$$\dot{\phi} = \frac{\partial K(J)}{\partial J}, \quad \dot{J} = -\frac{\partial K(J)}{\partial \phi} \rightsquigarrow \phi(t) = \left( \frac{\partial E(J)}{\partial J} \right) t + \phi_0, \quad J = \text{const.} \quad (5.60)$$

Die zugehörige Winkelfrequenz  $\omega(J) \equiv \frac{\partial E(J)}{\partial J} \equiv 2\pi/\tau$  ist konkret ausdrückbar als

$$\omega^{-1} = \frac{\partial J(E)}{\partial E} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial E} \oint p(q, E) dq, \quad (5.61)$$

also

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}, \quad \tau = \frac{\partial}{\partial E} \oint p(q, E) dq. \quad (5.62)$$

Wichtig bei dieser Herleitung ist, dass wir uns auf keine bestimmte Form der Hamiltonfunktion bezogen haben.

### 5.3.3 Winkel- und Wirkungsvariablen bei $f$ Freiheitsgraden

(REBHAN) Wir betrachten jetzt *separable* Systeme mit Wirkungsfunktion

$$S = \sum_{i=1}^f W_i(q_i, \mathbf{P}) - Et, \quad P_1 = E. \quad (5.63)$$

Im Folgenden betrachten wir weiterhin nur Librationen und keine Rotationen. Winkel- und Wirkungsvariablen werden zunächst ganz analog zum eindimensionalen Fall eingeführt,

$$J \equiv \frac{1}{2\pi} \oint p(q, E) dq, \quad (f = 1) \quad (5.64)$$

$$J_i \equiv \frac{1}{2\pi} \oint p_i(q_i, \mathbf{P}) dq_i, \quad p_i = \frac{\partial W_i}{\partial q_i}, \quad (i = 1, \dots, f). \quad (5.65)$$

Die  $J_i$  sind jetzt die neuen Konstanten der Bewegung und ersetzen die bisherigen  $P_i$ . Damit werden die verkürzte Wirkung  $W$ , die Winkelvariablen  $\theta$ , und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen zu

$$W = \sum_{k=1}^f W_k(q_k, \mathbf{P}(\mathbf{J})) \rightsquigarrow \theta_i = \sum_{k=1}^f \frac{\partial W_k(q_k, \mathbf{P}(\mathbf{J}))}{\partial J_i}, \quad K = H = E(\mathbf{J}) \quad (5.66)$$

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial E(\mathbf{J})}{\partial J_i}, \quad J_i = \text{const.} \quad (5.67)$$

Aus deren (trivialer) Lösungen  $\theta_i = \omega_i t + \theta_{i0}$  kann man schließlich die alten Ortsvariablen  $q_i = q_i(\theta_1, \dots, \theta_f, \mathbf{J})$  bestimmen. Für diese Funktionen gilt jetzt folgender

**Satz 23.** *Die alten Ortsvariablen  $q_i = q_i(\theta_1, \dots, \theta_f, \mathbf{J})$  sind periodisch in den Winkelvariablen, d.h. es gilt*

$$q_i(\theta_1, \dots, \theta_f, \mathbf{J}) = q_i(\theta_1 + 2\pi n_1, \dots, \theta_f + 2\pi n_f, \mathbf{J}), \quad n_i \in \mathbb{N}. \quad (5.68)$$

Beweis siehe z.B. REBHAN. Die alten Ortsvariablen sind also mehrfach periodische Funktionen und können deshalb in **Fourierreihen** (siehe MM) entwickelt werden,

$$q_i(\theta, \mathbf{J}) = \sum_{n_1, \dots, n_f = -\infty}^{\infty} a_{n_1, \dots, n_f}^{(i)} e^{i(n_1 \theta_1 + \dots + n_f \theta_f)} \quad (5.69)$$

$$q_i(t) = \sum_{n_1, \dots, n_f = -\infty}^{\infty} a_{n_1, \dots, n_f}^{(i)} e^{i(n_1 \theta_{10} + \dots + n_f \theta_{f0})} e^{i(n_1 \omega_1 + \dots + n_f \omega_f)t}. \quad (5.70)$$

Es gilt jetzt

**Satz 24.** *Falls die Winkelfrequenzen  $\omega_i$  **kommensurabel** sind, d.h. zueinander paarweise in rationalen Zahlenverhältnissen stehen, so sind die Funktionen  $q_i(t)$  periodische Funktionen in der Zeit  $t$ . Bei inkommensurablen Winkelfrequenzen  $\omega_i$  sind die  $q_i$  nicht periodisch.*

## 5.4 Integrabilität

In diesem (vor)letzten Abschnitt der Hamilton-Jacobi-Theorie kommen wir auf die Frage zurück, wann ein mechanisches Problem vollständig ‘gelöst’ werden kann, und was ‘lösen’ eigentlich heißt.

### 5.4.1 Vorbemerkungen

Zunächst erinnern wir an den Satz von Jacobi, Satz 20: wenn wir eine vollständige Lösung  $S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$  der Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung kennen, dann haben wir die Hamiltonschen kanonischen Bewegungsgleichungen und damit das mechanische Problem gelöst.

Die Lösbarkeit der Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung hängt andererseits davon ab, ob wir geeignete Koordinaten (**Separationskoordinaten**) finden können. Wenn wir vollständig separieren können, dann ist die Lösung des mechanischen Problems auf 'reine Quadraturen' (Umformen, Invertieren, Integrieren einzelner Gleichungen) zurückgeführt, wie wir es am Beispiel des harmonischen Oszillators gesehen haben. Man sagt dann, das Problem sei **vollständig integrierbar**.

(REBHAN) Umgekehrt gilt bei vollständiger Integrierbarkeit i. A. auch vollständige Separierbarkeit, d.h. es existiert ein Satz generalisierter Koordinaten, in denen die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung separiert. Diese Koordinaten sind (bei beschränkten Bewegungen) die Winkel- und Wirkungskoordinaten.

### 5.4.2 Theorem von Liouville für Integrierte Systeme

(REBHAN) Wenn die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung separiert, hat man  $f$  Separationskonstanten  $P_1, \dots, P_f$  und damit  $f$  Konstanten der Bewegung, und das Problem ist vollständig gelöst. Die  $P_i$  sind Funktionen der alten Orte und Impulse,  $P_i = P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , und für ihre Poisson-Klammern gilt

$$\{P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}), P_j(\mathbf{q}, \mathbf{p})\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = \{P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}), P_j(\mathbf{q}, \mathbf{p})\}_{\mathbf{Q}, \mathbf{P}} = 0 \quad (5.71)$$

Man sagt, die Separationsintegrale **liegen paarweise in Involution**, d.h. die Poissonklammer verschwindet jeweils.

BEISPIELE: Es gibt allgemein beim **Vielteilchenproblem ( $N$ -Körperproblem)** mit Zentralkräften (actio=reactio) in drei Raumdimensionen zehn Erhaltungsgrößen:  $E$  (Energie, 1);  $\mathbf{p}_S$  (Schwerpunktsimpuls, 3),  $\mathbf{L}$  (Gesamtdrehimpuls, 3), sowie  $\mathbf{r}_S(\mathbf{0})$  (Anfangsbedingung für Schwerpunktskoordinate, 3).

(SCHECK) Für  $N = 2$ , d.h. das Zweikörperproblem, gibt es  $f = 2d = 6$  Freiheitsgrade. Weiterhin liegen die folgenden sechs Erhaltungsgrößen paarweise in Involution:

$$E_{\text{rel}} \equiv \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + U(r), \mathbf{p}_S, \mathbf{L}^2, L_z, \quad (5.72)$$

wobei  $E_{\text{rel}}$  die Energie der Relativbewegung,  $\mu$  die reduzierte Masse und  $\mathbf{p}$  der Relativimpuls ist (man beachte, dass  $\mathbf{p}_S$  drei Komponenten hat). Deshalb ist das Zweikörperproblem in drei Raumdimensionen integrierbar.

Für  $N = 3$ , d.h. das Dreikörperproblem, gibt es  $f = 3d = 9$  Freiheitsgrade. Es gibt aber wie beim Zweikörperproblem nur sechs Bewegungsintegrale, was nicht ausreicht. Deshalb ist das Dreikörperproblem i.A. nicht integrierbar (es gibt allerdings Spezialfälle als Ausnahmen, wo es integrierbar wird).

Umgekehrt möchte man jetzt wissen, ob die Kenntnis von  $f$  Konstanten der Bewegung bei einem konservativen System ausreicht, um das mechanische Problem damit vollständig durch Quadraturen zu lösen. Die Antwort gibt

**Satz 25** (Theorem von Liouville). *Kennt man von einem konservativen Hamiltonschen System mit  $f$  Freiheitsgraden  $f$  unabhängige Bewegungsintegrale (Konstanten der Bewegung)*

$$F_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, f, \quad (5.73)$$

die miteinander paarweise in Involution liegen, d.h.  $\{F_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}), F_j(\mathbf{q}, \mathbf{p})\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = 0$  und deren Phasenraumgradienten keine Nullstellen haben, so kann man das System durch Quadraturen lösen.

‘Unabhängigkeit’ der Bewegungsintegrale bedeutet hierbei die *lineare Unabhängigkeit* der Differentiale  $dF_1, \dots, dF_f$  (aufgefaßt als lineare Abbildungen).

Das Theorem von Liouville wird sogar noch etwas konkreter in der folgenden Ergänzung (SCHECK): Im  $2f$ -dimensionalen Phasenraum definieren die  $f$  Gleichungen  $F_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \alpha_i$  eine ‘Hyperfläche  $\mathcal{T}^f$ ’. Dann gilt: Wenn diese Hyperfläche kompakt und zusammenhängend ist, kann sie auf einen  **$f$ -dimensionalen Torus**

$$\mathcal{T}^f = S^1 \times \dots \times S^1 \quad (5.74)$$

( $f$  Faktoren) abgebildet werden, wobei  $S^1$  einfach ein Kreis mit Radius 1 ist, der durch die  $i$ -te Winkelkoordinate  $\theta_i$  parametrisiert wird. Auf diesen Kreisen gelten die Bewegungsgleichungen

$$\dot{\theta}_i = \omega_i, \quad \omega_i \equiv \frac{\partial E}{\partial J_i}, \quad i = 1, \dots, f, \quad (5.75)$$

wobei  $E$  die (konstante) Gesamtenergie des Systems als Funktion der Wirkungsintegrale  $J_i$  ist. Man nennt die Hyperfläche  $\mathcal{T}^f$  einen  **$f$ -dimensionalen Torus**.

Das Theorem von Liouville werden wir hier nicht beweisen (für eine Beweisskizze siehe REBHAN, das SKRIPT ALTLAND, bzw. ARNOLD oder Vorlesungen in der mathematischen Physik für einen vollständigen Beweis). Der Beweis benutzt schöne Ergebnisse aus der Differentialgeometrie wie das Theorem ‘*Ein Igel lässt sich nicht kämmen*’.

Zu Veranschaulichung eines Torus betrachten wir ein Beispiel mit  $f = 2$  Freiheitsgraden. Für einen zweidimensionalen harmonischen Oszillator können wir z.B. Lösungen der Bewegungsgleichungen in der Form

$$x(t) = x_0 \sin \theta_1(t), \quad y(t) = y_0 \sin \theta_2(t), \quad \theta_i(t) = \omega_i t + \omega_{i0}, \quad i = 1, 2 \quad (5.76)$$

mit Winkelfrequenzen  $\omega_i$  haben. Die Winkelvariablen als Funktion  $\theta_i(t)$  der Zeit sind hier die Argumente des Sinus, d.h. die Phasen zur Zeit  $t$ .  $\theta_1(t)$  und  $\theta_2(t)$  bewegen sich als Winkelvariablen beide jeweils auf einem Kreis  $S^1$ . Beide Kreise zusammengenommen ergeben als Hyperfläche im Phasenraum einen zweidimensionalen Torus  $\mathcal{T}^2 = S^1 \times S^1$  (SKIZZE).

## 5.5 Das Keplerproblem in der 'Älteren Quantenmechanik'

Wir betrachten im Folgenden stets die Relativbewegung für ein Teilchen mit reduzierter Masse  $m$  im Zentralpotential  $V(r)$ .

### 5.5.1 Bewegung im Zentralfeld in $d = 3$

(z.B. REBHAN) Wir vereinfachen die Rechnung, indem wir die Drehimpulserhaltung ausnutzen, aus der wir wissen, dass die Bewegung in einer zweidimensionalen Ebene abläuft. Dort führen wir ebene Polarkoordinaten  $(r, \phi)$  ein und erhalten die Hamiltonfunktion aus der Lagrangefunktion (AUFGABE) als

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + V(r). \quad (5.77)$$

Hamilton-Jacobi für die verkürzte Wirkung  $W$  lautet dann

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left( \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 + V(r) = E \quad (5.78)$$

mit der Gesamtenergie  $E$ . Wir machen den Separationsansatz

$$W(r, \phi) = R(r) + \Phi(\phi) \rightsquigarrow [R'(r)]^2 + \frac{1}{r^2} [\Phi'(\phi)]^2 = 2m [E - V(r)], \quad (5.79)$$

also

$$[\Phi'(\phi)]^2 = r^2 \left( 2m [E - V(r)] - [R'(r)]^2 \right) \equiv L_0^2 = \text{const}, \quad (5.80)$$

wobei  $L_0^2$  das konstante Quadrat des Drehimpulses ist. Also hat man

$$\Phi(\phi) = L_0 \phi, \quad R(r) = \pm \int_{r_0}^r \sqrt{2m [E - V(r')] - \frac{L_0^2}{r'^2}} dr'. \quad (5.81)$$

Jetzt berechnen wir die *Wirkungsvariablen*, die zu  $\phi$  und zu  $r$  gehören:

$$J_\phi = \frac{1}{2\pi} \oint p_\phi d\phi = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W}{\partial \phi} d\phi = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} d\phi = \frac{2\pi}{2\pi} L_0 = L_0 \quad (5.82)$$

$$\begin{aligned} J_r &= \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W}{\partial r} dr = \frac{1}{2\pi} \oint R'(r) dr \\ &= \frac{1}{2\pi} 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr \sqrt{2m [E - V(r)] - \frac{L_0^2}{r^2}}. \end{aligned} \quad (5.83)$$

In  $J_r$  wurde hier, wie oben für den  $d = 1$ -Fall diskutiert, das Integral ausgewertet durch Integration vom Minimalwert bis zum Maximalwert des Radius und wieder zurück, daher der Faktor 2.

Für die *Winkelvariablen*, die zu  $J_\phi$  und  $J_r$  gehören, folgt zunächst für  $\theta_r$  aus  $W = R + \Phi$ ,  $L_0 = J_\phi$  und der Definition  $\theta_r = \frac{\partial W}{\partial J_r}$

$$\theta_r = \frac{\partial R}{\partial J_r} = \int_{r_0}^r \frac{m \frac{\partial E}{\partial J_r}}{\sqrt{2m[E - V(r')] - \frac{J_\phi^2}{r'^2}}} = \omega_r \int_{r_0}^r \frac{m}{\sqrt{2m[E - V(r')] - \frac{J_\phi^2}{r'^2}}} dr', \quad (5.84)$$

wobei wir die Definition  $\frac{\partial E}{\partial J_r} \equiv \omega_r$  benutzt haben. Durch Vergleich mit der Zeitentwicklung  $\theta_r = \omega_r(t - t_0)$  haben wir also

$$t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{m}{\sqrt{2m[E - V(r')] - \frac{J_\phi^2}{r'^2}}} dr' \quad (5.85)$$

wie es sein muss, denn das hatten wir bereits in Kapitel 1 für den Fahrstrahl beim zentralsymmetrischen Problem gefunden, vgl. Gl. (1.73)

$$dr = \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(r)] - \frac{L_0^2}{m^2 r^2}} dt. \quad (5.86)$$

Weiterhin haben wir für die Winkelvariable  $\theta_\phi$ , die zu  $J_\phi$  gehört, die Gleichung

$$\begin{aligned} \theta_\phi &= \frac{\partial W}{\partial J_\phi} = \frac{\partial}{\partial J_\phi} \left( J_\phi \phi + \int_{r_0}^r \sqrt{2m[E - V(r')] - \frac{J_\phi^2}{r'^2}} dr' \right) \\ &= \phi + \int_{r_0}^r \frac{m \frac{\partial E}{\partial J_\phi} - J_\phi \frac{1}{(r')^2}}{\sqrt{2m[E - V(r')] - \frac{J_\phi^2}{r'^2}}} = \omega_\phi \int_{r_0}^r \frac{m}{\sqrt{2m[E - V(r')] - \frac{J_\phi^2}{r'^2}}} dr' \end{aligned} \quad (5.87)$$

Hier haben wir wiederum Gl. (1.73),

$$\phi = \int_{r_0}^r \frac{L_0/r'^2}{\sqrt{2m[E - V(r')] - L_0^2/r'^2}} dr', \quad (5.88)$$

mit  $L_0 = J_\phi$  ausgenutzt und den Winkel von  $r_0$  an gezählt. Es gilt also

$$\theta_\phi(t) = \omega_\phi(t - t_0), \quad \theta_r(t) = \omega_r(t - t_0), \quad (5.89)$$

wie wir es für zu den Wirkungsvariablen kanonisch konjugierte Winkelvariablen erwarten. Hier ist wichtig, dass man die kanonischen Winkelvariablen nicht mit räumlichen Winkel verwechselt - z.B. sind der Polarkoordinatenwinkel  $\phi$  und die Winkelvariable  $\theta_\phi$  zwei völlig verschiedene Dinge: man sieht das ja auch direkt an deren Zeitentwicklung.

### 5.5.2 Auswertung für $1/r$ -Potential

Wie schon früher bei einem ähnlichen Integral im Kepler-Problem lässt sich das  $J_r$ -Integral für das  $1/r$ -Potential geschlossen lösen. Aus

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \rightsquigarrow J_r = -L_0 + \alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \quad (5.90)$$

(überprüfen als AUFGABE). Durch Umstellen folgt hier die wichtige Gleichung

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2(J_r + J_\phi)^2}. \quad (5.91)$$

Die Winkelfrequenzen für die  $\phi$ - und die  $r$ -Bewegung folgen einfach aus (vgl. auch SCHAUM)

$$\omega_\phi = \frac{\partial E}{\partial J_\phi} = \frac{m\alpha^2}{(J_r + J_\phi)^3}, \quad \omega_r = \frac{\partial E}{\partial J_r} = \frac{m\alpha^2}{(J_r + J_\phi)^3}, \quad (5.92)$$

beide Frequenzen stimmen also überein, denn  $E$  hängt ja nur von der Summe  $J_r + J_\phi$  ab. Einen solchen Fall übereinstimmender Frequenzen bezeichnet man als **Entartung**. Entsprechend gilt für die kanonischen Winkelvariablen  $\theta_\phi$  und  $\theta_r$  nach Gl. (5.89)

$$\theta_\phi(t) = \theta_r(t) = \omega_\phi(t - t_0) = \omega_r(t - t_0). \quad (5.93)$$

Falls man von Anfang an die volle dreidimensionale Bewegung mitnimmt und die Einschränkung auf eine Ebene zunächst nicht berücksichtigt, so muss man  $3d$  Polarkoordinaten nehmen und hat dann den zusätzlichen Winkel  $\theta$ . Die Rechnung ist dann etwas aufwändiger, vgl. GOLDSTEIN. Der dem Ergebnis Gl. (5.91) entsprechende Ausdruck involviert dann eine zusätzliche Wirkungsvariable  $J_\theta$  und lautet

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2(J_r + J_\phi + J_\theta)^2}, \quad \text{Energie und Wirkungsvariablen im Kepler-Problem.} \quad (5.94)$$

Vergleich mit oben zeigt, dass Gl. (5.91) dem Spezialfall  $J_\theta = 0$  entspricht.

AUFGABE:

1. Man leite durch Differentiation der Wirkung  $S(r, \phi; E, L_0, t)$  eine Gleichung für die Zeit  $t$  als Funktion des Radius  $r$  her.
2. (für Astronomen) Lies im GOLDSTEIN das Kapitel über die zeitliche Bewegung im Keplerproblem. Leite die *astronomische Gleichung*  $\omega t = \psi - e \sin \psi$  her.

### 5.5.3 Sommerfeld-Wilson-Quantisierung, ‘Ältere Quantenmechanik’

Die Atomphysik vor Schrödinger und Heisenberg benutzte ‘Quantisierungs-Regeln’, die auf den Bohrschen Ideen zum Atom aufbauten. Eine der Grundregeln ist die Quantisierung der Wirkungsvariablen in der Form

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i = n_i \hbar, \quad n_i \in \mathbb{N}, \quad \hbar \equiv \frac{h}{2\pi}. \quad (5.95)$$

mit dem **Planckschen Wirkungsquantum**  $h$  und der **Quantenzahl**  $n_i$ . Die durch die Wirkungsvariablen ausgedrückten Flächen im Phasenraum werden also in ganzzahligen Einheiten von  $\hbar$  **quantisiert**.

