

Skript zur
Elektrodynamik

Wintersemester 2018/2019
Technische Universität Berlin



gehalten von
PD Dr. Gernot Schaller

zuletzt aktualisiert: 14:47, 13. Februar 2019

Die Vorlesung zur Theoretischen Elektrodynamik wird wöchentlich zweimal stattfinden, Mittwochs 12:00-14:00 Uhr und Freitags 8:00-10:00 Uhr im Hörsaal EW 203. Korrekturen und Vorschläge zur Verbesserung sollten an mich gerichtet werden gernot.schaller@tu-berlin.de.

Die Studierenden sollten mit der Mechanik vertraut sein, eine grundlegende Kenntnis der Quantenmechanik kann hilfreich sein. Zur Vorlesung werden wöchentlich Übungsaufgaben ausgegeben (Freitag), welche innerhalb von 10 Tagen bearbeitet werden sollten (Stichtag: Montag 12:00 Uhr, Abgabe im Briefkasten im ER-Gebäude). Die Übungen werden gehalten von Dr. J. Burelbach, Dr. D. Kulawiak und A. Kraft, zusätzlich unterstützen uns die Tutoren P. Stammer und P. Knospe. Zur Zulassung zur Klausur müssen 50% der Punkte in den Übungsaufgaben erreicht werden, die bestandene Klausur (auch 50%) berechtigt dann zur mündlichen Prüfung.

Ein Skript wird online unter der Adresse

<http://www1.itp.tu-berlin.de/schaller/lectures.html>

zur Verfügung gestellt werden. Dieses Skript ist kein Originalwerk. Es basiert auf eigenen Vorlesungsmitschriften, anderen Skripten zur Elektrodynamik und Lehrbüchern. Insbesondere basiert es auf Skripten zur Elektrodynamik von Prof. Gerhard Soff und Prof. Tobias Brandes, welche leider beide viel zu früh verstarben, und auf einem Skript zur Feldquantisierung von Prof. Claudius Gros. Ergänzungen kommen aus den unten referenzierten Lehrbüchern, insbesondere den ersten drei Beiträgen.

Zum Selbststudium neben der Vorlesung werden – zusätzlich zum Skript – folgende Lehrbücher empfohlen:

- J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, (Wiley, New York)
- T. Fließbach, *Elektrodynamik – Lehrbuch zur Theoretischen Physik II*, (Springer, Heidelberg)
- M. Bartelmann, B. Feuerbacher, T. Krüger, D. Lüst, A. Rebhan und A. Wipf, *Theoretische Physik 2 – Elektrodynamik* (Springer Spektrum, Berlin)
- W. Greiner, *Klassische Elektrodynamik*, (Harri Deutsch, Thun)
- W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 3, Elektrodynamik*, (Springer, Ulmen)
- E. Rebhan, *Theoretische Physik: Elektrodynamik*, (Elsevier, München)
- D. J. Griffiths, *Elektrodynamik – Eine Einführung*, (Pearson Education Deutschland, München)
- J. Schwinger, L. L. DeRaad, K. A. Milton, W. Tsai, *Classical Electrodynamics*, (Westview Press, Abingdon)
- L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Klassische Feldtheorie*, (Akademie-Verlag, Berlin)
- A. Sommerfeld, *Elektrodynamik*, (Harri Deutsch, Thun)
- G. Arfken, *Mathematical methods for physicists*, (Academic Press, New York)

Inhaltsverzeichnis

1	Elektrostatik	3
1.1	Coulomb-Gesetz	3
1.2	Integralsätze	5
1.2.1	Integralsatz von Stokes	5
1.2.2	Integralsatz von Gauss	6
1.3	Stromdichte	8
1.4	Feldlinien	9
1.5	Potential	10
1.6	Darstellung der 3d δ -Distribution	11
1.7	Grundgleichungen der Elektrostatik	12
1.8	Elektrostatische Feldenergie	14
1.9	Radialsymmetrische Ladungsverteilungen	16
1.10	Grenzflächen	18
1.11	Der Plattenkondensator	19
1.12	Randwertprobleme	20
1.13	Die Greensche Funktion der Poisson-Gleichung	24
1.14	Die Methode der Bildladungen	26
1.14.1	Beispiel: Punktladung vor Ebene	29
1.14.2	Beispiel: Punktladung vor Kugel	30
2	Multipolentwicklungen	33
2.1	Vollständige Funktionensysteme	33
2.1.1	Fourier-Reihen	34
2.1.2	Legendre-Polynome	35
2.2	Lösung der Laplace-Gleichung mit axialer Symmetrie	38
2.3	Kugelfunktionen	40
2.4	Additionstheorem der Kugelflächenfunktionen	44
2.5	Multipolentwicklung	46
2.5.1	Sphärische Multipolentwicklung	46
2.5.2	Kartesische Multipolentwicklung	47
2.6	Wechselwirkungsenergie mit dem äußeren Feld	49
3	Dielektrika	51
3.1	Mittelungen	51
3.2	Dielektrische Verschiebung	53
3.3	Polarisation	54
3.4	Elektrostatische Feldenergie	56

