Gliederung

- Kontinua, Körper und ihre Eigenschaften
- Koordinatensysteme (Euler, Lagrange) und ihre Transformation ineinander
- materielle Beschreibung und Feld- beschreibung
- Deformationsgradient – zeitliche Entwicklung infinitesimaler Volumen-, Flächen- und Linienelementen des Kontinuums
- kurzer Ausblick: polare Zerlegung des Deformationsgradienten und Reynoldsches Transporttheorem

Kontinuum und Körper

- Das Kontinuum besteht aus materiellen Punkten im Euklidischen Raum Ñ^3

- Im Gegensatz zum starren Körper sind neben Translationen und Drehungen auch Verzerrungen des Kontinuums zulässig.

- Begriff des **Körpers** $K \subset$ Ñ^3:
  1) K ist zusammenhängend und abgeschlossen.
  2) Der Rand ∑K besitzt stückweise stetige Normale.

zu 1): je zwei Punkte œ K sollen durch einen in K verlaufenden Weg verbunden werden können.
(ﬂ Hohlräume zulässig)

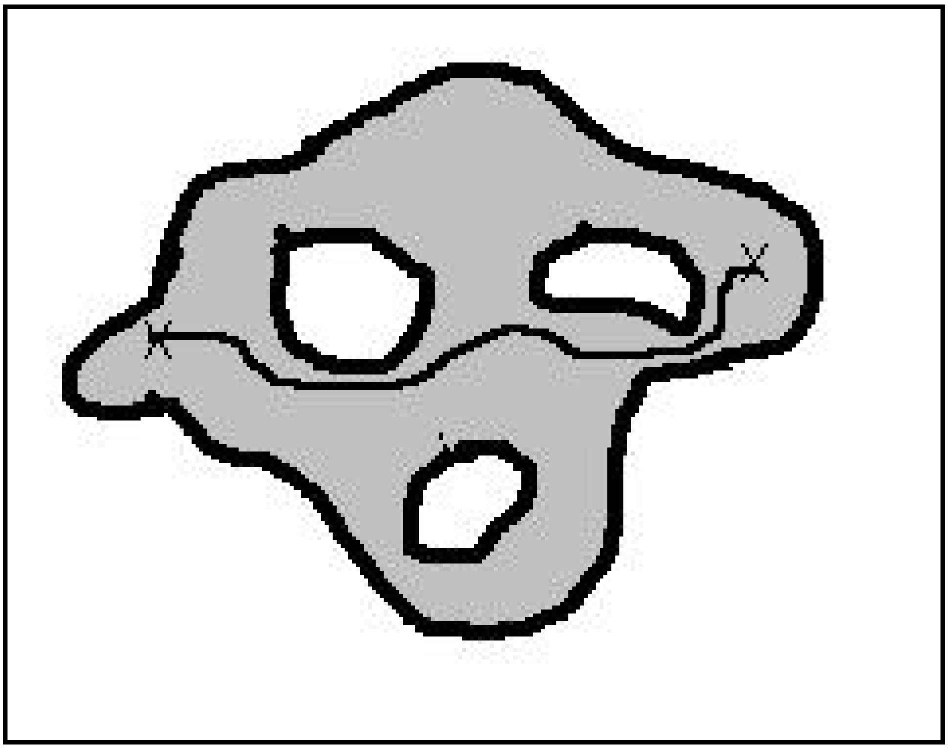

Abb. 1: zusammenhängender Körper (Beispiel)

zu 2): ermöglicht die Anwendung der häufig benutzten Integralsätze

- weitere Forderungen an das Kontinuum
    1) Benachbarte materielle Punkte sollen benachbart bleiben.
    2) Ein-Eindeutigkeit: ein materieller Punkt darf nicht an zwei Orten sein, sowie an einem Ort sollen sich nicht zwei materielle Punkte befinden.

- Konfiguration eines Körpers K ist die Zuordnung der materiellen Punkte X zu den Ortsvektoren $\mathbf{x}$:

  $c: X \,\#\, \mathbf{x}$ bzw. $c(X) = \mathbf{x}$

  zu 1): c muß stetig sein.

  zu 2): c muß bijektiv sein

- Stetigkeit und Bijektivität:

  fl c ist eine topologische Abbildung
  der materiellen Punkte auf die
  Punkte des Raumes.

  fl es ex. $c^{-1}(\mathbf{x}) = X$, die ebenfalls stetig
  und bijektiv ist.