In unserem Beispiel des Kepler-Problems hat man also für die Energie  $E$

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2(J_r + J_\phi + J_\theta)^2} = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2} \frac{1}{(n_r + n_\phi + n_\theta)^2} \quad (5.96)$$

Man definiert nun

$$n \equiv n_r + n_\phi + n_\theta, \quad \text{Hauptquantenzahl} \quad (5.97)$$

und erhält damit

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.98)$$

Das ist gerade das Energiespektrum der Balmer-Serie des Wasserstoff-Atoms, wenn man für  $\alpha$  den entsprechenden Ausdruck für das Coulomb-Potential zwischen Elektron und Proton einsetzt. Die Quantenzahlen  $n_r$ ,  $n_\phi$ ,  $n_\theta$  der älteren Quantenmechanik können fast vollständig mit den 'richtigen' Quantenzahlen  $n$ ,  $l$ ,  $m$  der 'neuen' Quantenmechanik in Verbindung gebracht werden. Weiteres hierzu in Lehrbüchern bzw. in der Quantenmechanik-Vorlesung.

## 6. EINFÜHRUNG IN DIE SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

Neben mechanischen Vorgängen spielen in der Physik elektromagnetische Phänomene eine große Rolle; bei diesen tritt mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  eine gegenüber ‘normalen’ mechanischen Bewegungen sehr hohe Geschwindigkeit auf. Es zeigt sich, dass die Mechanik wegen der Forderung der Gleichwertigkeit aller Inertialsysteme für alle (nicht nur die mechanischen) physikalischen Vorgänge abgeändert werden muss.

### 6.1 Galilei-Transformationen

Bei der Diskussion der Newtonsche Bewegungsgleichungen hatten wir bereits die aus Sicht der Mechanik besonders ausgezeichneten Koordinatensysteme, nämlich **Inertialsysteme**, kennen gelernt. Inertialsysteme bewegen sich gleichförmig mit konstanter Geschwindigkeit gegeneinander. Die Zeit  $t$  und die Ortskoordinaten  $x, y, z$  zwischen Inertialsystemen werden mittels (**spezieller**) **Galilei-Transformationen** umgerechnet, z.B. gemäß

$$\begin{aligned}x' &= x + vt, & y' &= y, & z' &= z \\t' &= t,\end{aligned}\tag{6.1}$$

wenn sich beide Systeme relativ zueinander mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegen.

Allgemein wird in drei Raumdimensionen der Übergang von einem Inertialsystem  $K$  zu einem Inertialsystem  $K'$  durch

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{a}, \quad R \in SO(3), \quad \mathbf{v}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3\tag{6.2}$$

$$t' = t + t_0, \quad t_0 \in \mathbb{R}, \quad \text{Galilei-Transformation}\tag{6.3}$$

beschrieben, wobei  $R$  eine orthogonale Drehmatrix,  $\mathbf{a}$  ein Verschiebungsvektor,  $\mathbf{v}$  der Vektor der Relativgeschwindigkeit zwischen  $K$  und  $K'$  und  $t_0$  eine Verschiebung des Zeit-Nullpunkts ist. Alle Parameter der Galilei-Transformation sind selbst *zeitunabhängig*, im Gegensatz etwa zu unserem zeitabhängigen Basiswechsel bei der Diskussion rotierender starrer Körper mit Nichtinertialsystemen in Kapitel 3<sup>1</sup>. Nichtinertialsysteme sind beschleunigt und haben hier in dieser Diskussion zunächst einmal nichts zu suchen.

Die *Zeit* besitzt in der Newtonschen Mechanik einen absoluten Charakter - die Zeit  $t$  wird (bis auf die triviale Verschiebung  $t_0$ ) nicht ‘rotiert’, insbesondere wird sie durch die

---

<sup>1</sup> Dort war  $R = R(t)$  und  $\mathbf{x} = R(t)\mathbf{x}'$  - in der obigen Notation also  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{x}'$  vertauscht.

Galilei-Transformationen nicht mit den anderen Koordinaten  $x, y, z$  vermischt, während letztere z.B. bei den räumlichen Rotationen  $R$  der Galilei-Transformationen vermischt werden.

### 6.1.1 Invarianz der Bewegungsgleichungen

Die Galilei-Transformationen sind durch insgesamt zehn reelle Parameter gekennzeichnet: drei Drehwinkel, je drei Komponenten von  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{a}$ , und die Verschiebung des Zeit-Nullpunkts  $t_0$ . Für konservative Vielteilchensysteme mit Zweiteilchen-Wechselwirkungen bleiben die Newtonschen Gleichungen unter Galilei-Transformationen *invariant*. Explizit bedeutet das (z.B. GOENNER, ‘Spezielle Relativitätstheorie’)

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{F}_i(\{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|\}) \rightsquigarrow m'_i \ddot{\mathbf{x}}'_i = \mathbf{F}'_i(\{|\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_j|\}) \\ m_i &= m'_i, \quad \mathbf{F}'_i = R\mathbf{F}_i, \end{aligned} \quad (6.4)$$

d.h. die Massen  $m_i$  selbst werden bei Galilei-Transformationen überhaupt nicht geändert. Die Vektoren der Kräfte  $\mathbf{F}_i$  werden einfach wie die Ortsvektoren  $\mathbf{x}_i$  mit der Rotationsmatrix gedreht, falls das System  $K'$  gegenüber dem System  $K$  gedreht ist. Die mikroskopische Beschreibung der Welt erfolgt gemäß der Newtonschen Mechanik durch die Gleichungen Gl. (6.4), zu verstehen als ‘nackte’ Newtonschen Gleichungen mit mikroskopischen Ausdrücken für die konservativen Kräfte  $\mathbf{F}_i$ , und ohne irgendwelche Zwangsbedingungen. Wir sprechen hier also immer über *abgeschlossene Systeme* im Sinne der Diskussion in Kap. (1.1.4), also ohne äußere Kräfte. Uns geht es jetzt um das ‘Ganze’! Wir sind also wieder ganz am Anfang angelangt, was wir auch daran sehen, das wir hier alles in kartesischen Koordinaten formuliert haben.

Alternativ formulieren wir die obige Invarianz nochmal im Lagrange-Formalismus: Die Lagrange-Funktion eines konservativen Vielteilchensystems mit Zweiteilchen-Wechselwirkungen ist unter Galilei-Transformationen invariant - nach dem Noether-Theorem existieren deshalb die entsprechenden Erhaltungsgrößen, vgl. FLIESSBACH. Die sind die zehn Erhaltungsgrößen Gesamtenergie, Gesamtimpuls, Gesamtdrehimpuls, und eine Anfangskoordinate  $\mathbf{x}_0$  des Schwerpunkts, denn die Galilei-Gruppe hat zehn reelle Parameter.

Nochmals alternativ kann man die Galilei-Invarianz und die zugehörigen Erhaltungssätze auch im Phasenraum und mit Hilfe von kanonischen Transformationen und erzeugenden Funktionen ausdrücken (z.B. STRAUMANN, oder als AUFGABE).

### 6.1.2 Mathematischer Einschub: Gruppen

Die Galilei-Transformationen bilden eine Gruppe: Wir definieren (z.B. BRONSTEIN)

**Definition** Eine Menge  $G$ , die mit einer assoziativen Operation  $*$  :  $G \times G \rightarrow G$ ,  $(a, b) \rightarrow a * b \in G$ ,  $(a * b) * c = a * (b * c)$  versehen ist, heißt **Gruppe**, falls es ein neutrales Element  $e$  gibt und zu jedem Element  $g \in G$  ein inverses Element  $g^{-1} \in G$  mit

$$g * g^{-1} = g^{-1} * g = e \quad (6.5)$$

existiert.

Beispiele:

- Komplexe Zahlen  $\mathbb{C} \setminus 0$  bezüglich der Multiplikation.
- Die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  bezüglich der Operation  $+$  (Addition)
- Komplexe  $n \times n$  Matrizen  $A$  mit  $\det(A) \neq 0$  bezüglich der Matrix-Multiplikation.

AUFGABE: Zeige, dass die Galilei-Transformationen eine Gruppe bilden.

Eine nützliche Benennung ist

**Definition** Eine Gruppe heißt **abelsch**, falls ihre Operation  $*$  kommutativ ist, d.h. falls  $a * b = b * a$  für alle Gruppenelemente.

AUFGABE: Zeige, dass die Rotationen in der zweidimensionalen Ebene eine abelsche Gruppe bilden, die Rotationen in drei Dimensionen aber nicht.

## 6.2 Die Lorentz-Transformation

### 6.2.1 Einleitung

Elektromagnetische Phänomene werden durch die Maxwell'schen Gleichungen beschrieben, die im 19. Jahrhundert entdeckt wurden (vgl. auch MM). Typische Anwendungen sind z.B. Wellengleichungen vom Typ

$$\Delta u(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (6.6)$$

wie wir sie bereits in MM und in der geometrischen Optik kennen gelernt hatten, vgl. Gl. (5.36). Man stellte bald fest, dass solche Gleichungen *nicht* invariant sind unter Transformationen zwischen Inertialsystemen  $K \rightarrow K'$  mittels Galilei-Transformationen. Da die Elektrodynamik jung, die Newton'sche Mechanik aber wohl-etabliert war, suchte man wohl zunächst nach Fehlern in ersterer, was nicht gelang. Offensichtlich waren nicht alle Inertialsysteme gleichberechtigt, falls Gl. (6.6) und die Galileitransformationen gelten sollten: es lag deshalb nicht fern, die Existenz eines ausgezeichneten Inertialsystems (**Äther**) zu postulieren, in dem Licht und elektromagnetische Wellen allgemein sich ausbreiteten.

Das führte allerdings zu Widersprüchen mit Hochpräzisionsexperimenten (Michelson-Morley) zur Messung der Lichtgeschwindigkeit. Weiterhin war das ganze Ätherkonzept (GOENNER) wegen widersprüchlicher physikalischer Eigenschaften ('hart wie Stahl, aber ohne Reibung gegenüber der Planetenbewegung') fragwürdig und ist heute wohl eher von wissenschaftshistorischem Interesse <sup>2</sup>

<sup>2</sup> Vgl. auch unrühmliche Fehlentwicklungen wie die von Philipp Lenard propagierte 'Deutsche Physik' und sein Lehrbuch gleichen Titels, in dem der 'Äther und die Geisterwelt' diskutiert werden (Band 4, Lehmanns Verlag, München 1937).

Ein Vorläufer der Lorentz-Transformation ist die **Voigt-Transformation** für die Schwingungsgleichung für Wellenausbreitung in einem Kristall (SCHECK). Mathematisch gesehen handelt es sich bei den gesuchten Transformationen, die die Galilei-Transformationen ersetzen und verallgemeinern sollen, also um die **Invarianzgruppe des d'Alembert-Operators**, d.h. des Differentialoperators

$$\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (6.7)$$

der Wellengleichung. Wieder ist es erstaunlich, dass wir es hier bei unserem Vorstoss von der Newtonschen Mechanik auf (relativistisches) Neuland mit einer Wellengleichung zu tun haben, so wie es auch beim Vorstoss von der Mechanik über die Eikonalgleichung zur Quantenmechanik der Fall war.

### 6.2.2 Einsteinsches Relativitätsprinzip

(GOENNER) Einstein erweiterte das Relativitätsprinzip der Mechanik in seiner berühmten Arbeit 'Zur Elektrodynamik bewegter Körper', indem er forderte

Sämtliche physikalischen Vorgänge laufen in allen Inertialsystemen gleich ab.

(**Einsteinsches Relativitätsprinzip**). Damit sind also nicht nur mechanisches, sondern auch elektromagnetische Vorgänge gemeint. Da für letztere die Galilei-Transformationen nicht funktionieren, müssen neue Transformationen zwischen Inertialsystemen  $K \rightarrow K'$  gefunden werden, die mit dem Einsteinschen Relativitätsprinzip konsistent sind. Die Lorentz-Transformationen, die das bewirken, stellen sich dann als Verallgemeinerungen der Galilei-Transformationen heraus.

Als zweites Prinzip kommt hinzu:

Die Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c$  ist unabhängig vom Inertialsystem.

(**Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c$** ).

### 6.2.3 Konstruktion der Lorentz-Transformation

(GOENNER)

#### 6.2.3.1 Newtonscher Schritt

Wir betrachten zwei Inertialsysteme  $K$  und  $K'$ , die sich mit Relativgeschwindigkeit  $v$  in Richtung der parallel gelegten  $x$ - und  $x'$ -Achsen bewegen. Wie bei der Galilei-Transformation gelte für die beiden anderen Raumachsen  $y = y'$ ,  $z = z'$ . Wir beschreiben raum-zeitliche Ereignisse entlang der  $x$ - und  $x'$ -Achsen, also zunächst räumlich ein-dimensionale Bewegungen. Für Bewegungen eines freien Teilchens gelten in  $K$  und  $K'$  Geradengleichungen vom Typ

$$x = \alpha t + \delta, \quad x' = \alpha' t' + \delta', \quad (6.8)$$

in beiden Systemen sind das lineare Gleichungen (mit konstanten Termen  $\delta, \delta'$ ). Die der Galilei-Transformation entsprechende gesuchte Transformation von Koordinaten  $x \rightarrow x'$  sollte also wieder linear sein,

$$x' = \gamma(v)(x - vt), \quad (6.9)$$

wobei wir bereits ausnutzen, dass der Koordinatenursprung von  $K'$ , d.h. der Punkt  $x' = 0$ , im  $K$ -System durch  $x = vt$  gegeben ist <sup>3</sup>. Hierbei wurde der Zeitnullpunkt so gelegt, dass bei  $t = 0$  beide Koordinatenursprünge  $x = x' = 0$  zusammenfallen. Der Parameter  $\gamma(v)$  hängt nur von der Relativgeschwindigkeit ab und muss noch bestimmt werden.

Nach dem *Relativitätsprinzip* muss die Transformation von  $x' \rightarrow x$ , d.h. von  $K' \rightarrow K$ , die gleiche Form wie Gl. (6.9) haben, nur dass jetzt  $v$  durch  $-v$  ersetzt wird und die Rollen von  $x$  und  $x'$  bzw.  $t$  und  $t'$  vertauscht sind, d.h.

$$x = \gamma(-v)(x' + vt'). \quad (6.10)$$

Jetzt nutzt man die *Isotropie des Raums* aus, um mehr über  $\gamma(v)$  zu erfahren: bei Ersetzung von  $x'$  und  $x$  durch ihre gespiegelten Werte  $-x'$  und  $-x$  sowie Ersetzung von  $v$  durch  $-v$  darf sich nichts ändern, aus Gl. (6.9) folgt also

$$-x' = \gamma(-v)(-x + vt) \rightsquigarrow \gamma(-v) = \gamma(v). \quad (6.11)$$

Damit hat man aber auch eine Transformationsgleichung für  $t'$  gefunden, denn Einsetzen von Gl. (6.9) in Gl. (6.10) liefert (wir schreiben jetzt abkürzend  $\gamma$  statt  $\gamma(v)$ )

$$x = \gamma(x' + vt') = \gamma(\gamma(x - vt) + vt') \rightsquigarrow t' = \gamma t + \frac{1 - \gamma^2}{v\gamma} x. \quad (6.12)$$

Bis hierhin fassen wir erst einmal zusammen;

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma t + \frac{1 - \gamma^2}{v\gamma} x. \quad (6.13)$$

Wichtig ist die Tatsache, dass man bis hier nur die Newtonsche Mechanik und die Isotropie des Raumes ausgenutzt hat. Das volle *Einsteinsche* Relativitätsprinzip (bezogen auf elektromagnetische Vorgänge) spielt bis hier keine Rolle. Ausgenutzt wurde nur die Invarianz des Trägheitssatzes: Geraden werden auf Geraden transformiert.

### 6.2.3.2 Bestimmung von $\gamma(v)$ : Gruppeneigenschaft

Wir schalten zwei Transformationen Gl. (6.13) hintereinander,

$$t'' = \gamma' t' + \frac{1 - \gamma'^2}{v'\gamma'} x' = \gamma' \left[ \gamma t + \frac{1 - \gamma^2}{v\gamma} x \right] + \frac{1 - \gamma'^2}{v'\gamma'} \gamma (x - vt) \quad (6.14)$$

$$x'' = \gamma'(x' - v't') = \gamma' \left[ \gamma(x - vt) - v' \left( \gamma t + \frac{1 - \gamma^2}{v\gamma} x \right) \right]. \quad (6.15)$$

<sup>3</sup> Weiterhin werden die etwas allgemeineren *projektiven* Transformationen ausgeschlossen, bei denen man auch Punkte im Endlichen ins Unendliche transformieren kann.

Wenn die Transformationen die *Gruppeneigenschaft* haben, muss das wieder die Form Gl. (6.13) haben, also

$$x'' = \gamma''(x - v''t), \quad t'' = \gamma''t + \frac{1 - (\gamma'')^2}{v''\gamma''}x \quad (6.16)$$

mit irgendwelchen neuen  $v''$  und  $\gamma''$ . Der Vergleich z.B. für den Vorfaktor  $\gamma''$  ergibt

$$\gamma'\gamma\left(1 - v\frac{1 - \gamma'^2}{v'\gamma'^2}\right) = \gamma'\gamma\left(1 - v'\frac{1 - \gamma^2}{v\gamma^2}\right) \quad (6.17)$$

Trennung beider Seiten liefert

$$\frac{1 - \gamma^2}{v^2\gamma^2} = \frac{1 - \gamma'^2}{(v')^2\gamma'^2} = \text{const}, \quad (6.18)$$

denn das muss ja für beliebige Relativgeschwindigkeiten gelten. Deshalb also

$$\frac{1 - \gamma^2}{v^2\gamma^2} = K = \text{const} \rightsquigarrow \gamma(v) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + Kv^2}}. \quad (6.19)$$

Die negative Wurzel verwerfen wir, da bei  $v = 0$  nichts passiert und  $\gamma(0) = 1$  gelten muss, also

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 + Kv^2}}. \quad (6.20)$$

Die Konstante  $K$  muss die Dimension eines inversen Geschwindigkeits-Quadrats haben. Der Fall  $K = 0$  entspricht den *Galilei-Transformationen*,

$$K = 0 \rightsquigarrow x' = x - vt, \quad t' = t. \quad (6.21)$$

Jetzt könnte man z.B. sagen, dass man *experimentell*  $K = -\frac{1}{c^2}$  findet. Alternativ kann man Einsteins Postulat von der Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c$  benutzen.

### 6.2.3.3 Bestimmung von $\gamma(v)$ : Konstanz von $c$

Benutzt man die *Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit*  $c$ , so kommt man sowieso schneller an das Ziel,  $\gamma(v)$  zu bestimmen: zu den Zeiten  $t = t' = 0$  fallen die Koordinatenursprünge  $x = x' = 0$  zusammen, dort werde eine Lichtwelle ausgesandt. Die Front  $x = ct$  der Lichtwelle (ausgedrückt durch  $K$ -Koordinaten) muss im System  $K'$  durch  $x' = ct'$  mit demselben  $c$  beschrieben werden. Es gilt also

$$x = ct, \quad x' = ct' \rightsquigarrow ct' = \gamma(ct - vt), \quad ct = \gamma(ct' + vt') \quad (6.22)$$

$$\rightsquigarrow c^2 = \gamma^2(c^2 - v^2). \quad (6.23)$$

Einfaches Umstellen und die Forderung  $\gamma > 0$  führt auf

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (6.24)$$

Insgesamt haben wir damit

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right). \quad (6.25)$$

### 6.2.4 Matrix-Form

In Matrix-Form lautet unsere spezielle Lorentz-Transformation für eine Relativbewegung entlang der parallel gelegten  $x$ - und  $x'$ -Achsen

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}, \quad \beta \equiv \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (6.26)$$

Ausgeschrieben für alle Komponenten haben wir natürlich eine  $4 \times 4$ -Matrix,

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

## 6.3 Folgerungen aus der Lorentz-Transformation

Hier werden Folgerungen aus der Lorentz-Transformation vorgestellt, die für unsere Alltagserfahrung sehr ungewöhnlich oder sogar widersprüchlich erscheinen und zunächst ‘gegen den gesunden Menschenverstand’ zu sprechen scheinen.

Im Folgenden betrachten wir wieder unsere spezielle Lorentz-Transformation für eine Relativbewegung entlang der parallel gelegten  $x$ - und  $x'$ -Achsen. Wegen  $y' = y$  und  $z' = z$  nehmen wir wieder nur die  $2 \times 2$ -Form Gl. (6.26).

### 6.3.1 Minkowski-Diagramm

Wir stellen die raumzeitliche Bewegung von Punkten in einem **Minkowski-Diagramm** dar. Im ruhenden System  $K$  betrachten wir Teilchen, die sich mit gleicher Relativgeschwindigkeit  $v$  entlang der  $x$ -Achse bewegen. Im Diagramm tragen wir  $ct$  (vertikal) und  $x$  (horizontal) auf. Die Teilchen werden also durch Geraden vom Typ  $x = vt + x_0$  bzw.