4	Magnetostatik	59
4.1	Einführung und Definitionen	59
4.2	Das Gesetz von Biot und Savart	63
4.3	Kräfte zwischen Leitern	64
4.4	Maxwell-Gleichungen der Magnetostatik	66
4.5	Das Vektorpotential	68
4.6	Beispiel: Magnetfeld einer Stromschleife	69
4.7	Magnetisches Moment stationärer lokalisierter Ströme	71
4.8	Dipol im externen Magnetfeld	73
4.8.1	Kraft	73
4.8.2	Drehmoment	74
4.9	Magnetostatik in Materie	75
4.9.1	Grundgleichungen der Magnetostatik	75
4.9.2	Formen von Magnetismus	77
4.9.3	Verhalten in Grenzflächen	79
5	Allgemeine Maxwell-Gleichungen	81
5.1	Grundgleichungen	81
5.2	Mikroskopische Maxwell-Gleichungen und Potentiale	83
5.3	Bestimmung der Eichfunktion	85
5.3.1	Lorenz-Eichung	85
5.3.2	Coulomb-Eichung	85
5.4	Erhaltungssätze und Poynting-Vektor	87
5.4.1	Energiebilanz	87
5.4.2	Impulsbilanz	89
5.5	Lösungen im Vakuum	92
5.5.1	Ebene Wellen	92
5.5.2	Polarisation	95
5.5.3	Wellenpakete	98
5.5.4	Kugelwellen	100
5.6	Lösungen in Materie	101
5.7	Kovariante Formulierung	103
5.7.1	Inertialsysteme und Galilei-Transformation	103
5.7.2	Michelson-Versuch und Lorentz-Transformation	104
5.7.3	Beispiele: Längenkontraktion und Zeitdilatation	107
5.7.4	Vierervektoren	108
5.7.5	Kovariante Notation der Elektrodynamik	110
5.7.6	Transformation der Felder	113
5.7.7	Beispiel: Gleichförmig bewegte Ladungsverteilung	114
5.7.8	Beispiel: Doppler-Effekt	116
6	Strahlung	117
6.1	Heuristische Einführung in die Funktionentheorie	117
6.1.1	Differenzieren in \mathbb{C}	117
6.1.2	Anwendung: Lösung der zweidimensionalen Laplacegleichung	119
6.1.3	Integrieren in \mathbb{C}	119
6.1.4	Die Laurent-Reihe	120
6.1.5	Cauchy's Integralsatz	121
6.1.6	Der Residuensatz	122
6.1.7	Beispiele	124

6.2	Retardierte Potentiale	128
6.3	Potentiale einer beschleunigten Punktladung	132
6.4	Strahlung zeitlich oszillierender Quellen	134
6.5	Dipolstrahlung	136
6.6	Bohrsches Atommodell	139
6.7	Schwingkreis	140
6.8	Streuung von Licht	143
6.9	Formfaktor	147
6.9.1	Röntgenstrukturanalyse	147
6.9.2	Kohärente und Inkohärente Streuung	148
7	Optik	149
7.1	Kausale Verknüpfungsgleichungen	149
7.2	Wellenlösungen in Medien	152
7.3	Die dielektrische Funktion	153
7.3.1	Kramers-Kronig-Relationen	153
7.3.2	Metalle	154
7.3.3	Isolator	156
7.4	Brechung und Reflexion	157
7.5	Lichtausbreitung in inhomogenen Medien	163
8	Ausgewählte Themen der Elektrodynamik	167
8.1	Wellenausbreitung in Hohlleitern	167
8.1.1	Rechteckiger Hohlleiter	167
8.1.2	Hohlleiter mit konstantem Querschnitt	170
8.2	Lagrange-Hamilton-Formalismus für Punktteilchen	172
8.2.1	Freies Punktteilchen – relativistisch	173
8.2.2	Lorentzkraft – nichtrelativistisch	174
8.2.3	Lorentzkraft – relativistisch	175
8.3	Lagrange-Hamilton-Formalismus für Felder	176
8.3.1	Ableitung der Euler-Lagrange-Gleichungen	177
8.3.2	Beispiel: Kette von Punktteilchen	178
8.3.3	Elektrostatik	179
8.3.4	Magnetostatik	180
8.3.5	Elektrodynamik	180
8.3.6	Noether-Theorem für Felder	182
8.3.7	Kombinierter Lagrange-Hamilton-Formalismus	183
8.3.8	Hamilton-Dichte der Elektrodynamik	184
8.4	Quantisierung des elektromagnetischen Feldes	186
8.4.1	Lösung der Wellengleichung in Coulomb-Eichung	186
8.4.2	Quantisierung	188
8.4.3	Korrespondenz und Kohärente Zustände	192
8.5	Elektron-Feld-Wechselwirkung	195
8.5.1	Hamilton-Operator	195
8.5.2	Fermis Goldene Regel	197
8.5.3	Grundlegende Prozesse	198
8.5.4	Lebensdauer	200

Vorbemerkungen

Notation und Konventionen

Vektoren werden im Skript durch Fettdruck dargestellt werden. In der Regel ist jedoch aus dem Kontext erkennbar ob es sich um eine Vektor- oder Skalarwertige Größe handelt, im Zweifel hilft also einfaches Nachfragen.