  3) c muß differenzierbar sein

- Die zeitliche Abfolge von Konfigurationen
  heißt <u>Bewegung</u>.

  $\mathbf{x}(t) = c(X, t)$ stetig in t.

- Trick: zweckmäßige Kennzeichnung der mat. Punkte X mit den Ortsvektoren **a** zur Referenzzeit t_0.

  $\mathbf{x}(\mathbf{a}, t_0) = \mathbf{a}$ bzw. $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{x}$

  Die Konfiguration zur Zeit t_0 heißt Referenzkonfiguration.

- Für die Konfiguration zu einer beliebigen Zeit schreibt man:

  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$ Ø Bahnkurve des durch **a** gekennzeichneten materiellen Punktes

  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ Ø durch **a** gekennzeichneter materieller Punkt am Ort **x** zur Zeit t

x heißen räumliche bzw. Eulersche Koordinaten.

a heißen materielle bzw. Lagrange-koordinaten.

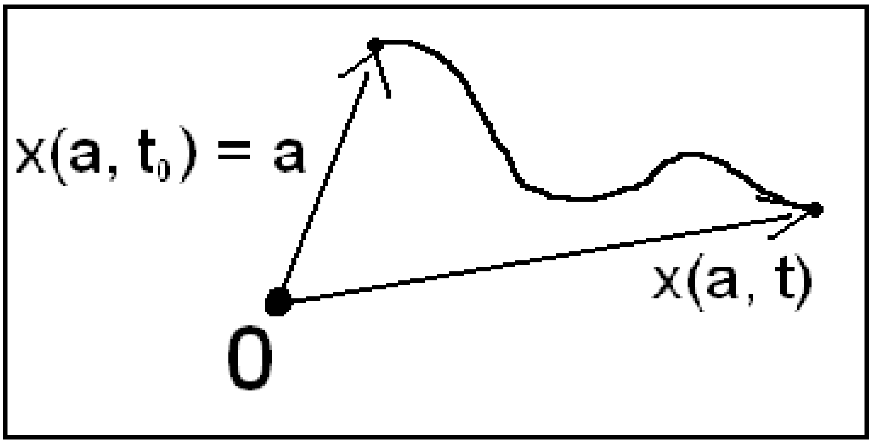

Abb. 2: Referenz- und Momentankonfiguration an einem materiellen Punkt

- Vollständige Eindeutigkeit der Konfiguration wird mit Angabe der Referenzzeit t_0 erreicht (z.B. $\mathbf{x}(\mathbf{a}, t, t_0)$).
- Allgemeinster Fall: verschiedene krumm-linige Koordinatensysteme für **x** und **a** mit verschiedenen Nullpunkten.

Materielle Beschreibung und Feldbeschreibung

- f sei eine für jeden materiellen Punkt **a** zu jeder Zeit angebbare Größe.

  f = f(**a**, t)

  Transformation **a** = **a**(**x**, t) fl f = f(**x**, t)

  f = f(**a**, t) Ø materielle bzw. Lagrange-beschreibung (mit matriel-lem Punkt **a** mitbewegter Beobachter)

  f = f(**x**, t) Ø Feld- bzw. Euler-Beschreibung (raumfester Beobachter am Ort **x**, an dem verschiedene materielle vorbeiziehen Punkte)

Deformationsgradient

- Totales Differential einer **x**-Komponente x_i nach der **a**-Komponente a_k bilden:

  $dx_i = (\sum x_i(\mathbf{a}, t) / \sum a_k)da_k =: F_{ik}(\mathbf{a}, t)da_k$

  bzw. allgemein: $d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{a}$

  (Transformation des Linenelmentes $d\mathbf{a}$ zweier infinitesimal benachbarten materiellen Punkten in Refernz-konfiguration t = t in das Linienelement $d\mathbf{x}$ derselben Punkte in der aktuellen Konfiguration zur Zeit t)