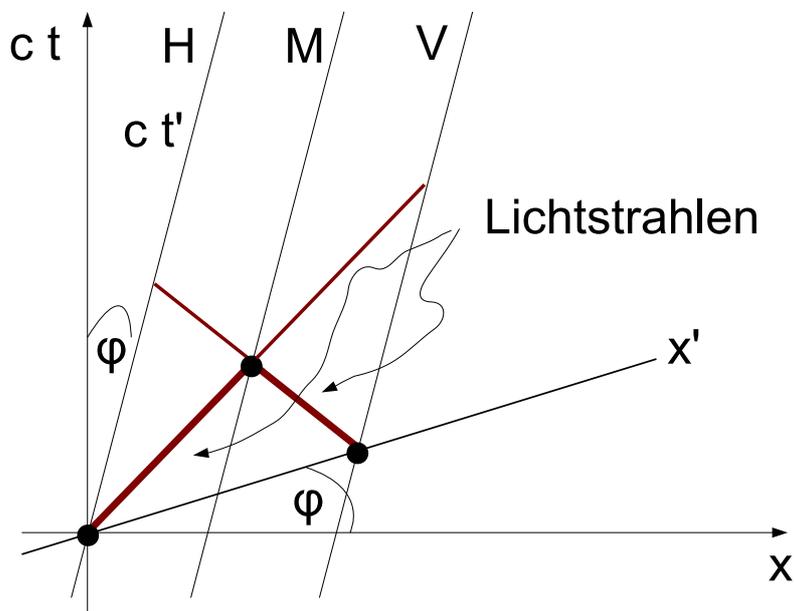
$$ct = \frac{c}{v}x + ct_0 \quad (6.28)$$

beschrieben. Solche Geraden nennt man dann *Weltlinien*. Lichtausbreitung wird durch den **Lichtkegel**  $x = \pm ct$  beschrieben, in drei räumlichen Dimensionen ist das durch  $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$  zu ersetzen.

### 6.3.2 Relativität der ‘Gleichzeitigkeit’

Wir betrachten ein Gedankenexperiment, in dem sich ein symmetrisches ‘Flugzeug’  $K'$ , d.h. drei starr verbundene Punkte H (hinten), M (Mitte) und V (vorne) an uns von links nach rechts vorbeibewegen. Im Flugzeug, d.h. im System  $K'$  werden Lichtstrahlen je von hinten und vorne zur Mitte ausgesendet<sup>4</sup>, und zwar so, dass die Wellenfronten für einen Beobachter in  $K'$  zeitgleich bei M ankommen.

<sup>4</sup> vgl. DUDEN zum Gebrauch von ‘gesendet’ versus ‘gesandt’



**Fig. 6.1:** Minkowski-Diagramm zur Gleichzeitigkeit: zwei Lichtstrahlen, die vom Hinterteil H und Vorderteil V eines Flugzeugs ausgesendet werden, treffen sich in der Mitte M.

Im Minkowski-Diagramm bedeutet das Folgendes: zwei Lichtstrahlen mit Steigung 1 bzw.  $-1$  schneiden die Weltlinie von  $M$  im selben Punkt (SKIZZE) unter einem rechten Winkel. Zurückverfolgen der Lichtstrahlen zu ihren Ursprüngen H und V zeigt, dass sie für Beobachter in  $K$  niemals gleichzeitig ausgesendet werden konnten: der Strahl von H wurde früher als der von V ausgesendet: das muss ja auch so sein, denn V rennt dem Licht entgegen, während H ihm hinterher rennen muss. Während die beiden Ereignisse für  $K'$  *gleichzeitig* sind, sind sie für  $K$  nicht gleichzeitig. Dieses Phänomen bezeichnet man als Relativität der Gleichzeitigkeit, wobei letztere hier 'operational' durch eine (Gedanken)- experimentelle Vorschrift quasi definiert wurde (vgl. GOENNER zur Definition des Gleichzeitigkeitsbegriffs).

Im Minkowski-Diagramm sind die Weltlinien des Flugzeugs (H M V) Geraden, die mit der  $ct$ -Achse den Winkel  $\phi$  einschließen, für den

$$\tan \phi = \frac{v}{c} \quad (6.29)$$

gilt. Die beiden in  $K'$  gleichzeitigen Ereignisse definieren eine Gerade  $x'$ , die nach der Dreieckskonstruktion (SKIZZE) mit der  $x$ -Achse ebenfalls denselben Winkel  $\phi$  einschließt. Die Gerade  $x'$  bezeichnen wir als Gleichzeitigkeits-Gerade, die Geraden  $ct'$  als Zeitachsen des bewegten Beobachter. Die Benennung  $x'$ ,  $ct'$  ist hier etwas salopp und sollte nicht mit den eigentlichen Werten der Koordinaten in  $K'$  durcheinander gebracht werden.

### 6.3.3 Längenkontraktion

Im System  $K'$  ruhe ein Maßstab der Länge  $l_0 \equiv \Delta x'$ , wobei  $\Delta x'$  der Abstand zwischen Spitze und Ende des Stabes sei.  $K'$  bewegt sich relativ zu  $K$  mit der Geschwindigkeit  $v$ . Ein Beobachter in  $K$  misst nun Stabspitze und -ende *gleichzeitig*, d.h. bestimmt  $\Delta x$  für  $\Delta t = 0$ . Dann folgt aus der Lorentz-Transformation

$$\begin{aligned} l_0 &\equiv \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = \gamma\Delta x \\ \rightsquigarrow \Delta x &= \frac{l_0}{\gamma} = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \leq l_0, \quad \text{Längenkontraktion.} \end{aligned} \quad (6.30)$$

Die gleichzeitige Messung in  $K$  mit  $\Delta t = 0$  ist allerdings für einen Beobachter in  $K'$  *nicht* gleichzeitig, denn

$$\Delta t' = \gamma \left( \Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) = -\gamma \frac{v}{c^2} \Delta x = -\frac{v}{c^2} l_0 \neq 0. \quad (6.31)$$

Der Begriff **Gleichzeitigkeit** hängt also vom Beobachtungssystem ab! Das steht im starken Kontrast zur Newtonschen Mechanik, wo Gleichzeitigkeit, wie die Zeit selbst, ein absolutes (systemunabhängiges) Konzept ist. Durch die Lorentz-Transformation werden *sowohl der Ort als auch die Zeit transformiert* - man muss sich davor hüten, jeweil naiv nur eine der Transformationsgleichungen von  $K \rightarrow K'$ ,

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} x \right) \quad (6.32)$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t), \quad \Delta t' = \gamma \left( \Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right), \quad (6.33)$$

oder entsprechend von  $K' \rightarrow K$

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma \left( t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \quad (6.34)$$

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t'), \quad \Delta t = \gamma \left( \Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right) \quad (6.35)$$

anzuwenden. Man könnte z.B. naiv die Gleichung  $\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$  mit  $\Delta t' = 0$  (Gleichzeitigkeit in  $K'$ ) anwenden und dann für die Stablänge in  $K$  folgern  $\Delta x = \gamma\Delta x' = \gamma l_0 \geq l_0$  (falsch!). Dieses  $\Delta x$  ist zwar eine in  $K$  korrekt ausgerechnete Länge; sie ist aber nicht die Länge, die ein Beobachter in  $K$  dem mit der Geschwindigkeit  $v$  vorbeifliegenden Stab zuordnen würde, denn dieses  $\Delta x$  entspricht zwei *verschiedenen* Zeiten in  $K$  mit Zeitdifferenz  $\Delta t = \gamma \left( \Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right) = \gamma \frac{v}{c^2} l_0$ . Die richtige Längenbestimmung mittels Gl. (6.35) lautet also

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta t = \gamma \left( \Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right) \rightsquigarrow \Delta t' = -\frac{v}{c^2} \Delta x' \\ \rightsquigarrow \Delta x &= \gamma(\Delta x' + v\Delta t') = \gamma \left( 1 - v \frac{v}{c^2} \right) \Delta x' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta x' \leq \Delta x', \end{aligned} \quad (6.36)$$

was mit dem obigen Ergebnis übereinstimmt.

### 6.3.4 Zeitdilatation

Im System  $K'$ , das sich an  $K$  mit Geschwindigkeit  $v$  vorbeibewegt, ruhe bei  $x' = 0$  eine Uhr. Ein Beobachter in  $K'$  messe das periodische 'Schlagen' der Uhr, d.h. Ereignisse mit Zeitintervall  $\Delta t'$ . Dann findet ein Beobachter in  $K$  für das Zeitintervall  $\Delta t$  dieser Ereignisse in seinem Bezugssystem

$$\Delta t = \gamma \left( \Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right) = \gamma \Delta t' \geq \Delta t', \quad (6.37)$$

wenn z.B.  $\Delta t' = 1$  s, so ist bei hohen Relativgeschwindigkeiten  $\Delta t \gg 1$  s, d.h. für den Beobachter in  $K$  geht die bewegte Uhr langsamer.

Die Zeitdilatation scheint interessanterweise - aus experimenteller Sicht - wesentlich wichtiger als die Längenkontraktion zu sein (Zeit und Raum sind auch in der SRT *nicht* gleichberechtigt). Experimente zur Zeitdilatation: Flug von Präzisionsuhren um die Erde ost- und westwärts (Hafele, Keating 1972), sowie die Lebensdauer von Elementarteilchen ( $\pi^0$ -Mesonen,  $\mu^\pm$ -Mesonen), vgl. GOENNER.

## 6.4 Der Minkowskiraum

Wir fassen hier die wichtigsten Eigenschaften zusammen. Der Minkowskiraum ist in der SRT der Raum der **Vierervektoren**. Diese bezeichnen raumzeitliche Ereignisse, d.h. Vektoren mit vier Komponenten

$$x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z). \quad (6.38)$$

Die  $x^\alpha$  sind die **kontravarianten** Komponenten des Vierervektors (vgl. MM) bezüglich eines Inertialsystems  $K$ .

Die Transformation der Komponenten zwischen zwei verschiedenen Inertialsystemen  $K$  und  $K'$  erfolgt gemäß einer **Lorentztransformation**

$$x' = \Lambda x + b, \quad x'^\alpha = \Lambda_\delta^\alpha x^\delta + b^\alpha, \quad (\text{Einsteinsche Summationskonvention}) \quad (6.39)$$

mit der Matrix der Lorentztransformation  $\Lambda$ . Der Fall  $b = 0$  heißt *homogene Lorentztransformation*, der Fall  $b \neq 0$  heißt *inhomogene Lorentztransformation*. Die spezielle LT mit Relativgeschwindigkeit  $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_1$  hat die Form

$$\Lambda(v) = (\Lambda_\delta^\alpha) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta \equiv \frac{v}{c}. \quad (6.40)$$

LTs haben die Gruppeneigenschaft. Die inhomogenen LTs bilden die **Poincaré-Gruppe**, die homogenen LTs die **Lorentz-Gruppe**.

Wir definieren den *vierdimensionalen Abstand* zweier Vektoren  $x^\alpha, y^\alpha$  im selben System  $K$  als

$$z^2 \equiv (z^0)^2 - (z^1)^2 - (z^2)^2 - (z^3)^2, \quad z^\alpha \equiv x^\alpha - y^\alpha. \quad (6.41)$$

Es gilt  $z^2 = 0$ , falls sich das z.B. auf das Aussenden (bei  $x^\alpha$ ) und Messen eines Lichtstrahls (bei  $y^\alpha$ ) bezieht. Wir schreiben diese *quadratische Form* mit Hilfe des **metrischen Tensors**  $g$ ,

$$z^2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^4 z^\alpha g_{\alpha\beta} z^\beta \equiv z^\alpha g_{\alpha\beta} z^\beta, \quad g = (g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6.42)$$

Eine der wichtigsten Eigenschaften der LTs ist, dass sie den vierdimensionalen Abstand invariant lassen. Wir überprüfen das mit der speziellen LT Gl. (6.40),

$$\begin{aligned} (z')^2 &= (z'^0, z'^1, z'^2, z'^3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z'^0 \\ z'^1 \\ z'^2 \\ z'^3 \end{pmatrix} \\ &= (z^0, z^1, z^2, z^3) \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^0 \\ z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix} \\ &= (z^0, z^1, z^2, z^3) \begin{pmatrix} \gamma^2(1-\beta^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2(\beta^2-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^0 \\ z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix} = z^2. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Die (homogenen) LTs haben also die wichtige Eigenschaft

$$\begin{aligned} \Lambda^T g \Lambda &= g \\ \rightsquigarrow z'^2 &\equiv (z')^T g z' = z^T \Lambda^T g \Lambda z = z^T g z \equiv z^2. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Weiterführende Literatur: z. B. GOENNER, FLIESSBACH, SCHECK.

## 7. SCHWINGUNGEN

In bestimmten Gebieten der Mechanik hat sich eine relativ spezialisierte Beschreibungsweise entwickelt, insbesondere natürlich für integrable Systeme. Beispiele sind das Keplerproblem, der starre Körper (Trägheitstensor, Euler-Winkel, schwerer symmetrischer Kreisel), und die im Folgenden diskutierten kleinen Schwingungen.

Wir werden mit dem parametrischen Oszillator und den nichtlinearen Schwingungen allerdings auch das erste Mal mit Konzepten der Theorie dynamischer Systeme Bekanntschaft machen (Stabilität, Monodromie-Matrix, Grenzzyklen), die dann im letzten Kapitel dieser Vorlesung systematisiert werden sollen.

### 7.1 Kleine Schwingungen

Kleine Schwingungen spielen eine wichtige Rolle als Modellsystem nicht nur in der Mechanik, sondern auch in anderen Gebieten der Physik, z.B. Molekül- und Festkörperphysik, Quantenmechanik, bis hin zu modernen Quantenfeldtheorien. Das zugrundeliegende mechanische Problem ist letztendlich das eines Systems von mit Federn gekoppelten Massen, deren Bewegung (die relativ komplex ausssehen kann) man durch geschickte Koordinatenwahl auf Überlagerungen von Eigenschwingungen reduzieren kann.

#### 7.1.1 Lagrange-Funktion

Wir betrachten ein System, dessen potentielle Energie  $V$  sich in generalisierten Ortskoordinaten  $x_1, \dots, x_f$  um ein lokales Minimum und den Punkt  $\mathbf{x}_0$  entwickeln lässt,

$$V(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^f \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right) q_i q_j + O(q_k^3), \quad \mathbf{q} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \quad (7.1)$$

wobei die  $q_i$  die Komponenten des Vektors  $\mathbf{q}$  sind, der die Auslenkungen aus der Ruhelage  $\mathbf{x}_0$  angibt. Da es sich um ein lokales Minimum handelt, verschwinden die ersten Ableitungen.

Man nähert jetzt die potentielle Energie  $V$  quadratisch, indem man alle höheren Terme der Taylor-Entwicklung vernachlässigt, und schreibt

$$V(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \underline{\underline{V}} \mathbf{q}, \quad \mathbf{q} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \quad (7.2)$$

mit der *Matrix*  $\underline{\underline{V}}$  der zweiten Ableitungen des Potentials an der Stelle  $\mathbf{x}_0$ . Da  $V(\mathbf{x}_0)$  eine feste Konstante ist, hängt der Wert der potentiellen Energie also nur von den *kleinen*

Auslenkungen  $q_i$  ab und wird durch die obige *quadratische Form*  $\frac{1}{2}\mathbf{q}^T\underline{\underline{V}}\mathbf{q}$  mit der symmetrischen Matrix  $\underline{\underline{V}}$  definiert. Im Folgenden lassen wir die Konstante  $V(\mathbf{x}_0)$  weg, da die EL-Bewegungsgleichungen der Koordinaten  $q_i$  von ihr natürlich nicht abhängen.

Entsprechend setzt man für die *kinetische Energie* einen Ausdruck an, der quadratisch in den verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$  ist,

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\underline{\underline{T}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (7.3)$$

was für alle praktischen Fälle hinreichend allgemein ist. Damit schreiben wir die Lagrange-Funktion unseres Systems als

$$L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\underline{\underline{T}}\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\underline{\underline{V}}\mathbf{q}, \quad (7.4)$$

wobei wir hier und im Folgenden die Striche unter  $T$  und  $V$  weglassen und damit jeweils die  $f \times f$  Matrizen der quadratischen Formen der kinetischen und potentiellen Energie bezeichnen.

Physikalisch beschreibt diese Lagrange-Funktion ein **Systeme von  $f$  gekoppelten linearen harmonischen Oszillatoren**, wie wir im Folgenden sehen werden.

### 7.1.2 Normalkoordinaten

Ziel ist es, durch Einführung neuer Koordinaten die Lagrange-Funktion und damit die Bewegungsgleichungen nochmals wesentlich zu vereinfachen. Wir führen neue Koordinaten  $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_f)^T$  ein,

$$\mathbf{q} = A\mathbf{Q}, \quad A \equiv (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_f). \quad (7.5)$$

Hierbei ist  $A$  eine reguläre Matrix aus Spaltenvektoren  $\mathbf{a}_i$ , die als Vektoren der **Normalmoden (Eigenmoden)** bezeichnet wird. Es gilt z.B.

$$\mathbf{Q} = (1, 0, \dots, 0)^T \rightsquigarrow \mathbf{q} = \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{Q} = (0, 1, \dots, 0)^T \rightsquigarrow \mathbf{q} = \mathbf{a}_2, \quad (7.6)$$

d.h.  $Q_1$  entspricht der ersten Normalmode,  $Q_2$  der zweiten usw. Wir bestimmen die Vektoren der Normalmoden so, dass die Lagrange-Funktion und damit die Bewegungsgleichungen in den neuen Koordinaten  $\mathbf{Q}$  *entkoppeln*, d.h.

$$L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\underline{\underline{T}}\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\underline{\underline{V}}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{Q}}^T\dot{\mathbf{Q}} - \frac{1}{2}\mathbf{Q}^T D \mathbf{Q} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^f (\dot{Q}_i^2 - \lambda_i Q_i^2), \quad (7.7)$$

wobei  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_f)$  eine zu bestimmende Diagonalmatrix ist. In den neuen Koordinaten  $\mathbf{Q}$  entkoppeln die Euler-Lagrange-Gleichungen zweiter Art,

$$\ddot{Q}_i(t) + \lambda_i Q_i(t) = 0, \quad (7.8)$$

was sofort in der Form

$$Q_i(t) = \alpha_i e^{i\omega_i t} + \beta_i e^{-i\omega_i t}, \quad \omega_i^2 = \lambda_i \quad (7.9)$$

mit den jeweils zwei Konstanten  $\alpha_i, \beta_i$ , die z.B. durch die Anfangsbedingung festgelegt werden, gelöst wird. Zur Lösung benötigen wir also nur die Diagonalmatrix  $D$  und die Matrix  $A$  der Normalmoden, ohne dann noch weitere Differentialgleichungen lösen zu müssen: damit ist das Problem auf ein reines Lineare-Algebra-Problem reduziert.

Wir bestimmen die Normalmoden  $\mathbf{a}_i$  durch Einsetzen von  $\mathbf{q} = A\mathbf{Q}$  in die Lagrange-Funktion,

$$L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{Q}}^T A^T T A \dot{\mathbf{Q}} - \frac{1}{2}\mathbf{Q}^T A^T V A \mathbf{Q}, \quad (7.10)$$

es müssen also die **simultanen Ähnlichkeitstransformationen**

$$A^T T A = 1 \quad (7.11)$$

$$A^T V A = D \quad (7.12)$$

gelten, aus denen sofort

$$A^T V A = A^T T A D \rightsquigarrow V A = T A D \quad (7.13)$$

folgt, denn  $A$  und damit  $A^T$  soll nicht-singulär sein. Die letzte Matrix-Gleichung können wir als **verallgemeinertes Eigenwertproblem** aufschreiben,

$$V \mathbf{a}_i = \lambda_i T \mathbf{a}_i \quad (7.14)$$

$$V(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_f) = T(\lambda_1 \mathbf{a}_1, \dots, \lambda_f \mathbf{a}_f) \leftrightarrow V A = T A D, \quad A \equiv (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_f). \quad (7.15)$$

Die positiven Wurzeln der Eigenwerte  $\lambda_i$  werden als **Eigenfrequenzen**  $\omega_i$  bezeichnet,

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_i}, \quad (7.16)$$

vgl Gl. (7.9). Damit die Gleichung  $V \mathbf{a}_i = \lambda_i T \mathbf{a}_i$  nichttriviale ( $\mathbf{a}_i \neq 0$ ) Lösungen hat, muss die Determinante des zugehörigen linearen Gleichungssystems verschwinden, d.h.

$$\det(V - \lambda T) = 0. \quad (7.17)$$

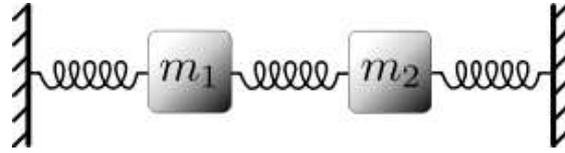
Das ist analog zur üblichen Bestimmung von Eigenwerten einer Matrix  $V$ , nur dass hier statt der sonst üblichen Einheitsmatrix 1 die Matrix  $T$  auftritt. Die Lösungsstrategie ist also analog zur üblichen Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren: Wir finden zunächst die Eigenfrequenzen, d.h. die Lösungen  $\lambda_i$  von  $\det(V - \lambda_i T) = 0$ , und benutzen diese zum Bestimmen der Normalmoden, d.h. der Eigenvektoren  $\mathbf{a}_i$  in  $V \mathbf{a}_i = \lambda_i T \mathbf{a}_i$ .

AUFGABE: Zeige, dass für positiv definites  $T$  die Eigenfrequenzen reell sind.