Vorausgesetzt wird die Kenntnis der Dirac-Delta Distribution $\delta(x)$, der Heaviside-Theta-Funktion $\Theta(x)$ und grundlegender Begriffe aus der Mechanik (Potential, Gradient). Der Nabla-Operator

$$\nabla \equiv \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \quad (1)$$

kann wie ein vektorwertiger Operator benutzt werden wenn die Ableitungen alle nach rechts wirken, und wir rekapitulieren die Begriffe des Gradienten einer skalaren Funktion

$$\text{grad}\phi = \nabla\phi = \begin{pmatrix} \partial_x\phi \\ \partial_y\phi \\ \partial_z\phi \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Weiterhin kamen in der Mechanik auch die Divergenz eines Vektorfeldes

$$\text{div}\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z \quad (3)$$

und die Rotation eines Vektorfeldes vor

$$\text{rot}\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Wir werden in dieser Vorlesung vorwiegend sogenannte Gauss-Einheiten benutzen, da diese die Notation etwas vereinfachen. Die Physik ist natürlich unabhängig von der Wahl der Einheiten, einen Überblick dazu findet man z.B. im Jackson

Größe	Gauss-System	SI-System
elektrische Feldstärke	\mathbf{E}	$\mathbf{E}_{\text{SI}} = \mathbf{E}/\sqrt{4\pi\epsilon_0}$
magnetische Feldstärke	\mathbf{H}	$\mathbf{H}_{\text{SI}} = \mathbf{H}/\sqrt{4\pi\mu_0}$
dielektrische Verschiebung	\mathbf{D}	$\mathbf{D}_{\text{SI}} = \mathbf{D}\sqrt{\epsilon_0/(4\pi)}$
magnetische Induktion	\mathbf{B}	$\mathbf{B}_{\text{SI}} = \mathbf{B}\sqrt{\mu_0/(4\pi)}$
Ladungsdichte	ρ	$\rho_{\text{SI}} = \sqrt{4\pi\epsilon_0}\rho$
Stromdichte	\mathbf{j}	$\mathbf{j}_{\text{SI}} = \sqrt{4\pi\epsilon_0}\mathbf{j}$

Grundgleichungen

Die Maxwell-Gleichungen beschreiben das elektromagnetische Feld sowohl im Vakuum als auch in der Materie und damit sämtliche Effekte der klassischen Elektrodynamik.

In Gauss-Einheiten sind die Maxwell-Gleichungen folgende:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.\end{aligned}\quad (5)$$

Die Lösungen der Gleichungen sind das elektrische Feld \mathbf{E} und das magnetische Feld \mathbf{H} sowie die dielektrische Verschiebung \mathbf{D} (auch: elektrische Flussdichte) und die magnetische Induktion \mathbf{B} (auch: magnetische Flussdichte). Letztere hängen mit den ersten beiden Feldern über eine einfache lineare Relation zusammen z.B. für isotrope und homogene Medien einfach

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}.\quad (6)$$

Hierbei ist ϵ die Dielektrizitätskonstante und μ die magnetische Permeabilität, im Allgemeinen können diese Materialkonstanten aber auch Tensoren sein. Auf der rechten Seite von Gl. (5) stehen aber auch noch weitere Größen, z.B. die Ladungsdichte ρ (Skalar) und die Stromdichte \mathbf{j} (Vektor), welche vorgegeben sind und sowohl vom Ort als auch von der Zeit abhängen können. Weiterhin fällt auf, dass die Lichtgeschwindigkeit c in den Maxwell-Gleichungen auftaucht.

Auf rein formaler Ebene sehen wir, dass die Maxwell-Gleichungen aus zwei skalaren und zwei vektoriellen partiellen Differenzialgleichungen bestehen, die miteinander gekoppelt sind. Eine andere Klassifikation wäre gegeben durch zwei homogene und zwei inhomogene Gleichungen.

Wenn wir die Vektoren komponentenweise schreiben haben wir somit 8 gekoppelte Differentialgleichungen von denen 4 inhomogen sind. Diese werden durch Angabe der Randbedingungen und Anfangsbedingungen (=Randbedingung in der Zeit) eindeutig gelöst. Es fällt weiterhin auf, dass die Maxwellgleichungen eine etwas asymmetrische Struktur haben, z.B. ist die Gleichung für die magnetische Induktion sehr einfach, die anderen Gleichungen sind deutlich komplizierter. Wir werden im Laufe der Vorlesung auch eine symmetrische Schreibweise kennenlernen, bei der sofort klar wird, dass die Maxwell-Gleichungen relativistisch invariant sind.

Hat man die Maxwell-Gleichungen denn einmal gelöst, kann die Bewegung eines geladenen Teilchens über die Lorentz-Kraft

$$\mathbf{F} = q \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} \right]\quad (7)$$

berechnet werden, wobei \mathbf{v} die Geschwindigkeit des Teilchens beinhaltet. Weiterhin werden wir sehen, dass aus den Maxwell-Gleichungen auch die Kontinuitätsgleichung folgt

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0,\quad (8)$$

welche einfach nur die Erhaltung der Gesamtladung beinhaltet.