  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{a}, t)$: Tensor 2. Stufe mit den Komponennten $F_{ik} = \sum x_i/\sum a_k$

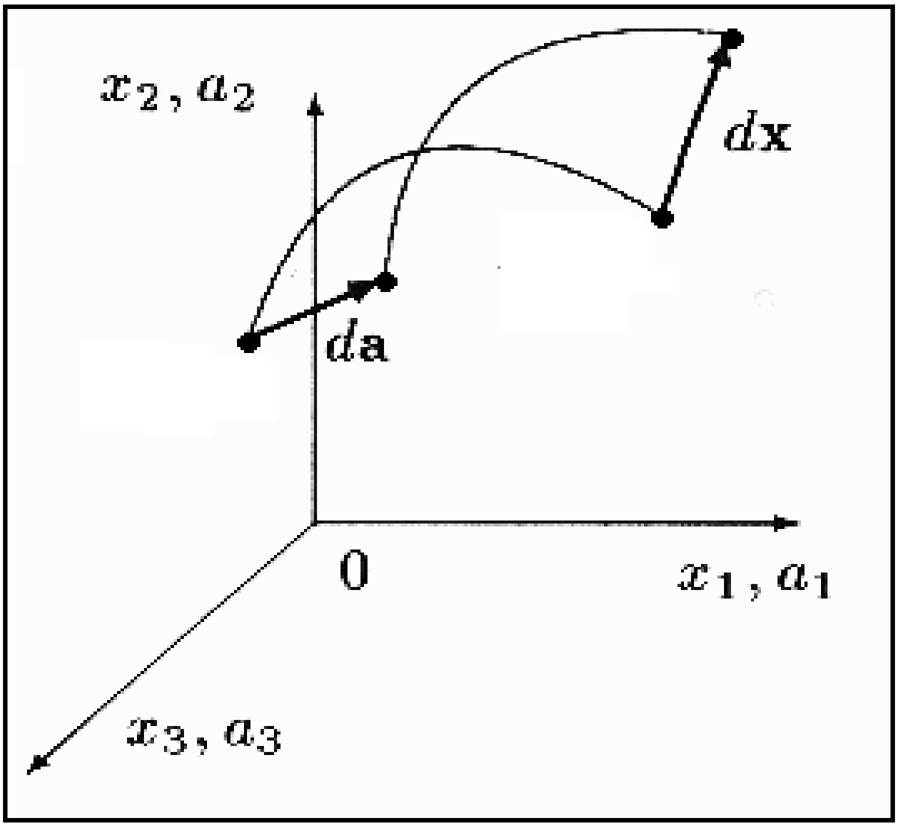

Abb. 3: Transformation eines Linienelementes von $t = \tau$

nach $t > \tau$

- Spezialfall **x** linear in **a**:

  fl **F** unabh. von **a**

  fl **x** = **Fa** (Fall der homogenen
  Deformation; Translation des
  Körpers; keine Verzerrung)

- $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ umkehrbar:

  fl $\mathbf{F}^{-1}$ ú $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ existiert

  mit den Einträgen $F^{-1}{}_{ik} = \sum \mathbf{a}_i(\mathbf{x}, t) / \sum x_k$

  und der Trafo $d\mathbf{a} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}$

- $\mathbf{F}(\mathbf{a}, t)$: materieller Deformationsgradient

  (Lagrange)

  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$: räumlicher Deformationsgradient

  (Euler)

- <u>Transformation infinitesimaler Volumenelemente:</u>

$dV_0 = (d\mathbf{a}_1 \text{ ä } d\mathbf{a}_2) \cdot d\mathbf{a}_3$ = Volumen zur Refernzzeit t_0

$dV = (d\mathbf{x_1} \text{ ä } d\mathbf{x_2}) \cdot d\mathbf{x_3}$ = Volumen zur Zeit t (Spatprodukt)

$$= (\mathbf{F}d\mathbf{a}_1 \text{ ä } \mathbf{F}d\mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{F}d\mathbf{a}_3$$

$$= (\det\mathbf{F})dV_0$$

Also: $dV = \underbrace{(\det\mathbf{F}(\mathbf{a}, t))}_{\text{Funktionadeterminante}} dV_0$

- Für $t = \tau$ ist $\det\mathbf{F} = 1$, da $dV = dV_0$.