### 7.1.3 Bemerkungen zur Normalform von $L$ , Hamiltonfunktion $H$

Die neuen Koordinaten  $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_f)^T$  in der Lagrangefunktion  $L$ , Gl. (7.7), sind insofern abstrakt, als dass sie die physikalische Dimension  $\text{kg}^{1/2} \text{m}$  haben, aber so etwas kennen wir ja bereits von anderen kanonischen Transformationen. Die zugehörige Hamiltonfunktion  $H$  erhalten wir mittels der kanonischen Impulse

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} = \dot{Q}_i \quad (7.18)$$



**Fig. 7.1:** Normalmoden ©WIKIPEDIA <http://en.wikipedia.org/wiki/Normalmode>

als

$$H = \sum_{i=1}^f \left( \frac{1}{2} P_i^2 + \frac{1}{2} \omega_i^2 Q_i^2 \right). \quad (7.19)$$

Wir erkennen, dass es sich hierbei um ein System von  $f$  entkoppelten harmonischen Oszillatoren mit Masse  $m_i = 1$  handelt. Das Entscheidende sind natürlich die Bewegungsgleichungen (EL oder Hamilton), deren Lösung wir wegen der Entkopplung immer sofort hinschreiben können, vgl. Gl. (7.9). Die Standard-Form Gl. (7.19) spielt eine zentrale Rolle bei der Beschreibung kleiner Schwingungen in der Quantenmechanik. Dort entsprechen die  $\omega_i$  den Eigenfrequenzen der  $f$  **Phononenmoden**.

## 7.1.4 Beispiele

### 7.1.4.1 Gekoppelte Massenpunkte

Wir betrachten das System aus Kap. 2.2.2.3,

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 - \left[ \frac{1}{2} k q_1^2 + \frac{1}{2} k q_2^2 + \frac{1}{2} k (q_1 - q_2)^2 \right] \quad (7.20)$$

$$(7.21)$$

also

$$T = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad V = k \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (7.22)$$

Für den einfacheren Spezialfall  $m_1 = m_2$  finden wir die Eigenfrequenzen aus

$$\det(V - \lambda T) = 0 \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 2k - m\lambda & -k \\ -k & 2k - m\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (7.23)$$

$$\rightsquigarrow (-2k + m\lambda)^2 - k^2 = 0 \rightsquigarrow -2k + m\lambda = \pm k \quad (7.24)$$

$$\rightsquigarrow \lambda_1 = \frac{k}{m}, \quad \lambda_2 = 3\frac{k}{m}. \quad (7.25)$$

Die Eigen(winkel)frequenzen  $\omega_i$  sind also

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{3\frac{k}{m}}. \quad (7.26)$$

Das stimmt mit dem überein, was wir in MM bereits direkt durch Lösung der gekoppelten Bewegungsgleichungen mittels **Exponentialansatz** berechnet hatten. Die zugehörigen Normalmoden (Eigenmoden)  $\mathbf{a}_i$  finden wir als **Eigenvektoren von  $V - \lambda_i T$** , d.h.

$$(V - \lambda_1 T)\mathbf{a}_1 = 0 \rightsquigarrow \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{zu } \omega_1^2 \quad (7.27)$$

$$(V - \lambda_2 T)\mathbf{a}_2 = 0 \rightsquigarrow \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{zu } \omega_2^2. \quad (7.28)$$

AUFGABE:

1. Bestimmen Sie für das obige Beispiel die Lösung des Anfangswertproblems  $x_1(t=0) = x_{10}$ ,  $x_2(t=0) = x_{20}$ ,  $\dot{x}_1(t=0) = v_{10}$ ,  $\dot{x}_2(t=0) = v_{20}$ .
2. Bestimmen Sie mit der obigen Methode die Eigenfrequenzen und Normalmoden eines linearen dreiatomigen ‘Federnmodell-Moleküls’.

#### 7.1.4.2 Ebenes Doppelpendel

Hier hat man mit den Winkeln  $(q_1, q_2) = (\phi_1, \phi_2)$  (SKIZZE), Massen  $m_1, m_2$ , Fadenlängen  $l_1, l_2$ , und Erdbeschleunigung  $g$  die Matrizen  $T$  und  $V$  der Lagrangefunktion für kleine Schwingungen

$$T = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \\ m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)gl_1 & 0 \\ 0 & m_2 gl_2 \end{pmatrix}. \quad (7.29)$$

## 7.2 Lineare Systeme, Harmonischer Oszillator

### 7.2.1 Bewegungsgleichung

Der lineare harmonische Oszillator ist eines der wichtigsten Modellsysteme der theoretischen Physik. (Vgl. MM) Dieser erfüllt im ungedämpften Fall die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t) \quad (7.30)$$

mit der äußeren ‘Kraft’  $f(t)$ . Die zugehörige Hamilton-Funktion ist die eines Teilchens der Masse  $m$  im Potential  $V(x, t)$  in  $d = 1$  räumlicher Dimensionen,

$$H(t) = \frac{p^2}{2m} + V(x, t), \quad V(x, t) \equiv \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - xmf(t). \quad (7.31)$$

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen führen auf

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{p(t)}{m} \\ \dot{p}(t) &= -m\omega^2 x(t) + mf(t). \end{aligned} \quad (7.32)$$

Für den ungetriebenen Fall  $f \equiv 0$  ist die zweite Gleichung das Hookesche Gesetz mit dem elastischen Modul ('Federkonstante')  $k$ ,

$$\dot{p} = -kx \rightsquigarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (7.33)$$

Eine einfache Modellierung von Dämpfung durch Dissipation erfolgt durch Einführung eines **Reibungsterms**,

$$\ddot{x}(t) + \frac{1}{\tau}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t), \quad \tau > 0. \quad (7.34)$$

Wir schreiben die Bewegungsgleichungen in unserer Standard-Form für Systeme von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen,

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t) \quad (7.35)$$

mit

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \frac{p(t)}{m} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix}. \quad (7.36)$$

### 7.2.2 Homogener Fall. Zeitentwicklungsoperator

(Vgl. BRONSTEIN, Skript SCHÖNHAMMER) Hier betrachten wir zunächst den homogenen Fall ohne äußere Kraft, d.h.  $f(t) = 0$ , verallgemeinern aber ein wenig, in dem wir ein *lineares System*

$$\mathbf{y}'(t) = A(t)\mathbf{y}(t) \quad (7.37)$$

mit einer *zeitabhängigen* Matrix  $n \times n$ -Matrix  $A(t)$  mit beliebig oft differenzierbaren Koeffizienten zulassen, was beispielsweise beim Oszillator mit zeitabhängiger Frequenz  $\omega = \omega(t)$  auftritt (siehe unten für eine Anwendung beim parametrischen Oszillator).

Ähnlich wie bei der Diskussion des Hamiltonschen Flusses  $\phi^t : \mathbf{X}(0) \rightarrow \mathbf{X}(t)$ , vgl. Gl. (4.39), betrachten wir die Lösung des Anfangwertproblems Gl. (7.37) als Abbildung im Raum der  $\mathbf{y}(t)$  - wegen der Linearität der Gleichung ist das eine lineare Abbildung

$$\mathbf{y}(t_0) \rightarrow \mathbf{y}(t) \equiv U(t, t_0)\mathbf{y}(t_0) \quad (7.38)$$

mit einer reellen  $n \times n$ -Matrix, die den Anfangswert  $\mathbf{y}(t_0)$  linear auf den Endpunkt  $\mathbf{y}(t)$  zur Zeit  $t$  abbildet. Einsetzen in Gl. (7.37) liefert

$$\left( \frac{d}{dt}U(t, t_0) - A(t)U(t, t_0) \right) \mathbf{y}(t_0) = 0, \quad (7.39)$$

und da das für beliebige Anfangswerte gilt, folgt

$$\frac{d}{dt}U(t, t_0) = A(t)U(t, t_0), \quad U(t_0, t_0) = E, \quad \text{Zeitentwicklungsoperator } U(t, t_0) \quad (7.40)$$

Hierbei ist  $E$  die  $n \times n$ -Einheitsmatrix. Manchmal bezeichnet man den Zeitentwicklungsoperator auch als **Propagator** des Systems. Die Propagator-Matrix erzeugt also die **Zeitentwicklung** von  $\mathbf{y}(t = t_0)$  hin zu  $\mathbf{y}(t \neq t_0)$ . Meistens erfolgt die Zeitentwicklung hin zu größeren Zeiten  $t > t_0$ .

Explizit erhält man die Matrix  $U(t, t_0)$ , indem man das AWP (Anfangswertproblem)  $\mathbf{y}'(t) = A(t)\mathbf{y}(t)$  für die Basis der  $n$  Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_i = \mathbf{y}_i(t = t_0)$  als Anfangsbedingung zur Zeit  $t_0$  löst. Die zugehörigen Lösungen  $\mathbf{y}_i(t)$  bilden dann ein **Fundamentalsystem** der linearen DGL Gl. (7.37), und die Spaltenvektoren dieses Fundamentalsystems definieren den Zeitentwicklungsoperator  $U(t, t_0)$  in der Basis der Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_i$ , d.h.

$$U(t, t_0) = (\mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_n(t)). \quad (7.41)$$

### 7.2.2.1 Zeitunabhängiges $A$

Wir wiederholen (MM) die Lösung durch die Exponentialfunktion der Matrix  $A$ ,

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t), \quad \mathbf{y}(t = t_0) = \mathbf{y}_0 \rightsquigarrow \mathbf{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{y}_0, \quad (7.42)$$

der Zeitentwicklungsoperator  $U(t, t_0)$  ist hier also durch

$$U(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}, \quad \text{Zeitentwicklungsoperator (A konstant)} \quad (7.43)$$

gegeben.

Die konkrete Berechnung der Exponentialfunktion geht am besten, wenn man die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix kennt. Wir machen die Annahme, dass die Matrix  $A$   $n$  linear unabhängige Eigenvektoren hat. Dann folgt

$$\exp(At) = \exp(CDC^{-1}t) = C \exp(Dt)C^{-1} = C \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} C^{-1}, \quad (7.44)$$

wobei der zweite Schritt durch Benutzung der Potenzreihe erfolgt. Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= A\mathbf{y}(t) \rightsquigarrow \\ \mathbf{y}(t) &= C \exp(Dt)C^{-1}\mathbf{y}(t = 0) = C \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} C^{-1}\mathbf{y}(t = 0) \end{aligned} \quad (7.45)$$

Damit ist die Lösung direkt geschlossen ausgedrückt mittels der Eigenwerte  $\lambda$  von  $A$ , der Matrix  $C$  der Eigenvektoren von  $A$  und der Anfangsbedingung  $\mathbf{y}(t = 0)$  zur Zeit  $t = 0$ .

Schließlich erinnern wir uns (MM): sei eine  $n \times n$ -Matrix  $A$  mit  $n$  linear unabhängigen Eigenvektoren  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  zu den Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  gegeben. Wir bilden die Matrix der (Spalten)Eigenvektoren von  $A$ , dann gilt

$$\begin{aligned} C &\equiv (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \rightsquigarrow \\ AC &= (A\mathbf{x}_1, \dots, A\mathbf{x}_n) = (\lambda_1\mathbf{x}_1, \dots, \lambda_n\mathbf{x}_n) \end{aligned} \quad (7.46)$$

$$\begin{aligned} &= (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)D, \quad D \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \rightsquigarrow \\ A &= CDC^{-1} \leftrightarrow D = C^{-1}AC. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Damit ist die Transformation der Matrix  $A$  auf Diagonalform explizit gefunden.

### 7.2.2.2 Eigenschaften des Zeitentwicklungsoperators

- Der Zeitentwicklungsoperator  $U(t, t_0)$  des linearen DGL Systems  $\mathbf{y}'(t) = A(t)\mathbf{y}(t)$  erfüllt

$$\frac{d}{dt}U(t, t_0) = A(t)U(t, t_0), \quad U(t_0, t_0) = E. \quad (7.48)$$

- Es gilt für Zeiten  $t_0, t_1, t_2$

$$U(t_2, t_0) = U(t_2, t_1)U(t_1, t_0), \quad \text{Chapman-Kolmogorov-Gleichung} \quad (7.49)$$

- Für

$$W(t, t_0) \equiv \det U(t, t_0), \quad \text{Wronski-Determinante} \quad (7.50)$$

gilt die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}W(t, t_0) = \text{Tr}A(t)W(t, t_0), \quad W(t_0, t_0) = 1, \quad (7.51)$$

wobei  $\text{Tr}A(t)$  die *Spur* der Matrix  $A(t)$  ist.

AUFGABE: Beweise die letzten beiden Punkte.

### 7.2.2.3 Anwendung: ungedämpfter Oszillator

In unserem Fall Gl. (7.36)  $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t)$  mit

$$\mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.52)$$

(ohne Dämpfung) sind die Eigenwerte  $\lambda_{1/2}$  und Eigenvektoren  $\mathbf{x}_{1/2}$  von  $A$

$$\lambda_{1/2} = \pm i\omega, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix}. \quad (7.53)$$

Konkret erhält man daraus die Matrizen  $C$  und  $C^{-1}$ , also

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{-2i\omega} \begin{pmatrix} -i\omega & -1 \\ -i\omega & 1 \end{pmatrix} \quad (7.54)$$

und damit (Nachrechnen als AUFGABE)

$$\begin{aligned} U(t,0) \equiv e^{At} &= \frac{1}{-2i\omega} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\omega & -1 \\ -i\omega & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{\sin \omega t}{\omega} \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.55)$$

Wir verifizieren sofort, dass bei  $t = 0$  die Einheitsmatrix herauskommt.

### 7.2.3 Inhomogene Gleichung: Getriebener Harmonischer Oszillator

Die Gesamtlösung der Differentialgleichung

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t) \quad (7.56)$$

ist eine Linearkombination (vgl. MM) aus der Lösung für den homogenen Fall (die die Anfangsbedingung erfüllt) und der speziellen Lösung für den inhomogenen Fall (die zur Anfangszeit verschwindet),

$$\mathbf{y}(t) = U(t, t_0)\mathbf{y}(t = t_0) + \int_{t_0}^t dt' U(t, t')\mathbf{b}(t'). \quad (7.57)$$

(Nachprüfen durch Differenzieren als AUFGABE).

Konkret folgt also für unseren getriebenen harmonischen Oszillator mit Anfangszeit  $t_0 = 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{\sin \omega t}{\omega} \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ &+ \int_0^t dt' \begin{pmatrix} \cos \omega(t-t') & \frac{\sin \omega(t-t')}{\omega} \\ -\omega \sin \omega(t-t') & \cos \omega(t-t') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(t') \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7.58)$$

und damit durch Komponentenvergleich für  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x \\ p/m \end{pmatrix}$

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{p_0}{m} \frac{\sin \omega t}{\omega} + \int_0^t dt' \frac{\sin \omega(t-t')}{\omega} f(t') \quad (7.59)$$

$$p(t) = -m\omega x_0 \sin \omega t + p_0 \cos \omega t + m \int_0^t dt' \cos \omega(t-t') f(t'). \quad (7.60)$$

### 7.2.4 Einfaches Umskalieren von Differentialgleichungen

Beim linearen harmonischen Oszillator Gl. (7.30)

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (7.61)$$

vereinfacht man sich häufig bei numerischen Berechnungen das Leben durch *Umskalieren*, es wird dann die Zeit einfach in ‘Einheiten von  $1/\omega$  gemessen’ bzw. etwas genauer, man *skaliert* die Zeit  $t$  um, indem man eine dimensionslose Zeitvariable

$$\tau = \omega t \quad (7.62)$$

einführt. Formal geschrieben hat man also

$$t(\tau) \equiv \frac{\tau}{\omega}, \quad \tilde{x}(\tau) = x(t(\tau)) \quad (7.63)$$

$$\rightsquigarrow \frac{d^2}{d\tau^2} \tilde{x}(\tau) = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{d}{dt} x(t) \frac{dt}{d\tau} \right) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) \frac{1}{\omega^2} = -x(t) = -\tilde{x}(\tau) \quad (7.64)$$

$$\rightsquigarrow \frac{d^2}{d\tau^2} \tilde{x}(\tau) + \tilde{x}(\tau) = 0. \quad (7.65)$$

Durch das Umskalieren mit dem konstanten  $\omega$  bleibt die Gleichung des Oszillators form-invariant, und man schreibt deshalb statt der umständlichen Tilde/tau-Form von vorneherein einfach

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0 \quad (7.66)$$

und setzt stillschweigend die Messung der Zeit in Einheiten von  $1/\omega$  voraus. Formal gesehen setzt man in der ursprünglichen Gleichung  $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$  die Winkelfrequenz  $\omega = 1$ .

Etwas salopper kommt man auf diese Form durch

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \rightsquigarrow \frac{d^2}{d(\omega t)^2} x(t) + x(t) = 0 \rightsquigarrow \frac{d^2}{d\tau^2} \tilde{x}(\tau) + \tilde{x}(\tau) = 0. \quad (7.67)$$

AUFGABEN:

Man betrachte die DGL des **gedämpften harmonischen Oszillators**

$$\ddot{x}(t) + \frac{1}{\tau} \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t), \quad \tau > 0. \quad (7.68)$$

a) Wie funktioniert das Umskalieren der Zeit  $t = \tilde{t}/\omega_0$  beim gedämpften harmonischen Oszillator Gl. (7.68)?

b) Berechne die Matrix des Zeitentwicklungsoperators  $U(t, t_0)$  und zeige damit, dass sich für homogene Anfangsbedingungen  $x_0 = p_0 = 0$  zur Zeit  $t_0$  die Lösung für  $x(t)$  in der Form

$$x(t) = \int_{t_0}^{\infty} dt' G(t-t') f(t') \quad (7.69)$$

$$G(t) = \theta(t) e^{-\frac{t}{2\tau}} \frac{1}{\omega'} \sin(\omega' t), \quad \omega' \equiv \omega_0 \sqrt{1 - (2\tau\omega_0)^{-2}} \quad (7.70)$$

schreiben lässt. Hierbei ist  $\theta(t)$  die **Heavyside-Stufenfunktion**, d.h.  $\theta(t < 0) = 0$  und  $\theta(t \geq 0) = 1$ . Die Funktion  $G(t)$  heißt **Greensche Funktion**.

c) Nachrechnen der Fouriertransformierten

$$\tilde{G}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt G(t) e^{i\omega t} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{i\omega}{\tau}}. \quad (7.71)$$

d) Benutze  $\tilde{G}(\omega)$ , um die Lösung  $x(t)$  für eine periodische Kraft  $f(t) = e^{i\Omega t}$  zu berechnen (Hinweis: Vertauschen von Integrationen und Benutzen der Delta-Funktion, vgl. MM).

### 7.3 Parametrische Resonanz

Dieses ist der Fall der ‘Schaukel’, d.h. eines schwingenden Systems, dessen Frequenz selbst zeitabhängig ist. Das einfachste Modellsystem ist wieder eine Oszillator-Differentialgleichung vom Typ

$$\ddot{x}(t) + \omega^2(t)x(t) = 0, \quad (7.72)$$

wobei keine äußere Kraft wirkt, die Winkelfrequenz  $\omega(t)$  allerdings zeitabhängig ist. Für den allgemeinen Fall lässt sich dieses Problem nicht mehr analytisch lösen.

AUFGABE: Herleitung der Form  $\ddot{x}(t) + \omega^2(t)x(t) = 0$  für das Fadenpendel im homogenen Schwerfeld (Schwere-Beschleunigung  $g$ ) mit zeitlich variabler Fadenlänge  $l$ .

#### 7.3.1 Zeitlich periodische Koeffizienten: Floquet-Theorie

(SKRIPT SCHÖNHAMMER, BRONSTEIN, GREINER II). Wie bei der Schaukel hat man häufig eine zeitlich periodische Änderung der Koeffizienten. Falls die Periode dieser zeitlichen Änderung  $T$  ist, hat man also  $\omega(t) = \omega(t + T)$ . Selbst in diesem Fall ist eine analytische Lösung i.A. nicht möglich, man kann aber einige allgemeine Aussagen im Rahmen der sogenannten **Floquet-Theorie** machen.

Wir betrachten also ein homogenes DGL-System zeitlich periodischer Koeffizienten-Matrix  $A(t)$ ,

$$\mathbf{y}'(t) = A(t)\mathbf{y}(t), \quad A(t) = A(t + T), \quad T > 0. \quad (7.73)$$

Zunächst gilt wegen der Periodizität der DGL für den Zeitentwicklungsoperator  $U(t, t_0)$  die Gleichung

$$U(t, t_0) = U(t + T, t_0 + T), \quad (7.74)$$

denn Anfangen zur Zeit  $T + t_0$  ist genauso gut wie Anfangen zur Zeit  $t_0$ . Die Zeitentwicklung über ein beliebiges Intervall  $[t_0, t]$  lässt sich also aus Potenzen von des **Floquet-Operators (Monodromie-Matrix)**, d.h. des Zeitentwicklungsoperator über eine Periode  $T$ ,

$$\mathcal{F}(t_0) \equiv U(T + t_0, t_0), \quad \text{Floquet-Operators (Monodromie-Matrix)}, \quad (7.75)$$

und des Zeitentwicklungsoperators für ‘die Restzeit’  $U(t + t_0, t_0)$  mit  $0 \leq t \leq T$  zusammensetzen (SKIZZE der Zeitachse), d.h.

$$U(t + mT + t_0, t_0) = U(t + t_0, t_0)[\mathcal{F}(t_0)]^m, \quad 0 \leq t \leq T, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (7.76)$$

Numerisch bestimmt man die  $n \times n$ -Matrix  $\mathcal{F}(t_0)$  wieder durch Lösen des AWP  $\mathbf{y}'(t) = A(t)\mathbf{y}(t)$  für die  $n$  AB  $\mathbf{y}_i(t_0) = \mathbf{e}_i$ .