Kapitel 1

Elektrostatik

Dieses Kapitel behandelt den vereinfachten Fall verschwindender Magnetfelder und eines zeitlich konstanten elektrischen Feldes. In den Maxwell-Gleichungen verschwinden somit die Zeitableitungen, das Magnetfeld und die magnetische Induktion, d.h. unsere Maxwell-Gleichungen (5) reduzieren sich auf

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Man hat weiterhin die Verknüpfung $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$. In nichtpolarisierbaren Medien (z.B. Vakuum) reduziert sich dieses auf $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E}$, und in Gauss-Einheiten haben wir sogar per Konvention $\epsilon_0 = 1$, so dass man letztlich nur Gleichungen für das elektrische Feld betrachten muss

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0.\end{aligned}\tag{1.2}$$

1.1 Coulomb-Gesetz

Wir werden uns dem Coulomb-Gesetz rein empirisch nähern. Einfachste Experimente haben gezeigt, dass elektrisch geladene Massepunkte eine Kraft aufeinander ausüben. Diese ist abstoßend für gleichnamige Ladungen und anziehend für verschiedene Ladungen, wirkt in Richtung der Verbindungslinie zwischen den beiden Massepunkten und fällt mit dem Quadrat des Abstandes ab. Wir können also allgemein ansetzen

$$\mathbf{F}_{12} = kq_1q_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} = kq_1q_2 \frac{1}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{12}.\tag{1.3}$$

Hierbei bezeichnet q_i und \mathbf{r}_i Ladung bzw. Ort der Massepunkte, \mathbf{e}_{12} den normierten Einheitsvektor von \mathbf{r}_2 nach \mathbf{r}_1 und k ist eine Konstante deren Wert vom gewählten Einheitensystem abhängt. Zum Beispiel gilt im Gauss-System $k = 1$, so dass sich für den Betrag der Kraft der einfache Ausdruck

$$F = \frac{q_1q_2}{r^2}\tag{1.4}$$

ergibt. Umstellen nach der Ladung liefert dann, dass im Gauss-System die Dimension der Ladung gegeben ist durch

$$\dim[q] = \sqrt{\text{N m}^2} = \sqrt{\frac{\text{kg m}^3}{\text{s}^2}}.\tag{1.5}$$

Diese Einheit ist auch als elektrostatische Einheit bekannt.

Alternativ dazu können wir auch die Ladung in der Einheit Coulomb ($1 \text{ C} = 1 \text{ A s}$) messen, wie in SI-Einheiten üblich. Da die Kraft weiterhin in Newton (N) gemessen wird muss die Konstante k entsprechend anders gesetzt werden

$$k_{\text{SI}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}. \quad (1.6)$$

Hierbei ist die **Dielektrizitätskonstante des Vakuums** gegeben durch

$$\epsilon_0 = 8.854187817 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2}. \quad (1.7)$$

Die Coulomb-Kraft ist eine reine Zwei-Körper-Kraft, wenn mehrere Ladungsträger involviert sind, ergibt sich die Gesamtkraft einfach durch das Superpositionsprinzip. Zum Beispiel erfährt bei N Punktladungen an den Orten \mathbf{r}_i die i -te Punktladung am Orte \mathbf{r}_i die Coulomb-Kraft aller anderen

$$\mathbf{F}_i = q_i \sum_{j \neq i} q_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}. \quad (1.8)$$

Hierbei wurde in der Summe die Selbstwechselwirkung explizit ausgeschlossen. Um mit dem Konzept eines Feldes, welches durch die anderen Ladungen erzeugt wird, arbeiten zu können, definiert man die elektrische Feldstärke \mathbf{E} über die Beziehung

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (1.9)$$

Demzufolge erhält man das von einer Punktladung q_j am Orte \mathbf{r}_j erzeugte elektrische Feld am Punkt \mathbf{r} mittels

$$\mathbf{E}_j(\mathbf{r}) = q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3}. \quad (1.10)$$

Für N Ladungen wird das elektrische Feld nach dem Superpositionsprinzip berechnet

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_j \mathbf{E}_j(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3}. \quad (1.11)$$

Wenn nun die Ladungen sehr dicht liegen ist es zweckmäßig zu einer Kontinuumsbeschreibung überzugehen. Hierbei ersetzt man in der Summe oben die Ladung am Orte \mathbf{r}_j durch die Ladungsdichte

$$q_j \rightarrow \rho(\mathbf{r}') d^3 r', \quad (1.12)$$

was auf die Gleichung

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 r' \quad (1.13)$$

führt. Diese gibt das von einer kontinuierlichen Ladungsverteilung erzeugte elektrische Feld an. Wenn man

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_j q_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \quad (1.14)$$

einsetzt, kommt man wieder auf die ursprüngliche Darstellung mit der Summe zurück.