Wegen Stetigkeit und Bijektivität der Transformation $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ ist ihre Funktionaldeterminante det$\mathbf{F} > 0$ i.a.

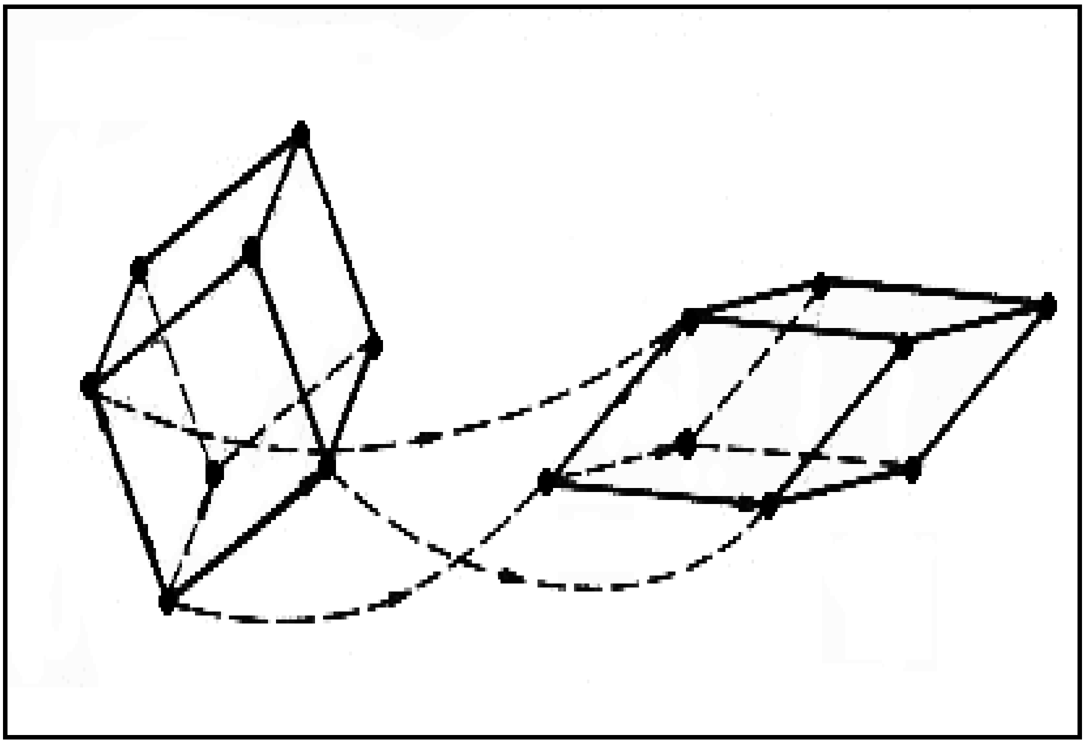

Abb. 4: Transformation eines Volumenelementes von $t = \tau$ nach $t > \tau$

- Bei homogener Transformation ($\mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$ linear in $\mathbf{a}$) ist sogar $V= (\det\mathbf{F})V_0$, da der Deformationnsgradient $\mathbf{F}$ für alle Punkte gleich wird.