### 7.3.1.1 Stabilität und Aufschaukeln

Für lange Zeiten wird also das Verhalten des periodisch getriebenen Systems durch den Floquet-Operator, der ja dann vielfach potenziert wird, bestimmt - der ‘Rest’  $U(t + t_0, t_0)$  ist ja nur eine Zeitentwicklung über ein vergleichsweise kurzes Intervall. Zur Frage des ‘Aufschaukelns’ muss man sich mit den Eigenwerten von  $\mathcal{F}$  auseinandersetzen,

$$\mathcal{F}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i, \quad \lambda_i \text{ Floquet-Eigenwert} . \quad (7.77)$$

Es gilt

$$\mathcal{F}^m \mathbf{u}_i = \lambda_i^m \mathbf{u}_i. \quad (7.78)$$

Falls für einen der Floquet-Eigenwerte  $|\lambda_i| > 1$  gilt, so wächst für den zugehörigen Eigenvektor als Anfangsbedingung, d.h.  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{u}_i$ , die Lösung der DGL  $\mathbf{y}'(t) = A(t)\mathbf{y}(t)$  mit der Zeit an, denn es gilt dann ja

$$\mathbf{y}(mT + t_0) = \mathcal{F}^m \mathbf{u}_i = \lambda_i^m \mathbf{u}_i \rightsquigarrow \|\mathbf{y}(mT + t_0)\| \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty. \quad (7.79)$$

### 7.3.1.2 Floquet-Theorem

Wir schreiben die Floquet-Multiplikatoren in Exponentialform,

$$\mathcal{F}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i, \quad \lambda_i \equiv e^{\sigma_i T}, \quad \sigma_i \text{ Floquet-Exponent} . \quad (7.80)$$

(Wir lassen im Folgenden das  $t_0$  in der Bezeichnung von  $\mathcal{F}(t_0)$  weg. Häufig setzt man auch einfach  $t_0 = 0$ ). Wir schreiben dann den Floquet-Operator in Exponential-Form,

$$\mathcal{F} = e^{ST} \quad (7.81)$$

wobei die  $n \times n$ -Matrix  $S$  die Eigenwerte  $\sigma_i$  hat. In der Basis der Eigenvektoren  $\mathbf{u}_i$  ist die Matrix  $S$  dann diagonal. Beachte, dass in dieser Definition die Floquet-Exponenten  $\sigma_i$  die Dimension einer zeitliche *Rate* haben, also  $s^{-1}$ .

Es gilt folgender

**Satz 26.** Sei  $\mathbf{y}'(t) = A(t)\mathbf{y}(t)$  ein lineares System von  $n$  DGL mit zeitlich periodischer Matrix  $A(t) = A(t + T)$  mit Periode  $T$ . Dann läßt sich der Zeitentwicklungsoperator  $U(t, t_0)$  aus den  $n$  Fundamental-Lösungen des Systems schreiben als

$$U(t, t_0) = V(t)e^{S(t-t_0)}, \quad (7.82)$$

wobei  $S$  die  $n \times n$ -Matrix der **Floquet-Exponenten** und  $V(t) = V(t + T)$  eine  $T$ -periodische  $n \times n$ -Matrix mit  $V(t_0) = E$  (Einheitsmatrix) ist.

Zum Beweis erkennen wir zunächst, dass für die Zeitentwicklung über eine Periode wegen  $V(t_0 + T) = V(t_0) = E$  gilt:  $U(T + t_0, t_0) = e^{ST} = \mathcal{F}$ , wie es sein soll. Weiterhin benutzen wir

$$U(t, t_0) = U(t + T, t_0 + T) \rightsquigarrow V(t)e^{S(t-t_0)} = V(t + T)e^{S(t+T-t_0-T)}, \quad (7.83)$$

d.h. die Matrix  $V(t)$  muss periodisch sein,  $V(t) = V(t + T)$ .

### 7.3.2 Parametrischer Linearer Oszillator

(Skripte SCHÖNHAMMER, LINDBLAD) Wir betrachten jetzt ganz konkret den Fall von oben (einfache linearisierte ‘Schaukel’),  $\ddot{x}(t) + \omega^2(t)x(t) = 0$ , also

$$\mathbf{y}'(t) = A(t)\mathbf{y}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega(t) = \omega(t + T). \quad (7.84)$$

Der Floquet-Operator  $\mathcal{F}(t_0) \equiv U(T + t_0, t_0)$  ist also eine  $2 \times 2$ -Matrix (die i.A. numerisch bestimmt werden muss). Deren Floquet-Eigenwerte  $\lambda$  erfüllen die Gleichung

$$\lambda^2 - \lambda \text{Tr} \mathcal{F} + \det \mathcal{F} = 0. \quad (7.85)$$

Es gilt aber auch  $\text{Tr} A(t) = 0$ , was wegen Gl. (7.51) zu  $\det \mathcal{F}(t_0) = 1$  führt. Die zwei Eigenwerte  $\lambda_{\pm}$  des Zeitentwicklungsoperator  $\mathcal{F}(t_0)$  über eine Periode  $T$  lassen sich über die Spur  $\text{Tr} \mathcal{F}$  ausdrücken, somit

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left( \text{Tr} \mathcal{F} \pm \sqrt{[\text{Tr} \mathcal{F}]^2 - 4} \right), \quad \lambda_+ \lambda_- = 1. \quad (7.86)$$

und es gilt  $\lambda_+ \lambda_- = \det \mathcal{F} = 1$ .

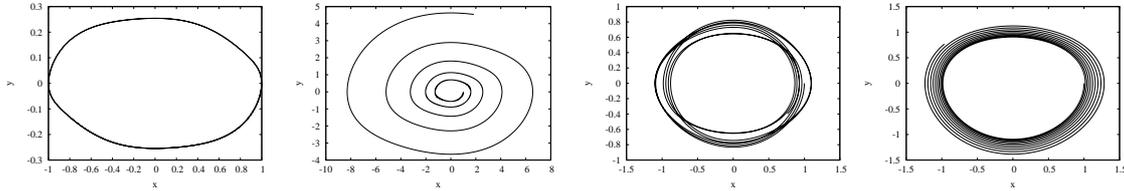
Für  $|\text{Tr} \mathcal{F}| < 2$  hat man zwei komplexe Eigenwerte  $\lambda_+ = \lambda_-^*$ , die zueinander konjugiert komplex sind und wegen  $\lambda_+ \lambda_- = 1$  deshalb den Betrag 1 haben. Für  $|\text{Tr} \mathcal{F}| \geq 2$  sind  $\lambda_{\pm}$  reell, und einer der Eigenwerte muss wegen  $\lambda_+ \lambda_- = 1$  betragsmäßig größer als eins sein: für diesen besteht dann Instabilität. Aufschaukeln von Lösungen (**parametrische Resonanz**) entsteht also für  $|\text{Tr} \mathcal{F}| \geq 2$ .

Konkret muss man den Floquet-Operator numerisch berechnen, um an  $|\text{Tr} \mathcal{F}|$  heranzukommen. Um eine Vorstellung von der Resonanzbedingung zu bekommen, betrachten wir eine externe, periodische Störung

$$\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + \epsilon \sin \omega_{\text{ext}} t) \quad (7.87)$$

mit externer Anregungsfrequenz  $\omega_{\text{ext}}$  und Stärke  $\epsilon$ , wobei  $\omega_0$  die Frequenz des ungestörten Oszillators bezeichnet. Wir können zumindest für den Grenzfall  $\epsilon = 0$  die Spur  $\text{Tr} \mathcal{F}$  berechnen, denn dann ist

$$\mathcal{F} = U(T, 0) = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 T & \frac{\sin \omega_0 T}{\omega_0} \\ -\omega_0 \sin \omega_0 T & \cos \omega_0 T \end{pmatrix}, \quad (7.88)$$



**Fig. 7.2:** Phasenraumdarstellung  $(x, y) = (x, \dot{x})$  des parametrischen Oszillators  $\ddot{x}(t) + \omega^2(t)x(t) = 0$  mit  $\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + \epsilon \sin \omega_{\text{ext}}t)$  für festes  $\epsilon = 0.3$ . Das Verhältnis  $\omega_0/\omega_{\text{ext}}$  ist (von links nach rechts) 0.25, 0.5, 0.75, 1.0. Anfangsbedingung  $x = 1, y = \dot{x} = 0$ . Integration von  $t = 0$  bis  $\omega_{\text{ext}}t = 60$ . Man beachte die unterschiedlichen Skalen in den vier Figuren.

einfach der Zeitentwicklungsoperator des harmonischen Oszillators über eine Periode  $T \equiv 2\pi/\omega_{\text{ext}}$  der externen Störung, vgl. Gl. (7.55). In diesem Fall ist

$$|\text{Tr}\mathcal{F}| = |2 \cos \omega_0 T|, \quad \epsilon = 0, \quad (7.89)$$

und der kritische Wert  $|\text{Tr}\mathcal{F}| = 2$  liefert als Resonanz-Bedingung  $\omega_0 T = n\pi$  oder

$$\omega_{\text{ext}} = \frac{2\omega_0}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.90)$$

Für  $\epsilon = 0$  passiert natürlich nichts. Wir können aber annehmen, dass die Resonanz-Bedingung Gl. (7.90) zumindest für kleine  $\epsilon$  näherungsweise erhalten bleibt. In einem Diagramm, in dem man  $\epsilon$  gegen  $\omega_0/\omega_{\text{ext}}$  aufträgt, setzen sich dann die kritischen Resonanz-Punkte bei  $\omega_0/\omega_{\text{ext}} = n/2$  'keilförmig' in  $\epsilon$ -Richtung fort (SKIZZE).

Es ist sinnvoll, sich zunächst auch erst einmal numerisch einen Überblick zu verschaffen. Dazu kann man das DGL System Gl. (7.84) mit einem einfachen Runge-Kutta-Verfahren auf einem Computer integrieren (für gute Numerik ist ein einfaches FORTRAN-Programm immer noch am besten). Im Phasenraum erkennen wir das Aufschaukeln der Lösung an der Resonanzbedingung, während außerhalb der Resonanz kein Aufschaukeln erfolgt. Man erkennt außerdem, dass das Aufschaukeln für das kleinste  $n = 1$ , d.h. bei der doppelten Anregungsfrequenz  $\omega_{\text{ext}} = 2\omega_0$ , viel stärker ist als z.B. für  $n = 2$  mit  $\omega_{\text{ext}} = \omega_0$ .

AUFGABE: Schreiben Sie ein FORTRAN oder C<sup>++</sup>-Programm zur Zeitentwicklung des parametrischen Resonators.

## 7.4 Nichtlineare Schwingungen

Unsere bisher untersuchten Schwingungen wurden durch *lineare* Differentialgleichungen beschrieben, im Falle eines Freiheitsgrades  $x(t)$  durch Gleichungen vom Typ

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = f(t), \quad (7.91)$$

die also linear in  $x(t)$  (und höheren Ableitungen) sind und wo in den Koeffizienten  $a(t)$ ,  $b(t)$  und der äußeren Kraft  $f(t)$  auch eine Zeitabhängigkeit zugelassen wird.

Nichtlineare Schwingungen eines Systems mit einem Freiheitsgrad werden hingegen allgemeiner durch Gleichungen vom Typ

$$\ddot{x} + a(x, t)\dot{x} + b(x, t) = 0 \quad (7.92)$$

beschrieben. Den Fall zeitunabhängiger Koeffizienten (die Zeit  $t$  taucht nicht explizit in den DGL-Koeffizienten auf) bezeichnet man als **autonom**. Ein allgemeiner autonomer Typ von Schwingungs-DGL für einen Freiheitsgrad ist (STROGATZ)

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \quad \text{Liénard-Gleichung} \quad (7.93)$$

#### 7.4.1 Nichtlinearer Oszillator ohne Dämpfung

Ohne den Dämpfungsterm  $f(x)\dot{x}(t)$  ist die Liénard-Gleichung einfach die Gleichung eines konservativen Systems in  $1d$  (und damit integrierbar, also durch eine einfache Integration lösbar, vgl. Kap. 1), d.h. eines Teilchens der Masse  $m$  in einem  $1d$ -Potential  $V(x)$ ,

$$m\ddot{x} = -V'(x), \quad (7.94)$$

z.B. für den **quartischen Oszillator** mit

$$V(x) = \alpha x^2 + \beta x^4. \quad (7.95)$$

Den Fall  $\alpha < 0, \beta > 0$  hatten wir bereits qualitativ bei der Diskussion von Phasenraumtrajektorien früher kennengelernt.

#### 7.4.2 Der van-der-Pol-Oszillator

Dieser Oszillator spielt eine sehr wichtige Rolle bei der Diskussion nichtlinearer Schwingungen. Er ist durch eine spezielle Liénard-Gleichung der Form

$$\ddot{x} + \kappa(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \kappa \geq 0, \quad \text{van-der-Pol-Oszillator} \quad (7.96)$$

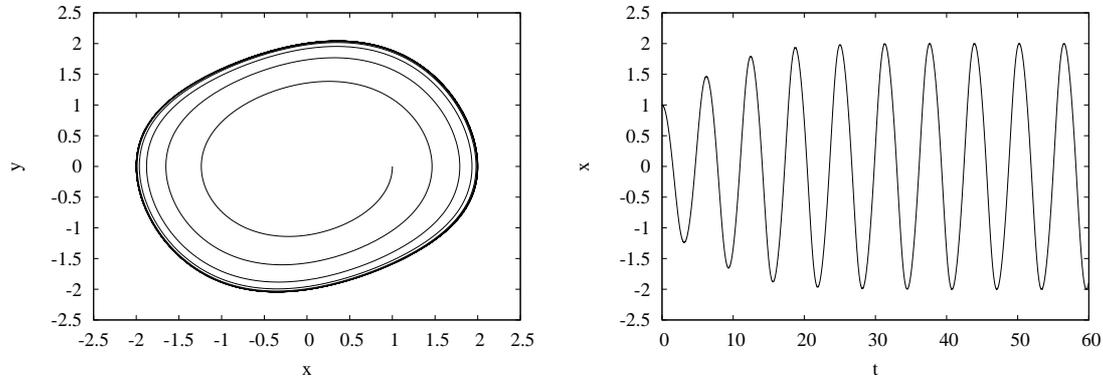
definiert und ist nicht analytisch lösbar. Alternativ schreiben wir das als System von DGL erster Ordnung (**dynamisches System**) in der Form  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ , hier also als zweidimensionales System für  $\mathbf{x} = (x, y)$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - \kappa(x^2 - 1)y. \end{aligned} \quad (7.97)$$

Für  $\kappa = 0$  ist reduziert sich die Gleichung auf den linearen harmonischen Oszillator Gl. (7.30)

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0 \quad (7.98)$$

ohne äußere Kraft mit Winkelfrequenz  $\omega = 1$ , also der Zeit gemessen in Einheiten von  $1/\omega$ .



**Fig. 7.3:** van-der-Pol-Oszillator mit  $\kappa = 0.2$ .

Für  $\kappa > 0$  wirkt der nichtlineare Term  $\kappa(x^2 - 1)\dot{x}$  wie eine (nichtlineare) positive Dämpfung für  $|x| > 1$ , aber wie eine *negative Dämpfung* für  $|x| < 1$ . Daraus resultiert ein äußerst interessantes Verhalten der Lösung  $x(t)$  von Gl. (7.96): Im zweidimensionalen Phasenraum der Punkte  $(x, \dot{x})$  laufen die Trajektorien für hinreichend große Zeiten auf einen eindeutig durch den Wert von  $\kappa$  festgelegten **Grenzzzyklus** zu (FIGUR). Gleichzeitig ist die Form der Oszillation  $x(t)$ , wie zu erwarten, zwar periodisch, aber nicht sinusförmig.

Bei der numerischen Berechnung (hier mittels eines **Runge-Kutta-Verfahrens** zur Lösung von DGL-Systemen) muss man beachten, dass für grössere  $\kappa$ , d.h. stärkere Nichtlinearität, eine kleinere Schrittweite bei der Integration des DGL-Systems erforderlich ist. Schon bei  $\kappa = 20$  kann ansonsten numerischer Unsinn herauskommen.

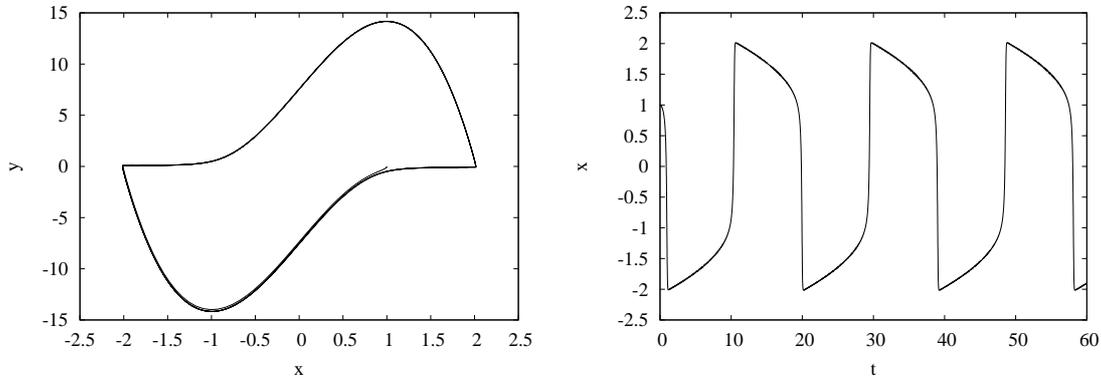
Die periodische Bewegung auf dem wohldefinierten Grenzzzyklus ergibt sich zu großen Zeiten für beliebige Anfangsbedingungen. Ein Grenzzzyklus ist ein typisch *nichtlineares* Phänomen und darf deshalb nicht mit den ellipsenförmigen Trajektorien konstanter Energie,  $E = m\dot{x}^2/2 + m\omega^2 x^2/2$  des *linearen* harmonischen Oszillators im Phasenraum verwechselt werden.

#### 7.4.2.1 Kleine $\kappa \ll 1$

Für sehr kleine  $\kappa \ll 1$  **schwache Nichtlinearität** sieht man numerisch im Phasenraum  $(x, \dot{x})$  einen Grenzzzyklus, der einem Kreis mit Radius  $r = 2$  nahekommt. Wir untersuchen das analytisch, indem wir ansetzen (LINDBLAD)

$$x(t) = r \cos t + \xi(t), \quad y(t) = r \sin t + \eta(t) \quad (7.99)$$

mit konstantem  $r$ , und  $\xi$  und  $\eta$  klein für kleine  $\kappa$ . Beachte, dass die Zeit  $t$  hier dimensionslos ist (s.o.). Wir betrachten den Radius des fast kreisförmigen Grenzzzyklus und



**Fig. 7.4:** van-der-Pol-Oszillator mit  $\kappa = 10$ .

seine zeitliche Änderung,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x^2 + y^2) &= x\dot{x} + y\dot{y} = xy - y(x + \kappa(x^2 - 1)y) = -\kappa(x^2 - 1)y^2 \\ &\approx -\kappa r^2 (r^2 \cos^2 t - 1) \sin^2 t, \end{aligned} \quad (7.100)$$

wobei die Terme mit  $\xi$ ,  $\eta$  zu Korrekturen der Ordnung  $\kappa^2$  führen und daher weggelassen worden sind. Über einen Zyklus der Periode  $2\pi$  integriert, soll sich  $x^2 + y^2$  auf dem Grenzyklus nicht ändern - an dieser Stelle hilft natürlich die numerische Evidenz. Dann folgt durch Integration dieser Forderung

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + y^2 \Big|_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} (x^2 + y^2) dt \\ &\approx -2\kappa r^2 \int_0^{2\pi} dt (r^2 \cos^2 t - 1) \sin^2 t = -\frac{\pi r^2}{2} (r^2 - 4), \end{aligned} \quad (7.101)$$

denn

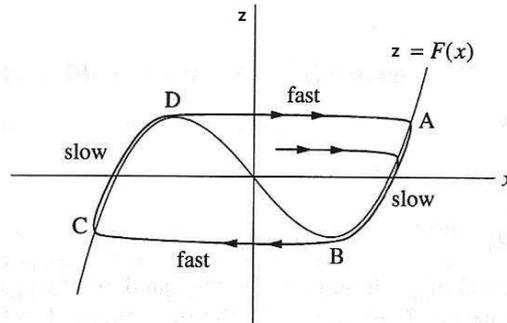
$$\int_0^{2\pi} dt \sin^2 t = \pi, \quad \int_0^{2\pi} dt \sin^2 t \cos^2 t =, \quad (7.102)$$

und es folgt  $r = 2$ . Das ist natürlich kein mathematischer Beweis, unterstützt aber schön unsere numerische Evidenz für den Grenzyklus mit Radius 2 für kleine  $\kappa$ .