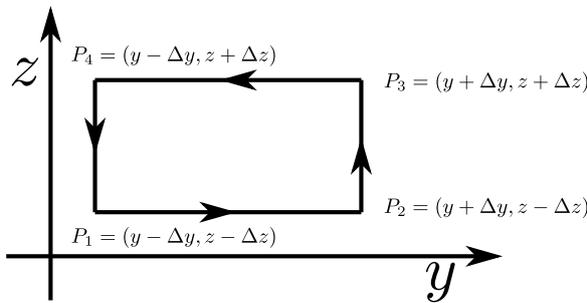


Abbildung 1.1: Skizze einer rechteckigen Fläche, berandet von einer geschlossenen Kontur.

1.2 Integralsätze

1.2.1 Integralsatz von Stokes

Der **Integralsatz von Stokes** lautet

$$\oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) d\mathbf{S}. \quad (1.15)$$

Hierbei ist ∂S eine beliebige geschlossene Kurve im dreidimensionalen Raum, welche die Fläche S mit Normalenvektor $d\mathbf{S}$ berandet (hier gibt es natürlich mehrere Möglichkeiten für die Fläche bei vorgegebener Berandung, man stelle sich z.B. eine schwingende Trommel vor). Allgemein werden geschlossene Konturintegrale oft mit dem Symbol \oint bezeichnet. Die linke Seite gibt einfach nur das Kurvenintegral des Vektorfeldes \mathbf{A} entlang des Randes an, die rechte Seite gibt das Oberflächenintegral der Rotation von \mathbf{A} über die Fläche S an. Insbesondere wenn also z.B. die Parametrisierung der Fläche schwierig ist kann der Integralsatz benutzt werden um Oberflächenintegrale auf einfache Kurvenintegrale abzubilden. Wir wollen den Integralsatz beweisen, auch um ein Gefühl für Begriffe wie Divergenz und Rotation zu bekommen.

Wir betrachten zunächst nur ein rechteckiges Flächenelement welches in der yz -Ebene orientiert ist, vgl. Abb. 1.1. Das Kurvenintegral berechnet sich zu

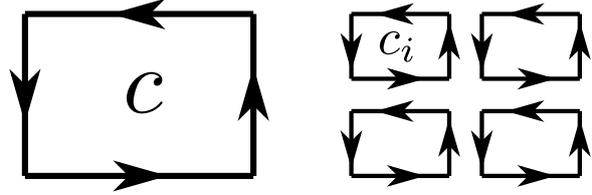
$$\begin{aligned} \oint_{P_1 \dots P_4} \mathbf{A} d\mathbf{r} &= \int_{P_1 P_2} A_y dy + \int_{P_2 P_3} A_z dz + \int_{P_3 P_4} A_y dy + \int_{P_4 P_1} A_z dz \\ &\approx A_y(x, y, z - \Delta z)(+2\Delta y) + A_z(x, y + \Delta y, z)(+2\Delta z) \\ &\quad + A_y(x, y, z + \Delta z)(-2\Delta y) + A_z(x, y - \Delta y, z)(-2\Delta z) \\ &\approx (A_y - \Delta z \partial_z A_y)(+2\Delta y) + (A_z + \Delta y \partial_y A_z)(+2\Delta z) \\ &\quad + (A_y + \Delta z \partial_z A_y)(-2\Delta y) + (A_z - \Delta y \partial_y A_z)(-2\Delta z) \\ &= 4\Delta y \Delta z (\partial_y A_z - \partial_z A_y) = \Delta S (\nabla \times \mathbf{A})_x = d\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Da die Fläche in der yz -Ebene liegt gibt es keine weiteren Beiträge, und die Fläche des Teilstückes beträgt offensichtlich $\Delta S = 4\Delta y \Delta z$. Weiterhin haben wir angenommen, dass die Fläche so klein wird, dass das Vektorfeld auf ihr und auf den Rändern kaum noch variiert, so dass wir die Taylor-Entwicklung für kleine Δy und kleine Δz einsetzen durften. Wir können die Fläche natürlich beliebig drehen und verallgemeinern diese Relation damit auf kleine beliebig orientierte Flächen

$$\mathbf{n}_S \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.17)$$

Jetzt wird der Beweis vom Stokesschen Integralsatz ganz einfach. Das Linienintegral entlang eines geschlossenen Weges lässt sich ganz einfach in lauter kleine Wege zerlegen, vgl. Abb. 1.2. Damit gilt

Abbildung 1.2: Geschlossene Kurvenintegrale lassen sich additiv in viele kleinere zerlegen, da sich die inneren Kurvenstücke aufgrund der Orientierung gegenseitig wegheben. Das Schema kann rekursiv angewendet werden.



$$\begin{aligned}\oint_c \mathbf{A} d\mathbf{r} &= \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \oint_{c_i} \mathbf{A} d\mathbf{r}_i = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \mathbf{n}_{S,i} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \Delta S_i = \iint_S \mathbf{n}_S \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS \\ &= \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}.\end{aligned}\quad (1.18)$$

Dies ist der Integralsatz von Stokes.