- <u>Transformation infinitesimaler Flächen-elemente:</u>

$d\mathbf{A_0} = d\mathbf{a}_1$ ä $d\mathbf{a}_2$

$d\mathbf{A} = d\mathbf{x}_1$ ä $d\mathbf{x_2}$

$= \mathbf{F}d\mathbf{a}_1$ ä $\mathbf{F}d\mathbf{a}_2$

$= (\det\mathbf{F})(\mathbf{F}^{-1})^T d\mathbf{A}_0$

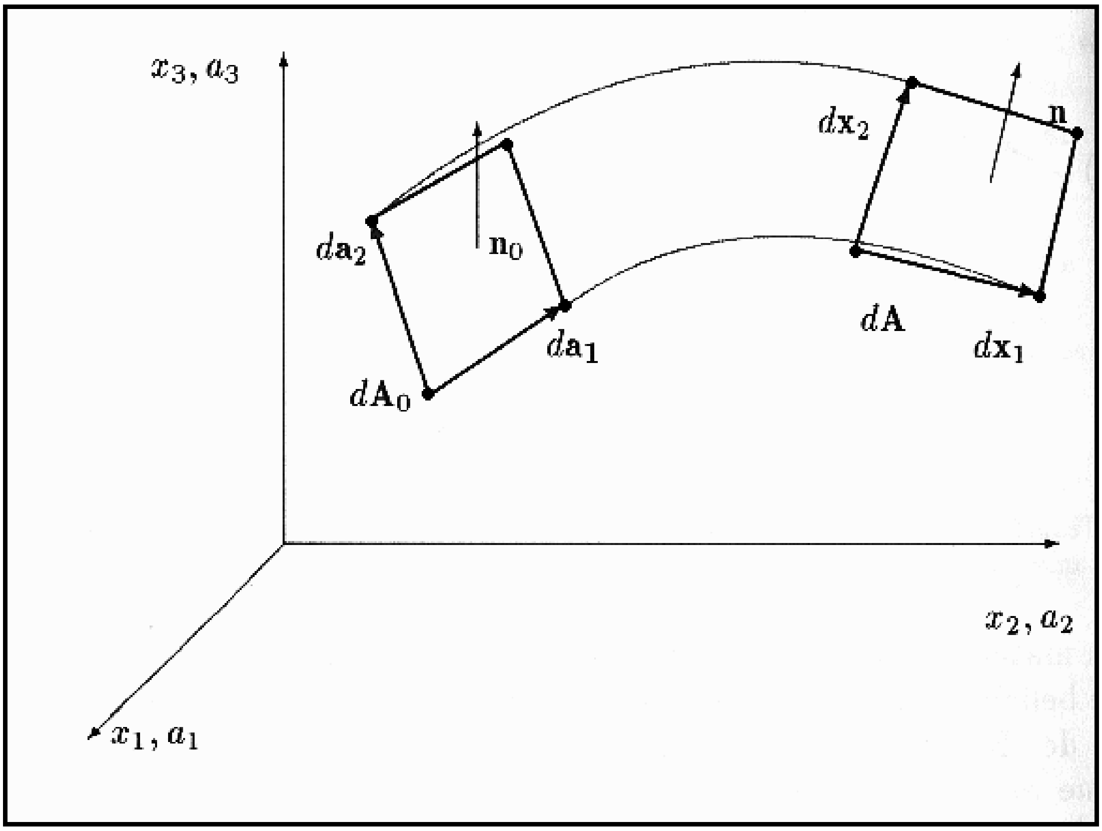

Abb. 5: Transformation eines Flächenelementes von $t = \tau$ nach $t > \tau$

- Mit Hilfe der substanziellen Zeitableitung und des Deformationsgradienten kann man das Reynold'sche Transporttheorem herleiten: Aufspaltung des Volumenintegrals einer zeitabhängigen Größe (Integrand) über ein zeitabhängiges Gebiet in
  1) Volumenintegral über die lokale Ableitung des Integranden.
  2) Flußintegral (Oberflächenintegral) über die Flußgeschwindigkeit der Größe durch die geschlossene Oberfläche des Gebietes.

Polare Zerlegung des Deformationsgardienten:

• $\det\mathbf{F} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{F}$ ist regulär (nichtsingulär)

$\Rightarrow$ polare Zerlegung von **F**

möglich $\mathbf{F} = \mathbf{RU} = \mathbf{VR}$

mit **R**: orthogonaler Tensor

V, **U**: s.a. und pos. def. Tensoren

R, **U**, **V** sind eindeutig aus **F** estimmbar.

• $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1} \Rightarrow \det\mathbf{R} = +1 \Rightarrow \mathbf{R}$ bewirkt eine starre Drehung.

V, **U** diagonalisierbar $\Rightarrow$ bewirken eine Dilatation (Streckung oder Stauchung) in Richtung der Hauptachsen.

- Die polare Zerlegung zeigt, daß alle lokalen Deformationen, die durch **F** beschrieben werden, in eine starre, lokale Drehung und eine lokale Dilatation beschrieben werden können.