#### 7.4.2.2 Große $\kappa \gg 1$ : Relaxationsschwingungen

Für große  $\kappa$  ist es vorteilhaft, die Differentialgleichung folgendermaßen umzuschreiben: zunächst bemerken wir

$$\ddot{x} + \kappa(x^2 - 1)\dot{x} + x = \frac{d}{dt} \left[ \dot{x} + \kappa \left( \frac{1}{3}x^3 - x \right) \right] + x = 0. \quad (7.103)$$



**Fig. 7.5:** Van-der-Pol-Oszillator für große  $\kappa \gg 1$  (aus STROGATZ).

Wir definieren

$$f(x) \equiv \frac{1}{3}x^3 - x \rightsquigarrow \frac{d}{dt} \left[ \underbrace{\dot{x} + \kappa f(x)}_{\equiv w} \right] = -x. \quad (7.104)$$

Das schreiben wir als DGL-System

$$\dot{w} = -x, \quad \dot{x} = w - \kappa f(x) \quad (7.105)$$

um. Da  $\kappa$  groß ist, schreiben wir die zweite Gleichung als  $\dot{x} = \kappa(\frac{1}{\kappa}w - f(x))$  und definieren  $w$  um in

$$z \equiv \frac{w}{\kappa}. \quad (7.106)$$

Damit haben wir

$$\dot{x} = \kappa(z - f(x)), \quad \dot{z} = -\frac{1}{\kappa}x. \quad (7.107)$$

Der Vorteil dieser Umskalierung ist, dass wir dadurch eine ‘schnelle’ Gleichung  $\dot{x} = \kappa(z - f(x))$  von einer ‘langsamen Gleichung’  $\dot{z} = -\frac{1}{\kappa}x$  fast entkoppelt haben - die Gleichungen sind natürlich in Wirklichkeit noch gekoppelt, können aber über große Strecken hinweg ‘fast’ als ungekoppelte Gleichungen behandelt werden:

Hierfür betrachten wir in der  $x - z$ -Ebene die exakte numerische Lösung des Systems Gl. (7.107) und den Graphen der Funktion  $z = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ . Diese Funktion hat ein Maximum bei  $D = (-1, 2/3)$  und ein Minimum bei  $B = (1, 2/3)$ . (LINDBLAD, STROGATZ) Wir nehmen eine AB mit  $z > 0, x > 0$ . Dann ist die anfängliche Geschwindigkeit  $\dot{x} = \kappa(z - f(x))$  in  $x$ -Richtung wegen  $\kappa \gg 1$  sehr viel größer als die Geschwindigkeit  $\dot{z} = -\frac{1}{\kappa}x$  in  $z$ -Richtung. Wenn die Trajektorie allerdings in die Nähe von  $z = f(x)$  kommt, ändert sich das:  $x(t)$  ändert sich nur noch langsam, und entsprechend langsam ist die Änderung  $\dot{z} = -\frac{1}{\kappa}x$  von  $z$ . Die Komponente  $z$  ist fast wie ein konstanter Parameter in der ‘schnellen’ Gleichung  $\dot{x} = \kappa(z - f(x))$ , die zu ihrem **Fixpunkt**  $\dot{x} = 0$

relaxiert, was der Kurve  $z = f(x)$  entspricht, entlang derer die Trajektorie langsam bis zum Punkt  $B$  hinabwandert. Dieser Punkt ist allerdings instabil, und die Trajektorie schnell horizontal nach links zum gegenüberliegenden Teil von  $z = f(x)$ , von wo aus sie wieder langsam nach oben bis zum Maximum  $D$  wandert, dort wieder nach rechts hinüberschnellt, usw.

(z.B. GREINER) Mit dieser periodischen Bewegung im  $(x, z)$  Phasenraum ist eine entsprechende Form des Graphen von  $x(t)$  verbunden, der stark von einer harmonischen Schwingung abweicht. Der Wert von  $x$  bleibt recht lange in der Nähe des Maximums, fällt von dort langsam ab, um dann plötzlich nach steil nach unten abzukippen. Danach wiederholt sich der Vorgang mit umgekehrten Vorzeichen. Eine solche Art von Schwingung bezeichnet man als **Relaxationsschwingung**: es baut sich langsam etwas auf (z.B. eine Spannung), die dann plötzlich wieder relaxiert wird. Solche Schwingungen treten bei vielen Vorgängen in der Natur auf (Herzschlag, Quietschen von Bremsen, Schwingungen von Saiten?).

#### 7.4.2.3 Große $\kappa \gg 1$ : Periode des Grenzyklus

Die Periode des Grenzyklus ist nach den obigen Argumenten im Wesentlichen durch die Verweildauer auf den beiden langsamen Zweigen von  $z = f(x)$  bestimmt. Dort gilt  $z \approx f(x)$ , also

$$-\frac{1}{\kappa}x = \frac{dz}{dt} \approx f'(x)\frac{dx}{dt} = (x^2 - 1)\frac{dx}{dt} \quad (7.108)$$

Daraus können wir  $dt$  bestimmen und durch Integration die Periode  $T$ ,

$$T \approx 2 \int_2^1 dx \frac{-\kappa(x^2 - 1)}{x} = \kappa(3 - 2 \ln 2). \quad (7.109)$$

Diese Periode  $T$  ist also wegen  $\kappa \gg 1$  sehr viel größer als die Periode  $T = 1$  eines harmonischen Oszillators ( $\ddot{x} + x = 0$ ,  $\kappa = 0$ ).

## 8. DYNAMISCHE SYSTEME

(BRONSTEIN, SKRIPT LINDBLAD)

### 8.1 Einführung

Die meisten von uns bisher in der Mechanik betrachteten Bewegungsgleichungen sind spezielle **dynamische Systeme**. Dynamische Systeme sind Modelle für die Zeitentwicklung realer physikalischer, biologischer oder anderer Phänomene.

#### 8.1.1 Definitionen

**Definition** Ein **dynamisches System** (DS) wird durch einen *Phasenraum*  $M \in \mathbb{R}^n$  und eine Abbildung  $\phi^t : M \rightarrow M$  mit dem Zeitparameter  $t \in \mathbb{R}$  (kontinuierlicher **Fluss**) oder  $t \in \mathbb{Z}$  (diskretes dynamisches System) und

$$\phi^0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \quad \phi^t(\phi^s(\mathbf{x})) = \phi^{t+s}(\mathbf{x}) \quad (8.1)$$

definiert.

Im kontinuierlichen Fall wird ein dynamisches System häufig - wie bei den Hamiltonschen Systemen - durch ein System von gewöhnlichen DGL

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \quad (8.2)$$

definiert, deren Lösung als **Anfangswertproblem** eine Trajektorie  $\mathbf{x}(t) = \phi^t(\mathbf{x}_0)$  im Phasenraum mit  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  liefert. Wir werden hier den Phasenraum  $M$  immer als Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  auffassen und nicht explizit über Mannigfaltigkeiten reden. Im diskreten Fall hat man statt DGL-Systemen häufig

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_t, t). \quad (8.3)$$

Wir werden als ‘Normalfall’ im Folgenden den kontinuierlichen Fall betrachten. Für den autonomen Fall ohne explizite Zeitabhängigkeit auf der rechten Seite,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \text{autonomes System} \quad (8.4)$$

gilt *Eindeutigkeit der Trajektorien*, die sich im Phasenraum nicht schneiden.

Jedes nichtautonome  $n$ -dimensionale System  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  mit  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  kann man durch einen Trick, nämlich Erhöhen der Dimension um eins mittels Einführen einer weiteren Variablen, in ein autonomes System überführen:

$$t \equiv x_{n+1} \rightsquigarrow \dot{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} = (\mathbf{x}, x_{n+1}), \quad \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{y}) = (\mathbf{F}(\mathbf{y}), 1). \quad (8.5)$$

Konservative Hamiltonsche Systeme erfüllen den *Satz von Liouville*, bei dessen Diskussion sich die *Divergenz* des Vektorfeldes  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  als Null herausstellte. Wir definieren: Ein DS ist **konservativ**, falls  $\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$ . Falls  $\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) < 0$ , so ist das DS **dissipativ**. Beispiel: ungetriebener harmonischer Oszillator mit Dämpfung in  $d = 1$  mit  $\mathbf{x} = (x, y)$ ,  $y = p/m$ , vgl. Gl. (7.36)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad F_1(x, y) = y, \quad F_2(x, y) = -\omega^2 x - \frac{1}{\tau} y \quad (8.6)$$

$$\rightsquigarrow \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\tau} < 0, \quad (8.7)$$

also ein dissipatives System.

### 8.1.2 Wofür interessiert man sich?

(LINDBLAD)

- Abhängigkeit der Lösungen  $\mathbf{x}(t)$  eines DS von den Anfangsbedingungen (AB)  $\mathbf{x}(0)$ , die so stark sein kann, dass eine exponentiell kleine Ungenauigkeit in der AB praktisch zur Unvorhersagbarkeit der Trajektorie führt: **Chaos**.
- Wo enden die Trajektorien zu großen Zeiten  $t$ : **Fixpunkte, Grenzyklen, seltsame Attraktoren**.
- Verhalten der Trajektorien bei Änderung eines Systemparameters. **Bifurkationen**.

## 8.2 Stabilitätsanalyse

### 8.2.1 Lineare Systeme

Wir betrachten ein lineares System

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad (8.8)$$

mit einer  $n \times n$ -Matrix  $A$ , für die wir eine Basis aus  $n$  Eigenvektoren  $\mathbf{y}_i$  voraussetzen (den allgemeineren Fall der Jordanschen Normalform lassen hier außer Acht). Wir haben also für eine beliebige AB  $\mathbf{x}(0)$ , die wir nach den Eigenvektoren  $\mathbf{y}_i$  zerlegen,

$$A\mathbf{y}_i = \lambda_i\mathbf{y}_i, \quad \mathbf{x}(0) = \sum_{i=1}^n c_i\mathbf{y}_i \quad (8.9)$$

$$\rightsquigarrow \mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) = \sum_{i=1}^n c_i e^{At}\mathbf{y}_i = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t}\mathbf{y}_i. \quad (8.10)$$

Die Zeitentwicklung eines linearen dynamischen Systems wird also durch die Exponential-Funktionen  $e^{\lambda_i t}$  der Eigenwerte  $\lambda_i$  bestimmt. Daraus erkennt man das asymptotische Verhalten der Lösung  $\mathbf{x}(t)$  für  $t \rightarrow \infty$ : Für  $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$  läuft der entsprechende Anteil  $c_i e^{\lambda_i t} \mathbf{y}_i$  gegen Null, für  $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$  läuft der entsprechende Anteil  $c_i e^{\lambda_i t} \mathbf{y}_i$  gegen Unendlich. Entsprechend zerlegen wir den gesamten Vektorraum in drei Teilräume, aufgespannt von den Eigenvektoren  $\mathbf{y}_i$  zu den Eigenwerten mit

$$\operatorname{Re}\lambda_i < 0, \quad \text{stabiler Unterraum} \quad (8.11)$$

$$\operatorname{Re}\lambda_i > 0, \quad \text{instabiler Unterraum} \quad (8.12)$$

$$\operatorname{Re}\lambda_i = 0, \quad \text{Zentrums-Unterraum} . \quad (8.13)$$

Der Fall  $\operatorname{Re}\lambda_i = 0$  st uns z.B. vom ungedämpften harmonischen Oszillator ( $n = 2$ ) mit den beiden Eigenwerten  $\pm i$ , Gl. (7.53), bekannt: dort läuft die Lösung im Phaserraum ‘ewig’ um den Ursprung (Punkt  $(0,0)$ ) herum.

Hat man für alle EW  $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ , so heißt die Lösung  $\mathbf{x}(t)$  des linearen DS  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  **asymptotisch stabil**.

### 8.2.2 Lineare Stabilitätsanalyse

Sei  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  jetzt ein autonomes dynamisches System.

**Definition** Ein Punkt  $\mathbf{x}^*$  eines dynamischen Systems  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  heißt **Fixpunkt** (engl. fixed point), wenn

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = 0. \quad (8.14)$$

Fixpunkte können stabil oder instabil sein - den instabilen Fall kennen wir z.B. vom Teilchen im Doppelmuldenpotential. Um die Stabilität zu analysieren, betrachtet man die Taylor-Entwicklung des Vektorfeldes  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  um den Fixpunkt  $\mathbf{x}^*$  (Differenzierbarkeit vorausgesetzt), d.h.

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) + D\mathbf{F}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \dots = D\mathbf{F}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \dots \quad (8.15)$$

mit der Jacobi-Matrix  $D\mathbf{F}(\mathbf{x}^*)$ , d.h. der Matrix der ersten Ableitungen

$$(D\mathbf{F}(\mathbf{x}^*))_{kl} = \left. \frac{\partial F_k}{\partial x_l} \right|_{\mathbf{x}^*} \quad (8.16)$$

an der Stelle  $\mathbf{x}^*$ .

**Definition** Die Eigenwerte  $\lambda_i$  der Jacobi-Matrix  $D\mathbf{F}(\mathbf{x}^*)$  heißen **charakteristische Exponenten** des Fixpunkts  $\mathbf{x}^*$ . Falls alle  $\lambda_i$  nicht auf der imaginären Achse liegen ( $\operatorname{Re}\lambda_i \neq 0$ ), heißt der Fixpunkt **hyperbolisch**.

Für einen hyperbolischen Fixpunkt greift das **Hartman-Grobman-Theorem** - für diesen Fall ist man mit der Linearisierung nahe  $\mathbf{x}^*$  auf der sicheren Seite, und wir können das nichtlineare DS bezüglich der Stabilität nahe  $\mathbf{x}^*$  wie ein lineares System betrachten. Es gilt dann insbesondere

**Satz 27.** *Ein hyperbolischer Fixpunkt ist stabil, wenn alle charakteristischen Exponenten negativen Realteil haben, und instabil, falls mindestens einer positiven Realteil hat.*

Weiterhin gilt für die Divergenz am Fixpunkt

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = \operatorname{Tr}D\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^n \lambda_i. \quad (8.17)$$

Für konservative Systeme ist  $\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = 0$ , also können nicht alle charakteristischen Exponenten negativen Realteil haben:

**Satz 28.** *Konservative dynamische Systeme haben keine stabilen Fixpunkte.*

AUFGABE: Diskutiere, inwiefern die lineare Stabilitätsanalyse für das DS  $\ddot{x} + \epsilon x^2 \dot{x} + x = 0$  nicht funktioniert. Berechne die charakteristischen Exponenten. Betrachte auch die Zeitentwicklung von  $\|(x, y)\|^2$  mit  $y = \dot{x}$ .

### 8.3 Zweidimensionale Dynamische Systeme

Hier sind die Verhältnisse relativ übersichtlich, insbesondere gibt es bei autonomen DS in zwei Dimensionen noch kein Chaos (wie in drei oder mehr Dimensionen). Wieder betrachten wir nur den autonomen Fall  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ , und zwar jetzt in  $n = 2$  Dimensionen - die Vektoren sind also zweikomponentig.

#### 8.3.1 Stabilität von Fixpunkten $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = 0$

(z.B. GREINER) Die Jacobi-Matrix  $D\mathbf{F}(\mathbf{x}^*)$  ist entsprechend zweidimensional und hat zwei Eigenwerte  $\lambda_{1,2}$ . Fixpunkte kann man jetzt klassifizieren (SKIZZIE):

$$\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0 \quad , \quad \text{Stabiler Knoten} \quad (8.18)$$

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0 \quad , \quad \text{Instabiler Knoten} \quad (8.19)$$

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 < 0 \quad , \quad \text{Sattel} \quad (8.20)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2^*, \quad \operatorname{Re}\lambda_i < 0 \quad , \quad \text{Stabiler Strudel} \quad (8.21)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2^*, \quad \operatorname{Re}\lambda_i > 0 \quad , \quad \text{Instabiler Strudel} \quad (8.22)$$

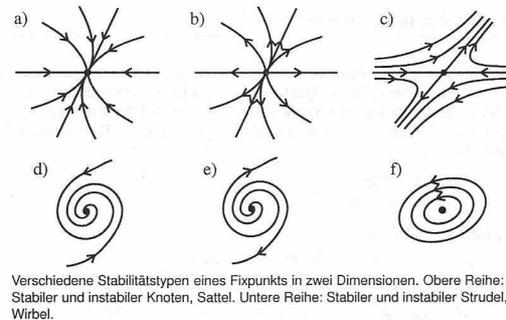
$$\lambda_1 = \lambda_2^*, \quad \operatorname{Re}\lambda_i = 0 \quad , \quad \text{Wirbel} \quad (8.23)$$

Als BEISPIEL betrachten wir den gedämpften harmonischen Oszillator in  $d = 1$ ,  $\ddot{x}(t) + \frac{1}{\tau}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$ , als DS

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \\ m \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix}. \quad (8.24)$$

vgl. Gl. (7.36). Wegen der Linearität fällt hier die Stabilitätsanalyse mit der für lineare Systeme in Abschnitt 8.2.1 zusammen. Hier ist der einzige FP  $\mathbf{x}^* = (0, 0)$  und wegen der Linearität  $D\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = A$ , mit Eigenwerten

$$\lambda_{\pm} = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \omega^2}, \quad (8.25)$$



**Fig. 8.1:** Fixpunkte in  $2d$  (GREINER)

für  $\omega > \frac{1}{2\tau}$  liegt also ein Paar komplex konjugierter Eigenwerte mit negativem Realteil und daher ein *stabiler Strudel* vor.

AUFGABE: Klassifiziere die Fixpunkte des van-der-Pol-Oszillators  $\ddot{x} + \kappa(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$ .

### 8.3.2 Grenzzyklen

Einen stabilen Grenzzyklus als stabiles ‘Endstadium’ einer Zeitentwicklung hatten wir bereits beim van-der-Pol-Oszillator  $\ddot{x} + \kappa(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$  kennengelernt.

Das einfachste Beispiel für einen Grenzzyklus in zwei Dimensionen ist wohl

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \quad \dot{\theta} = 1 \quad (8.26)$$

(ebene Polarkoordinaten). Alle Trajektorien laufen spiralförmig in den Grenzzyklus bei  $r = 1$ .

Grenzzyklen in  $2d$  können durch verschiedene Kriterien ausgeschlossen werden. Umgekehrt etabliert ein wichtiges Theorem, das **Poincaré-Bendixson-Theorem**, die Existenz eines Grenzzyklus eines DS in einem abgeschlossenen Gebiet der Ebene, das keinen Fixpunkt des DS enthält, dafür aber eine Trajektorie, die in dem Gebiet startet und dort für alle Zeiten bleibt (STROGATZ, LINDBLAD).

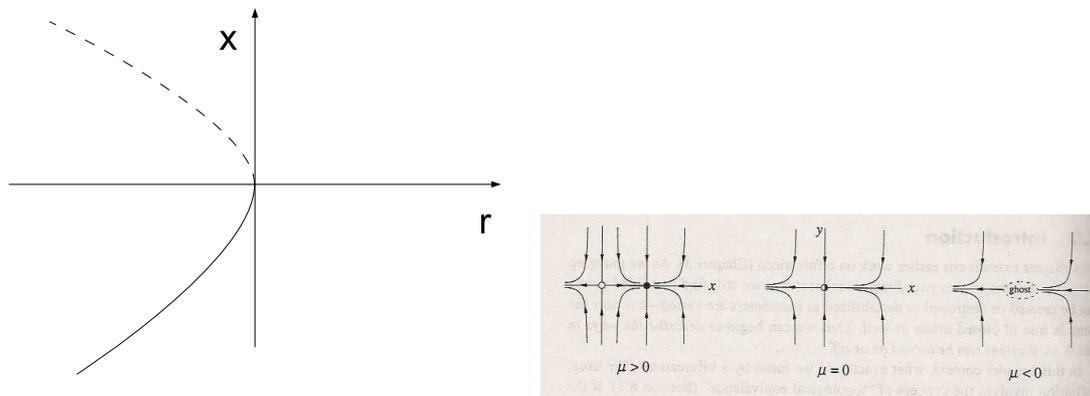
## 8.4 Bifurkationen

Bifurkationen und ihre Analyse treten in vielen Gebieten der Physik auf, z.B. auch bei Phasenübergängen. In der nichtlinearen Dynamik sind sie ein wichtiger Schritt hin zum Chaos.

Bifurkationen in dynamischen Systemen treten bei Änderung eines Parameters  $\mu$  (häufig als **Kontrollparameter** bezeichnet) in der rechten Seite autonomer DS

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}[\mathbf{x}; \mu] \quad (8.27)$$

auf; sie sind durch eine *qualitative Veränderung* des Verhaltens der Trajektorien im Phasenraum charakterisiert.



**Fig. 8.2:** Links: Bifurkationsdiagramm für Sattel-Knoten-Bifurkation  $\dot{x} = r + x^2$ . Rechts: Phasenraumporträt für Gl. (8.32) (aus STROGATZ).