1.2.2 Integralsatz von Gauss

Der **Integralsatz von Gauss** lautet

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d^3r = \oiint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.19)$$

wobei V ein Volumen mit geschlossener Oberfläche ∂V bezeichnet und \mathbf{A} ein differenzierbares Vektorfeld ist. Allgemein werden geschlossene Oberflächenintegrale oft mit dem Symbol \oiint bezeichnet. Zunächst beleuchten wir den **Fluss eines Vektorfeldes** durch eine Fläche S . Dieser ist definiert durch

$$\phi_S[\mathbf{A}] = \iint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.20)$$

wobei $d\mathbf{S}$ den nach außen gerichteten Normalenvektor auf der Fläche bezeichnet. Also ist der Fluss eine skalare Größe. Ähnlich wie bei der Riemannschen Summe für eindimensionale Integrale können wir auch den Fluss durch eine Summe approximieren

$$\phi_S[\mathbf{A}] \approx \sum_i \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) \Delta S_i, \quad (1.21)$$

was im Limes unendlich vieler und unendlich kleiner Flächenstücke wieder gegen die obige Integral-Definition konvergiert. Hierbei bezeichnet $\mathbf{A}(\mathbf{r}_i)$ einen repräsentativen Wert des Vektorfeldes auf dem i -ten Flächenstück und $\Delta S_i = \Delta S_i \mathbf{n}_i$ ist gegeben durch die Größe des Flächenstückes ΔS_i und den dazugehörigen (nach außen zeigenden) Normalenvektor \mathbf{n}_i .

Als einfachstes Beispiel betrachten wir ein räumlich homogenes Vektorfeld

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

und als Volumen einen Quader mit den Seitenlängen a, b, c . Dann ergibt sich für das Oberflächenintegral

$$\begin{aligned}\oiint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \iint A_x dS_x + \iint A_y dS_y + \iint A_z dS_z \\ &= A_x bc - A_x bc + A_y ac - A_y ac + A_z ab - A_z ab = 0.\end{aligned}\quad (1.23)$$

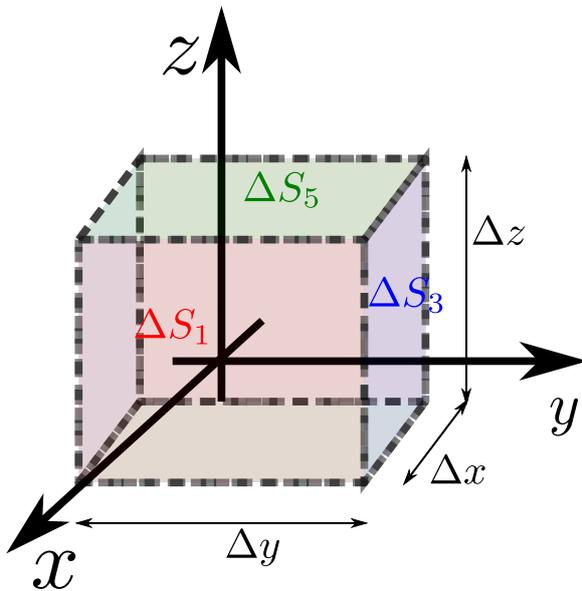


Abbildung 1.3: Skizze eines Quaders mit bezeichneten Flächen wie im Text beschrieben. Die gegenüberliegenden Flächen (in Realität nicht sichtbar) haben gerade entgegengesetzte Normalenvektoren.

Für ein homogenes Feld ist der Fluss durch einen Quader also einfach Null, was sich für homogene Felder auch auf beliebig geformte Körper verallgemeinern lässt (wir können einen beliebigen Körper durch viele kleine Quader approximieren). Anschaulich bedeutet das: Was in den Quader hinein fließt, fließt auch wieder heraus.

Anders kann es aussehen wenn Vektorfelder vom Ort abhängen. Dann definiert man die mittlere Quelledichte eines Vektorfeldes über

$$D_V[\mathbf{A}] = \frac{1}{V} \oiint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.24)$$

Im Grenzübergang $V \rightarrow 0$ wird die Divergenz eines Vektorfeldes definiert

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oiint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.25)$$

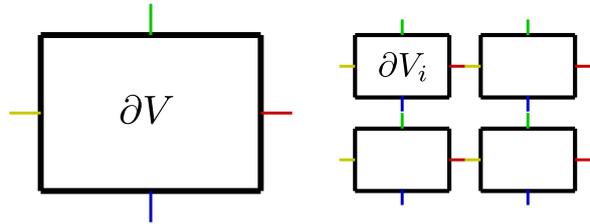
Anhand des einfachen Beispiels eines Quaders mit Ausdehnung Δx , Δy und Δz und Mittelpunkt bei (x_0, y_0, z_0) können wir zeigen, dass dies mit der uns bekannten Definition der Divergenz übereinstimmt. Sei dieser gegeben durch die Flächen