### 8.4.1 Sattel-Knoten-Bifurkation

#### 8.4.1.1 Eindimensionaler Fall

(STROGATZ) Hier betrachten wir das Beispiel eines DS

$$\dot{x} = F(x) = r + x^2, \quad r \in \mathbb{R} \quad (8.28)$$

mit reellem Kontrollparameter  $r$ . Der Phasenraum ist eindimensional (die  $x$ -Achse). Die Fixpunkte (FP) des DS sind durch

$$x^2 = -r \quad (8.29)$$

bestimmt. Für  $r < 0$  gibt es zwei FP  $x_{\pm}^* = \pm\sqrt{-r}$ , mit

$$x_{-}^* = -\sqrt{-r}, \quad F'(x_{-}^*) = -2\sqrt{-r} < 0, \quad \text{stabil} \quad (8.30)$$

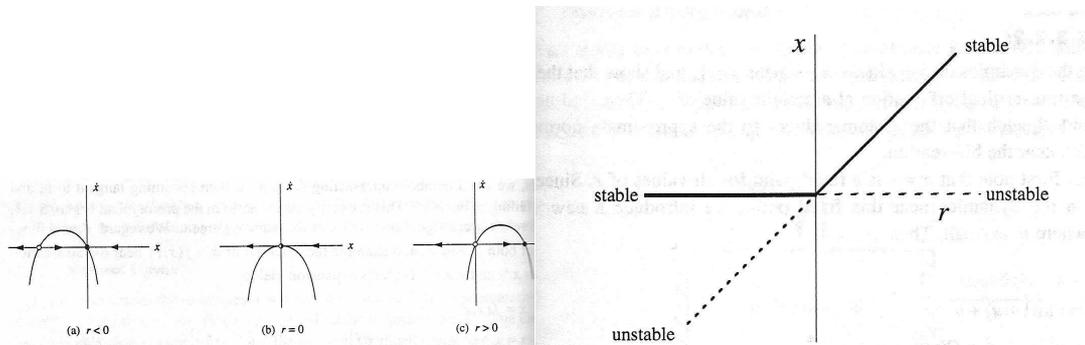
$$x_{+}^* = \sqrt{-r}, \quad F'(x_{+}^*) = 2\sqrt{-r} > 0, \quad \text{instabil} . \quad (8.31)$$

Im Phasenraum (der  $x$ -Achse) skizzieren wir das  $1d$  Vektorfeld  $x \rightarrow F(x)$  durch Pfeile (nach rechts oder links), die die Geschwindigkeit  $\dot{x} = F(x)$  im Punkt  $x$  (positiv oder negativ) darstellen. Daran erkennen wir anschaulich die Bedeutung des stabilen und des instabilen FP: Der Fluss läuft auf den stabilen FP *zu*, aber vom instabilen FP *weg*. Für  $r = 0$  gibt es nur einen FP  $x^* = 0$ , für  $r > 0$  keinen FP. Graphisch wird die Situation im **Bifurkationsdiagramm** (FP  $x^*$  versus Kontrollparameter  $r$ ) dargestellt. Stabile FP werden durch durchgezogene Linien, instabile durch gestrichelte Linien gekennzeichnet.

#### 8.4.1.2 Zweidimensionaler Fall

(STROGATZ) Hier betrachten wir das Beispiel eines DS

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu - x^2 \\ \dot{y} &= -y \end{aligned} \quad (8.32)$$



**Fig. 8.3:** Transkritische Bifurkation  $\dot{x} = rx - x^2$ . Links: Phasenraumporträt. Rechts: Bifurkationsdiagramm (aus STROGATZ).

Für  $\mu > 0$  gibt es zwei Fixpunkte,

$$\mathbf{x}_-^* = (-\sqrt{\mu}, 0), \quad \text{Sattel} \quad (8.33)$$

$$\mathbf{x}_+^* = (\sqrt{\mu}, 0), \quad \text{stabiler Knoten}, \quad (8.34)$$

die Stabilität folgt hierbei aus der Jacobi-Matrix

$$Df = \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8.35)$$

mit den Eigenwerten  $-2x$  und  $-1$ . Für  $\mu = 0$  'kollidieren' die beiden Fixpunkte und verschwinden für  $\mu < 0$ , lassen für  $\mu < 0$  aber einen 'Geist' bei  $(0,0)$  zurück, der Trajektorien einsaugt und verzögert, s. SKIZZE.

## 8.4.2 Transkritische Bifurkationen

### 8.4.2.1 Eindimensionaler Fall

(STROGATZ) Bei transkritischen Bifurkationen ändert sich die Stabilität eines Fixpunktes, nicht aber seine Existenz. Wiederum beginnen wir mit einem Beispiel,

$$\dot{x} = rx - x^2, \quad (8.36)$$

das für alle Werte des Kontrollparameters  $r$  einen FP  $x_0^* = 0$  hat. Der weitere FP  $x^* = r$  geht von instabil für  $r < 0$  über in stabil für  $r > 0$ . Bis auf den Fall  $r = 0$  (wo beide FP zusammenfallen) gibt es also stets zwei FP.

### 8.4.2.2 Zweidimensionaler Fall

(STROGATZ) Hier betrachten wir das Beispiel eines DS

$$\begin{aligned} \dot{x} &= rx - x^2 \\ \dot{y} &= -y \end{aligned} \quad (8.37)$$

Es gibt einen FP  $\mathbf{x}_0^* = (0, 0)$ , sowie einen weiteren  $\mathbf{x}_r^* = (r, 0)$ . Die Stabilität folgt wieder aus der Jacobi-Matrix

$$Df = \begin{pmatrix} r - 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8.38)$$

mit den charakteristische Exponenten (Eigenwerten)  $r - 2x$  und  $-1$ , die an den Fixpunkten die Werte

$$\mathbf{x}_0^* : \lambda_1 = r, \quad \lambda_2 = -1, \quad \mathbf{x}_r^* : \lambda_1 = -r, \quad \lambda_2 = -1 \quad (8.39)$$

annehmen. Für  $r > 0$  ist  $\mathbf{x}_0^*$  also gemäß unserer Klassifikation ein Sattel und  $\mathbf{x}_r^*$  ein stabiler Knoten. Für  $r < 0$  ist  $\mathbf{x}_r^*$  ein Sattel und  $\mathbf{x}_0^*$  ein stabiler Knoten. Für  $r = 0$  fallen beide FP wieder zusammen.

#### 8.4.2.3 Beispiel: Laser-Schwelle

(Strogatz) Ein einfaches Modell für einen Laser ist ein System mit  $N(t)$  angeregten Atomen in einer Kavität, in denen durch stimulierte Emission  $n(t)$  Photonen mit einer Rate  $GN(t)$  erzeugt werden, wobei  $G > 0$  ein Parameter ist (gain-Koeffizient). Ausserdem verschwinden Photonen mit Rate  $k$  aus der Kavität, und die Zahl angeregter Atome wird mit der *Pumprate*  $p$  verändert und durch *spontane Emission* mit Rate  $f > 0$  erniedrigt. Man hat damit das DS

$$\dot{n} = GnN - kn \quad (8.40)$$

$$\dot{N} = -GnN - fN + p. \quad (8.41)$$

Beachte den Erhaltungssatz für  $k = f = p = 0$ ,

$$\frac{d}{dt} [n(t) + N(t)] = 0, \quad k = f = p = 0. \quad (8.42)$$

Um die Situation zu vereinfachen, nehmen wir weiterhin eine *quasi-statische Näherung*  $\dot{N} = 0$  an, d.h.  $N$  hat stets den Wert  $N = p/(Gn + k)$ , womit man das System auf eine Dimension reduziert hat, nämlich auf das nichtlineare DS für die Photonenzahl  $n(t)$ ,

$$\dot{n} = \frac{Gnp}{Gn + f} - kn \equiv F(n) \quad (8.43)$$

Dieses hat die Fixpunkte  $n_0^* = 0$  und

$$n_p^* \equiv \frac{p}{k} - \frac{f}{G}. \quad (8.44)$$

Der Fixpunkt  $n_p^*$  ist für  $p < p_c$  mit

$$p_c \equiv kf/G, \quad \text{kritische Pumpstärke} \quad (8.45)$$

negativ und damit unphysikalisch. Die Stabilität folgt aus

$$\begin{aligned} F'(n) &= \frac{Gp}{Gn+f} - \frac{G^2np}{(Gn+f)^2} - k \\ \rightsquigarrow F'(n_0^*) &= \frac{Gp}{f} - k, \quad F'(n_p^*) = -\frac{G^2n_p^*p}{(Gn_p^*+f)^2} \end{aligned} \quad (8.46)$$

also ist für  $p < p_c$  der FP  $n_0^*$  stabil und der (unphysikalische) Fixpunkt  $n_p^*$  instabil, während für  $p > p_c$  der FP  $n_0^*$  instabil und der dann physikalische Fixpunkt  $n_p^* > 0$  wegen  $F'(n_p^*) < 0$  stabil wird. Es liegt also eine *transkritische Bifurkation* vor. Physikalisch bedeutet das, dass man für  $p > p_c$ , also oberhalb der *Laser-Schwelle*, eine stabile Situation mit einer makroskopischen Zahl  $n_p^* > 0$  von Photonen im Laser hat.

### 8.4.3 Heugabel-Bifurkationen

Heugabel-Bifurkationen treten in Problemen auf, die eine Symmetrie aufweisen.

#### 8.4.3.1 Superkritische Heugabel-Bifurkation

Hier ist das Standard-Beispiel ein symmetrisches quartisches Potential  $V(x) = V(-x)$  in einer Dimension

$$V(x) = -\frac{1}{2}rx^2 + \frac{1}{4}x^4. \quad (8.47)$$

Ein Teilchen der Masse  $m = 1$  erfüllt die Bewegungsgleichungen

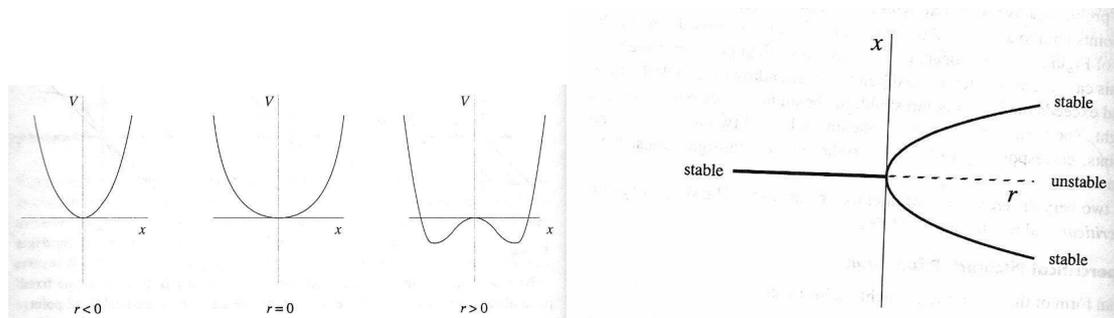
$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = -V'(x) = rx - x^3 \quad (8.48)$$

mit Fixpunkte  $(x^*, 0)$  im Phasenraum  $(x, p)$ . Für  $r < 0$  gibt es nur einen stabilen Fixpunkt mit  $x_0^* = 0$ , für  $r > 0$  gibt es zwei stabile FP  $x_{\pm}^* = \pm\sqrt{r}$  und einen instabilen FP  $x_0^* = 0$ . Das Bifurkationsdiagramm sieht wie eine Heugabel aus! Die Fixpunkte kann man hier direkt an den Minima des Potentials ablesen: Für  $r < 0$  gibt es nur ein Minimum bei  $x_0^* = 0$ , für  $r > 0$  gibt es zwei lokale Minima  $x_{\pm}^* = \pm\sqrt{r}$  symmetrisch zum Punkt  $x_0^* = 0$ , der dann ein lokales Maximum wird. Die FP  $x_{\pm}^*$  treten *oberhalb* der Bifurkation ( $r > 0$ ) auf. Diese Art von Bifurkation spielt auch in der statistischen Mechanik bei der Beschreibung von Phasenübergängen eine wichtige Rolle.

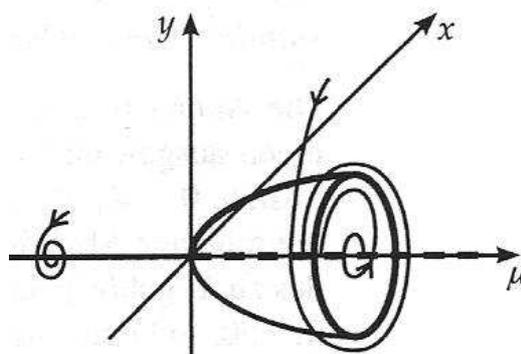
#### 8.4.3.2 Subkritische Heugabel-Bifurkation

Hier ist das Standard-Beispiel wieder ein symmetrisches quartisches Potential  $V(x) = V(-x)$  in einer Dimension, das diesmal allerdings

$$V(x) = -\frac{1}{2}rx^2 - \frac{1}{4}x^4 \quad (8.49)$$



**Fig. 8.4:** Superkritische Heugabel-Bifurkation. Links: Potential  $V(x) = -\frac{1}{2}rx^2 + \frac{1}{4}x^4$ . Rechts: Bifurkationsdiagramm (aus STROGATZ).



**Fig. 8.5:** Hopf-Bifurkation (aus GREINER II)

für große  $|x|$  nach *unten* geöffnet ist und deshalb dort zu einer instabilen Bewegung nach  $\pm\infty$  führt: In den Bewegungsgleichungen

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = -V'(x) = rx + x^3 \quad (8.50)$$

gibt es für  $r > 0$  nur den einen stabilen Fixpunkt mit  $x_0^* = 0$ , für  $r < 0$  gibt es zwei instabile FP  $x_{\pm}^* = \pm\sqrt{r}$  und einen stabilen FP  $x_0^* = 0$ . Das Bifurkationsdiagramm sieht wieder wie eine Heugabel aus, allerdings im Vergleich mit der superkritischen Heugabel-Bifurkation umgedreht, wobei die FP  $x_{\pm}^*$  *unterhalb* der Bifurkation ( $r < 0$ ) auftreten.

#### 8.4.4 Hopf-Bifurkation

(LINDBLAD) Hier handelt es sich um die Erzeugung oder Vernichtung eines Grenzzyklus in zwei Dimensionen. Wir betrachten

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x + y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= -x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{aligned} \quad (8.51)$$

mit Fixpunkt  $\mathbf{x}^* = (0, 0)$  und entsprechender Jakobi-Matrix mit Eigenwerten  $\lambda_{\pm} = \mu \pm i$  (NACHRECHNEN). Für  $\mu < 0$  ist  $\mathbf{x}^* = (0, 0)$  also ein stabiler Strudel, der für  $\mu > 0$  instabil wird: Die beiden Eigenwerte überqueren gleichzeitig die imaginäre Achse. Tatsächlich ist dieses DS für  $\mu > 0$  ein einfaches Beispiel für einen *Grenzzzyklus*, denn in ebenen Polarkoordinaten folgt (NACHPRÜFEN)

$$\dot{r} = r(\mu - r^2), \quad \dot{\phi} = 1, \quad (8.52)$$

woraus man den Grenzzzyklus mit Radius  $r = \sqrt{\mu}$  bereits ablesen kann. Das wurzelförmige Anwachsen des Grenzzzyklus ist typisch für diese **superkritische Hopf-Bifurkation**.

Weitere Fälle sind die subkritische Hopf-Bifurkation sowie komplexere Fälle, bei denen die Analyse komplizierter ist.

## 8.5 Hamiltonsche Systeme und Chaos

Ab der Dimension  $d = 3$  gibt es die Möglichkeit von Chaos in autonomen dynamischen Systemen  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ , d.h. die extrem empfindliche Abhängigkeit des Langzeitverhaltens eines DS von den Anfangsbedingungen. Das Studium von Chaos und seiner Entstehung ist immer noch ein Gegenstand moderner Forschung.

Traditionell werden im Zusammenhang mit Chaos in der Mechanik hauptsächlich konservative, Hamiltonsche Systeme untersucht. Hier sind die DS von geradzahlgiger Dimension  $2f$ , wobei  $f$  die Zahl der Freiheitsgrade ist. Interessant wird es also ab  $f = 2$  Freiheitsgraden.

### 8.5.1 Poincaré-Schnitte

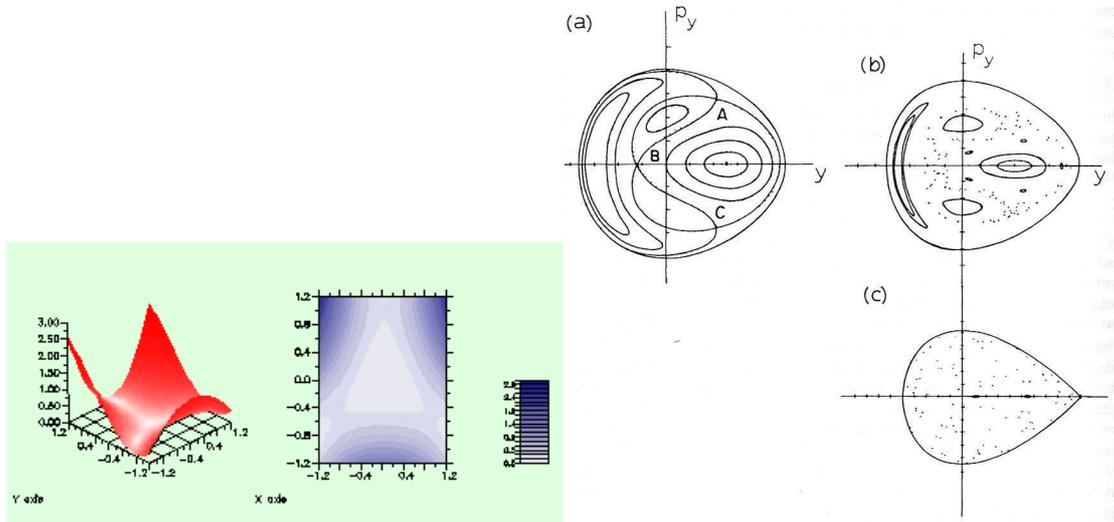
(TABOR, GREINER II) Als Beispiel betrachten wir ein konservatives System mit zwei Freiheitsgraden und Hamiltonfunktion

$$E = H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + V(x, y), \quad (8.53)$$

d.h. ein Teilchen der Masse  $m$ , das sich in der  $x$ - $y$ -Ebene unter dem Einfluss des Potentials  $V(x, y)$  bewegt. Mit der ‘Energie-Schale’  $E = \text{const}$  haben wir im vierdimensionalen Phasenraum also eine Bewegung auf einer durch Gl. (8.53) definierten, dreidimensionalen Teilmenge (Mannigfaltigkeit). Es ist vorteilhaft, die Trajektorie des Teilchens im Phasenraum zu verfolgen, indem man ihre Schnittpunkte mit einer fest gewählten zweidimensionalen Ebene  $S$  betrachtet, z.B. der durch  $y = 0$  definierten  $p_x$ - $x$ -Ebene. Die Trajektorie durchstößt dann im Laufe ihrer Zeitentwicklung die Ebene  $S$  sukzessive an vielen Stellen (FIGUR), wodurch eine diskrete Abbildung

$$P : S \rightarrow S, \quad \mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_{n+1} \quad (8.54)$$

erzeugt wird. Diese **Poincaré-Abbildung** ist also eine Iteration, die jeden Durchstoßpunkt der Trajektorie in  $S$  auf seinen Nachfolger abbildet. Die Schnittebene bzw. die



**Fig. 8.6:** Henon-Heiles-System: Potential (links, aus [www.mathgrapher.com](http://www.mathgrapher.com)), Poincaré-Schnitte für  $E = \frac{1}{12}$  (a),  $E = \frac{1}{8}$  (b),  $E = \frac{1}{6}$  (c), aus TABOR.

resultierenden Schnittpunkte in  $S$  nennt man auch **Poincaré-Schnitt**. In den meisten Fällen muss  $P$  natürlich numerisch berechnet werden, ist dann aber ein außerordentlich nützliches Werkzeug zur Analyse der Eigenschaften des dynamischen Systems. Außerdem gibt es häufig viele Gemeinsamkeiten zwischen Poincaré-Abbildungen und analytisch konstruierten diskreten DS, d.h. Systemen von der Form  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n, n)$ .

Im obigen Fall der  $p_x$ - $x$ -Ebene ( $y = 0$ ) ist mit fester Energie  $E$  der Impuls  $p_y$

$$p_y = \pm \sqrt{2m \left( E - \frac{1}{2m} p_x^2 - V(x, 0) \right)} \quad (8.55)$$

bis auf das Vorzeichen festgelegt. Als Anfangsbedingung wird man ein Vorzeichen für  $p_y$  wählen und dafür das DS lösen.

### 8.5.2 Der Henon-Heiles-Hamiltonian

Das berühmte Henon-Heiles-System (1964) hat die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + V(x, y), \quad V(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{1}{3} y^3, \quad (8.56)$$

also ein harmonisches Oszillator-Potential in 2d, auf das eine Nichtlinearität  $x^2 y - \frac{1}{3} y^3$  addiert ist.

Für kleine Energien  $E$  verläuft die Bewegung regulär, und fast alle Anfangsbedingungen führen zu glatten Kurven. Bei höheren Energien wird der Poincaré-Schnitt komplexer, es treten viele vereinzelte Schnittpunkte auf, trotzdem gibt es aber noch stabile

‘Inseln’. Die fünf Inseln für  $y > 0$  bei  $E = \frac{1}{8}$  werden von einer einzigen Trajektorie erzeugt, die sukzessive von Insel zu Insel springt. Schließlich geht das Bild bei noch höheren Energien in einen völlig irregulären See (mit wenigen winzigen Inseln) über.

Dieses Szenario ist typisch für den Übergang von überwiegend regulärem zu überwiegend *chaotischem* Verhalten eines nichtintegrablen Hamiltonschen Systems. Insbesondere ist beim Henon-Heiles-Hamiltonian die einzige Erhaltungsgröße die Energie.

## 8.6 Dreidimensionale Systeme

Dreidimensionale autonome Systeme können Chaos aufweisen. Sie sind wegen  $d \neq 2f$  *nicht* Hamiltonsch. Die prominentesten Vertreter sind in der Tat Modelle mit Dissipation.

### 8.6.1 Das Lorenz-Modell

(STROGATZ) Das Lorenz-Modell ist ein dreidimensionales DS, das aus der Vereinfachung eines komplizierteren Systems von Gleichungen für konvektive und turbulente Bewegungen in der Atmosphäre entsteht,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz, \quad \sigma, r, b > 0.\end{aligned}\tag{8.57}$$

Dieses Modell ist eines der Standard-Modelle zur Untersuchung der Ausbildung von Chaos in dynamischen Systemen. Man bezeichnet  $\sigma$  als **Prandtl-Zahl** sowie  $r$  als **Rayleigh-Zahl**. Letztere ist das Verhältnis zu Antriebsstärke zu Dissipation in einem mechanischen Analogon des Modells, dem ‘chaotischen Wasserrad’ (STROGATZ).

Die zwei nichtlinearen Terme  $xz$  und  $xy$  in Gl. (8.57) führen zu dem komplexen Verhalten des Systems, das von der Größe der Parameter  $\sigma, r, b$  bestimmt wird. Das System ist weiterhin *dissipativ*, denn in unserer Standard-Form  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  haben wir

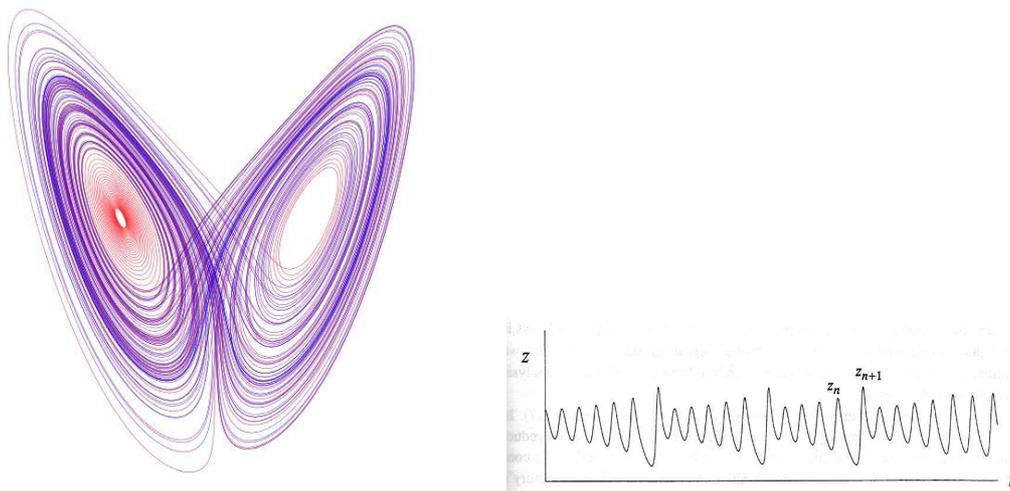
$$\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\sigma - 1 - b < 0,\tag{8.58}$$

weshalb das Volumen im Phasenraum der  $(x, y, z)$  mit der Zeit  $t$  schrumpft. *Fixpunkte* gibt es folgende:

$$\begin{aligned}C_0 &\equiv (0, 0, 0) \\ C^\pm &\equiv (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1), \quad r > 1.\end{aligned}\tag{8.59}$$

Für  $0 < r < 1$  ist der FP  $C_0$  stabil (AUFGABE). Bei  $r = 1$  erfolgt eine Heugabel-Bifurkation (AUFGABE), bei der  $C_0$  instabil und  $C^\pm$  stabil werden.  $C^\pm$  sind stabil im Bereich (AUFGABE)

$$1 < r < r_H \equiv \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}.\tag{8.60}$$



**Fig. 8.7:** LINKS: Lorenz-Attraktor; RECHTS:  $z(t)$  für Lorenz-Modell (STROGATZ).

Dort sind die FP  $C^\pm$  (z.B.  $C^+$  in der FIGUR) von einem *instabilen Grenzyklus* auf der *instabilen Mannigfaltigkeit* umgeben. Bei  $r = r_H$  tritt eine subkritische Hopf-Bifurkation ein, die den instabilen Grenzyklus ‘einsaugt’, so dass für  $r < r_H$  in der Nähe der FP nichts Stabiles mehr übrig bleibt. Jenseits von  $r_H$  muss also etwas Interessantes passieren:

#### 8.6.1.1 Seltsamer Attraktor, Liapunov-Exponent

Wenn man das System Gl. (8.57) numerisch löst, z.B. mit AB  $(0, 1, 0)$  und Parametern  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$ ,  $r = 28$ , so findet man z.B. im zeitlichen Verhalten von  $y(t)$  eine *aperiodische Bewegung* mit *irregulären Oszillationen*, die sich nie exakt wiederholen. Wenn man weiterhin die Trajektorie in der  $z$ - $x$ -Ebene verfolgt, erscheint ein wunderbarer ‘Schmetterling’ (engl. ‘butterfly pattern’), auf der die Bahn unregelmäßig zwischen rechtem und linken ‘Flügel’ hin- und herwechselt (FIGUR). Die Trajektorie läuft auf diesem **seltsamen Attraktor**, der aus unendlich vielen Punkten besteht, die aber alle zusammen ein Volumen Null haben. Seine geometrische Struktur ist die eines **Fraktals**. In einem dreidimensionalen Bild sieht man dieses dünne Paar von ‘Schmetterlingsflügeln’ sogar noch besser.

Die Bewegung auf dem Attraktor zeichnet sich durch eine sehr sensible Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen aus: Wählt man zwei Punkte  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{x}'$  mit anfänglichem Abstand  $\delta(t = 0)$ , so wächst dieser Abstand an wie

$$\delta(t) \sim \delta(0)e^{\lambda t}, \quad \lambda \text{ Liapunov-Exponent} . \quad (8.61)$$

Diese exponentielle Abhängigkeit gilt über ein bestimmtes Zeitintervall, numerisch findet man  $\lambda = 0.9$  für das Lorenz-System und weiterhin kleine oszillatorische Korrekturen. Die exponentielle Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen ist, neben der Aperiodizität in

der Zeit, typisch für ein **chaotisches System**. Beide Eigenschaften zusammen (Aperiodizität und exponentielle Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen) können wir etwas lose für die vorläufige Definition von Chaos in dynamischen Systemen verwenden (STROGATZ).

### 8.6.1.2 Lorenz-Abbildung

Lorenz analysierte den Attraktor, indem er sukzessive Maxima  $z_n$  der Funktion  $z(t)$  numerisch berechnete und dann  $z_{n+1}$  gegen  $z_n$  auftrug (FIGUR). Die entstehende *Iteration* (**Lorenz-Abbildung**)

$$z_{n+1} = f(z_n) \quad (8.62)$$

führt zu einem erstaunlich Bild: die Punkte fallen auf eine ‘Kurve’ mit einer sehr einfachen Form. Im nächsten Abschnitt werden wir uns deshalb etwas allgemeiner mit Iterationen beschäftigen.

## 8.7 Iterierte Abbildungen

Iterierte Abbildungen sind **diskrete dynamische Systeme** vom Typ

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (8.63)$$

Solche Systeme nennt man auch **Differenzgleichungen**. Begegnet waren sie uns bereits bei der Konstruktion der Poincaré-Schnitte und der Lorenz-Abbildung.

Selbst der im Folgenden betrachtete eindimensionale Fall

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x_n \in \mathbb{R}, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (8.64)$$

mit einer reellen Funktion  $f$  ist sehr reichhaltig und kann als Modellsystem für die Entstehung von Chaos bei Veränderung eines einfachen Parameters dienen.

Wir beginnen mit einigen Beispielen diskreter dynamischer Systeme,

$$x_{n+1} = \cos x_n, \quad \text{‘Taschenrechner-Iteration’ von } x = \cos x. \quad (8.65)$$

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad \text{Logistische Abbildung.} \quad (8.66)$$

### 8.7.1 Fixpunkte, Spinnweb-Konstruktion

Fixpunkte  $x^*$  der iterierten Abbildungen  $x_{n+1} = f(x_n)$  sind durch

$$x^* = f(x^*) \quad (8.67)$$

definiert. Wie im kontinuierlichen Fall kann man die Stabilität eines FP lokal untersuchen (AUFGABE)

$$|f'(x^*)| < 1, \quad \text{linear stabil} \quad (8.68)$$

$$|f'(x^*)| > 1, \quad \text{linear instabil} \quad (8.69)$$

$$|f'(x^*)| = 1, \quad \text{marginal.} \quad (8.70)$$

Die *Spinnweb-Konstruktion* kann man sich am einfachen Beispiel der ‘Taschenrechner-Iteration’ von  $x = \cos x$ , Gl. (8.65), klarmachen (SKIZZE). Der stabile Fixpunkt ist  $x^* = 0.739\dots$

### 8.7.2 Periodischer ‘Kicked Rotator’

Hier handelt es sich um ein mechanisches System, aus dem in Grenzfällen verschiedene diskrete DS abgeleitet werden können (SCHUSTER/JUST): ein Teilchen der Masse 1 bewegt sich auf einem Ring und wird durch eine Delta-Funktion-artige Kraft mit Periode  $T$  ständig angestoßen. Die Bewegungsgleichung für die Ortsvariable, d.h. den Winkel  $\phi(t)$  als Funktion der Zeit, lautet

$$\ddot{\phi} + \Gamma \dot{\phi} = K f(\phi) \sum_{m=0}^{\infty} \delta(t - mT), \quad (8.71)$$

wobei  $\Gamma \dot{\phi}$  ein Reibungsterm und  $K f(\phi)$  die Stärke der Anstoßkraft ist. Das entsprechende zweidimensionale, nichtautonome DS

$$\dot{x} = y \quad (8.72)$$

$$\dot{y} = -\Gamma y + K f(x) \sum_{m=0}^{\infty} \delta(t - mT) \quad (8.73)$$

mit  $\phi \equiv x$  kann integriert werden (AUFGABE),

$$y(t) = y_n e^{-\Gamma(t-nT)} + K \sum_{m=0}^{\infty} f(x_m) \int_{nT-\epsilon}^t e^{-\Gamma(t-t')} \delta(t' - mT) \quad (8.74)$$

$$y_n \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} y(nT - \epsilon), \quad x_n \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} x(nT - \epsilon), \quad (8.75)$$

was auf das diskrete DS

$$y_{n+1} = e^{-\Gamma T} [y_n + K f(x_n)] \quad (8.76)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1 - e^{-\Gamma T}}{\Gamma} [y_n + K f(x_n)] \quad (8.77)$$

führt, dass gewissermaßen ein *stroboskopisches Bild der Dynamik* vermittelt, nämlich den Wert der Phasenraum-Variablen  $(x, y)$  zu bestimmten, diskreten Zeitpunkten  $t = nT - \epsilon$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Die Logistische Abbildung Gl. (8.65) ist ein Grenzfall des DS Gl. (8.76) für

$$K \rightarrow \infty, \quad \Gamma \rightarrow \infty, \quad \frac{\Gamma}{K} = 1, \quad f(x) = (r - 1)x - rx^2. \quad (8.78)$$

Weitere diskrete DS können auf ähnliche Weise durch andere Grenzfälle aus dem ‘kicked rotator’ gewonnen werden. Schließlich spielt die quantenmechanische Version des ‘kicked rotator’ auch eine wichtige Rolle in der Diskussion von ‘Quanten-Chaos’.

### 8.7.3 Logistische Abbildung und Logistische Gleichung

Die **Logistische Abbildung** (May, 1976)

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad r \geq 0 \quad (8.79)$$

ist das diskrete Analogon der logistischen Gleichung für das Bevölkerungswachstum (Verhulst 1838),

$$\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right), \quad r > 0 \quad (8.80)$$

Hierbei ist  $N$  die Anzahl der Exemplare einer Bevölkerung, deren *Wachstumsrate*  $\frac{\dot{N}}{N}$  für kleine  $N$  konstant und positiv ist, für große  $N$  aber wegen Übervölkerung oberhalb einer kritischen Kapazität  $K$  negativ werden kann, d.h. die Wachstumsrate ist eine lineare Funktion von  $N$  (Gerade mit negativer Steigung). Als 1d kontinuierliches DS ist Gl. (8.80) trivial durch Trennung der Variablen integrierbar und hat ein relativ einfaches Verhalten. Für das diskrete Analogon Gl. (8.79) ist das überhaupt nicht so, hier ist die Situation sehr komplex. Durch die ‘Glattheit’ der Differentialgleichung Gl. (8.80) geht diese Komplexität verloren!

#### 8.7.3.1 Fixpunkte

Die Fixpunkte  $x^*$  der logistischen Abbildung für  $0 < r < 4$  folgen aus

$$x^* = f(x^*) = rx^*(1 - x^*) \rightsquigarrow x_0^* = 0, \quad x_r^* = 1 - \frac{1}{r}. \quad (8.81)$$

Hierbei ist  $x_0^*$  stabil für  $r < 1$  und instabil für  $r > 1$ . Der FP  $x_r^*$  ist stabil für  $1 < r < 3$  und instabil für  $r > 3$  (AUFGABE). Bei  $r = 1$  hat man eine transkritische Bifurkation.

#### 8.7.3.2 Numerische Ergebnisse

(STROGATZ) Für den interessanten Bereich des Kontrollparameters

$$0 \leq r \leq 4 \quad (8.82)$$

bildet die logistische Abbildung Gl. (8.79) das Intervall  $[0, 1]$  auf sich selbst ab - man kann graphisch also  $x_{n+1}$  über  $x_n$  in einem Quadrat der Länge eins darstellen (SKIZZE). Für gegebenes  $r$  und ausgehend von einem Anfangswert  $x_0$  berechnet man  $x_1$ , daraus  $x_2$  etc., wodurch eine ‘Zeitreihe’ entsteht. Zunächst plottet man  $x_n$  versus  $n$ . Es ergibt sich

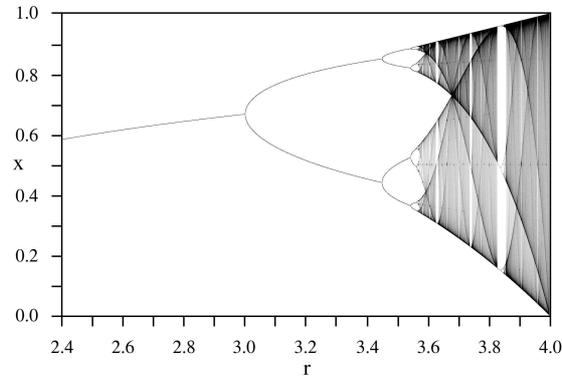


Fig. 8.8: 'Orbit diagram' der Logistische Abbildung.

folgendes:

$$\begin{array}{ll}
 r < 1 & , \text{ Aussterben, } x_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \\
 1 < r < 3 & , \text{ Wachstum, stationäres } x_n \text{ für } n \rightarrow \infty \\
 r \geq r_1 \equiv 3 & , \text{ Oszillationen, Periode 2} \\
 r \geq r_2 \equiv 3.449 & , \text{ Oszillationen, Periode 4} \\
 r \geq r_3 \equiv 3.54409 & , \text{ Oszillationen, Periode 8} \\
 & \dots \\
 r \geq r_\infty \equiv 3.569946 & , \text{ Oszillationen, Periode } \infty .
 \end{array} \tag{8.83}$$

Angegeben ist jeweils das 'Langzeitverhalten' für große  $n$ . Im Periode-2-Zyklus wiederholt sich der Wert von  $x_n$  alle zwei Iterationen, im Periode-4-Zyklus alle vier Iterationen usw. (SKIZZE). Diese **Periodenverdopplungen** treten als Bifurkationen im  $x$ - $r$ -Diagramm auf 'orbit diagram', in dem man für jedes  $r$  die sich für großes  $n$  einstellenden Werte  $x_n$  einträgt (FIGUR).

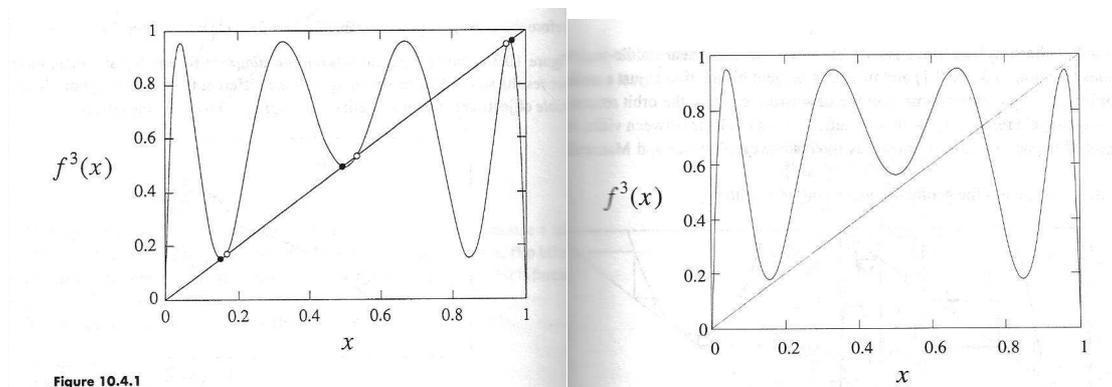
Weiterhin findet man, dass der Abstand zwischen sukzessiven Bifurkationen für mit einem konstanten Faktor abnimmt, je näher man an den Wert  $r_\infty$  herankommt,

$$\delta \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4.669\dots, \quad \text{Feigenbaum-Konstante.} \tag{8.84}$$

### 8.7.3.3 Chaos

Das interessanteste Verhalten der logistische Abbildung zeigt sich jedoch für  $r > r_\infty$ : für die meisten Werte von  $r$  findet man hier im 'orbit diagram' chaotisches Verhalten, d.h. ein *aperiodisches* Verhalten von  $x_n$  für  $n \rightarrow \infty$ . Das ist die diskrete Version des aperiodischen Verhaltens, das beim Lorenz-System z.B. im zeitlichen Verhalten  $z(t)$  auftrat.

Die Logistische Abbildung zeigt weiterhin für bestimmte Werte von  $r > r_\infty$  **periodische Fenster**, die zwischen chaotische Bereiche eingebettet sind, z.B. ein Periode-



**Fig. 8.9:** Dreifach-Iteration  $f^3(x)$  der Logistischen Abbildung, LINKS:  $r = 3.835$ , RECHTS:  $r = 3.8$  (STROGATZ).

3-Zyklus nahe  $r = 3.83$ . Vergößert man das Orbit-Diagramm in dessen Nähe ‘wie mit einer Lupe’, so ergibt sich quasi eine Kopie des Orbit-Diagramm ‘en miniature’.

#### 8.7.3.4 Periodenverdopplung

Die Periodenverdopplung ab  $r = 3$  versteht man folgendermaßen: Ein Fixpunkt  $x^{(2)}$  mit Periode-2-Zyklus der Iteration  $x_{n+1} = f(x_n)$  ist durch

$$f(f(x^{(2)})) = x^{(2)} \quad (8.85)$$

definiert, d.h. zweimaliges Anwenden der Funktion  $f$ . Die FP  $x^*$  von  $f$  erfüllen  $f(x^*) = x^*$ , also auch  $f(f(x^*)) = x^*$  und sind damit automatisch FP der zweifach iterierten Abbildung. Für die logistische Abbildung findet man die FP  $x_{\pm}^{(2)}$  von Gl. (8.85) dann durch Ausfaktorieren von  $x_0^*$  und  $x_r^*$  aus der entsprechenden quartischen Gleichung, mit dem Ergebnis

$$x_{\pm}^{(2)} = \frac{r+1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}, \quad (8.86)$$

was für  $r > 3$  reell wird und damit die Existenz des Periode-2-Zyklus für  $r > 3$  zeigt. Lineare Stabilitätsanalyse der FP  $x_{\pm}^{(2)}$  ergibt Stabilität von  $x_{\pm}^{(2)}$  für (AUFGABE)

$$\left| \frac{d}{dx} f(f(x)) \right|_{x=x_{\pm}^{(2)}} < 1 \rightsquigarrow 3 < r < 1 + \sqrt{6}. \quad (8.87)$$

#### 8.7.3.5 Periodisches Fenster

Das periodische Fenster mit dem Periode-3-Zyklus bei  $r \approx 3.83$  versteht man besser durch Betrachten der Dreifach-Iteration  $f^3(x)$ . Die acht Schnittpunkte  $f^3(x) = x$  sind Fixpunkte von  $f^3$ , von denen die zwei FP  $x_0^*$  und  $x_r^*$  von  $f(x)$  uninteressant sind. Drei

---

der Schnittpunkte ergeben stabile Fixpunkte von  $f^3(x)$  (FIGUR), drei sind instabil. Unterhalb eines kritischen Wertes von  $r$  wird die Diagonale zur Tangente für  $f^3(x)$  an allen FP von  $f^3(x)$ , so dass stabile und instabile FP verschmelzen und man wieder (von größeren zu kleineren  $r$ ) in den chaotischen Bereich des Orbit-Diagramms kommt.