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{S}_1 &= \Delta y \Delta z \mathbf{e}_x = -\Delta \mathbf{S}_2, \\ \Delta \mathbf{S}_3 &= \Delta x \Delta z \mathbf{e}_y = -\Delta \mathbf{S}_4, \\ \Delta \mathbf{S}_5 &= \Delta x \Delta y \mathbf{e}_z = -\Delta \mathbf{S}_6, \end{aligned} \quad (1.26)$$

vgl. Abb. 1.3. Für den Fluss durch die Flächen gilt dann

$$\begin{aligned} \oiint_{\partial V} \mathbf{A} d\mathbf{S} &= \iint dydz [A_x(x_0 + \Delta x/2, y_0, z_0) - A_x(x_0 - \Delta x/2, y_0, z_0)] \\ &\quad + \iint dx dz [A_y(x_0, y_0 + \Delta y/2, z_0) - A_y(x_0, y_0 - \Delta y/2, z_0)] \\ &\quad + \iint dx dy [A_z(x_0, y_0, z_0 + \Delta z/2) - A_z(x_0, y_0, z_0 - \Delta z/2)] \\ &\approx \iint dydz \partial_x A_x(x_0, y_0, z_0) \Delta x + \iint dx dz \partial_y A_y(x_0, y_0, z_0) \Delta y + \iint dx dy \partial_z A_z(x_0, y_0, z_0) \Delta z \\ &\rightarrow \Delta V [\partial_x A_x(x_0, y_0, z_0) + \partial_y A_y(x_0, y_0, z_0) + \partial_z A_z(x_0, y_0, z_0)], \end{aligned} \quad (1.27)$$

Abbildung 1.4: Das Oberflächenintegral eines Quaders (oder anders geformten Volumens) kann durch die Summe der Oberflächenintegrale über viele kleine Quader approximiert werden, da sich die Beiträge von benachbarten inneren Flächen aufgrund der entgegengesetzten Normalenvektoren gegenseitig aufheben, so dass nur die Beiträge der äußeren Flächen übrig bleiben.



wobei wir das Volumenelement ausgedrückt haben durch $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ und infinitesimal kleine Volumina angenommen haben. Also gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint \mathbf{A} d\mathbf{S} &= \partial_x A_x(x_0, y_0, z_0) + \partial_y A_y(x_0, y_0, z_0) + \partial_z A_z(x_0, y_0, z_0) = \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_0) \\ &= \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Oberflächenintegrale über endlich große Volumina können nun analog zum Integralsatz von Stokes durch viele infinitesimal kleine Quader approximiert werden, vgl. Abb. 1.4

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{A} d\mathbf{S} = \sum_i \oiint_{\partial V_i} \mathbf{A} d\mathbf{S}_i = \sum_i \Delta V_i (\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_i)) = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d^3r, \quad (1.29)$$

was den Integralsatz von Gauss beweist. Diese Zerlegung ist wiederum möglich weil sich die gegenseitigen Beiträge der Teilquader welche aneinander grenzen gegenseitig wegheben: Die Flächen vor benachbarten Volumenelementen haben entgegengesetzte Normalenvektoren, nur die äußeren Flächen bleiben übrig.

Die Analogie im Beweis beider Integralsätze und auch Ihre Ähnlichkeit (n -dimensionale Volumenintegrale und $n - 1$ -dimensionale Integrale über geschlossene Mannigfaltigkeiten) lässt schon vermuten, dass diese Integralsätze nur Spezialfälle eines verallgemeinerten Integralsatzes von Stokes in beliebigen Dimensionen sind, hierfür wird auf Vorlesungen und Literatur zur Differentialgeometrie verwiesen.

1.3 Stromdichte

Die Ladung sämtlicher Körper ist immer ein ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung e

$$Q = ne, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.30)$$

Bewegte Ladungen führen zu einem elektrischen Strom. Die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ ist dann gegeben durch die Ladung welche pro Zeiteinheit durch eine infinitesimal kleine Flächeneinheit senkrecht zu \mathbf{j} transportiert wird, ihre SI-Einheit ist

$$[\mathbf{j}] = \frac{\text{C}}{\text{sm}^2} = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}. \quad (1.31)$$

Nimmt man z.B. eine homogene Teilchendichte von N Teilchen der Ladung q pro Volumenelement V an, welche sich alle mit Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegen, so erhält man für die Stromdichte

$$\mathbf{j} = \frac{N}{V} q \mathbf{v} = \rho \mathbf{v}, \quad (1.32)$$

wobei ρ die Ladungsdichte beschreibt.

Als Stromstärke bezeichnet man das Integral der Stromdichte über eine vorgegebene Fläche

$$I_S[\mathbf{j}] = \iint_S \mathbf{j} d\mathbf{S}, \quad (1.33)$$

sie hat folgerichtig die Einheit $[I] = \text{A}$. Ein Strom der Stärke von 1 Ampere transportiert in 1 Sekunde die Ladung von 1 Coulomb, d.h. ca. $0.6 \cdot 10^{19}$ Elektronen.

Eine einfache Anwendung des Gausschen Integralsatzes ist, dass der Fluss durch ein geschlossenes Volumen eines Rotationsfeldes immer verschwindet: Zunächst gilt ja für allgemeine Rotationsfelder nach dem Integralsatz von Gauss (1.19)

$$\oiint_{\partial V} (\nabla \times \mathbf{A}) d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) d^3r = 0, \quad (1.34)$$

wobei wir benutzt haben, dass die Divergenz einer Rotation immer verschwindet (Nachrechnen).

Eine weitere Anwendung ist die Ableitung der Kontinuitätsgleichung, allein basierend auf dem Postulat der Ladungserhaltung. Wenn \mathbf{j} die Stromdichte auf der Oberfläche eines Volumens darstellt, so entspricht ihr Oberflächenintegral gerade dem Gesamtstrom aus dem Volumen heraus

$$I_V[\mathbf{j}] = \oiint_{\partial V} \mathbf{j} d\mathbf{S}. \quad (1.35)$$

Die zeitliche Änderung der Gesamtladung im Volumen muss also gerade dem negativen Gesamtstrom aus dem Volumen heraus entsprechen

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3r + \oiint_{\partial V} \mathbf{j} d\mathbf{S} = 0. \quad (1.36)$$

Mit dem Gausschen Satz können wir das schreiben als

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} \right) d^3r = 0. \quad (1.37)$$

Da dies für beliebige Volumina V gelten muss, folgt automatisch die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (1.38)$$

1.4 Feldlinien

Feldlinien werden benutzt um das elektrische Feld zu visualisieren. Anschaulich geben Sie die Richtung an, in welche sich ein punktförmiger positiv geladener Testkörper nur aufgrund der Coulomb-Wechselwirkung am jeweiligen Ort bewegen würde. Das bedeutet, dass das elektrische Feld immer tangential an den Feldlinien anliegt, Feldlinien schneiden sich nie.

Demnach sind die Feldlinien von Punktladungen radial, sie zeigen für positiv geladene Punktladungen von dieser weg und für negativ geladene zu dieser hin, vgl. Abb. 1.5. Für mehrere Punktladungen gilt einfach das Superpositionsprinzip, hier zeigen die Feldlinien von der positiven zur negativen Ladung, siehe Abb. 1.6.

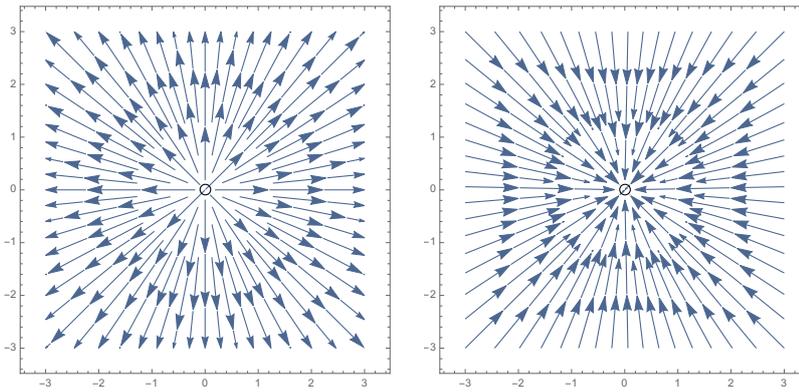


Abbildung 1.5: Zweidimensionale Feldlinien für eine positive Punktladung (links) und eine negative (rechts) jeweils am Ursprung. Positive Ladungen sind die Quellen und negative Ladungen die Senken des elektrischen Feldes. Mathematica-Kommandos:

StreamPlot,
VectorPlot.

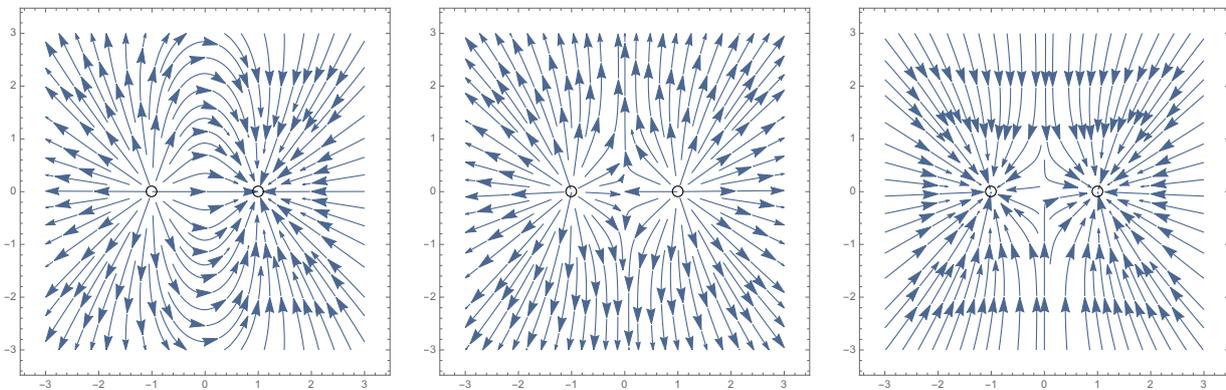


Abbildung 1.6: Zweidimensionale Feldlinien für eine positive und eine negative Punktladung (links), zwei positive (mittig) und zwei negative (rechts), jeweils bei $x = \mp 1$.

1.5 Potential

Für eine vorgegebene kontinuierliche Ladungsverteilung berechnet sich die Feldstärke über

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r'. \quad (1.39)$$

Die Coulomb-Kraft ergab sich einfach durch Multiplikation des elektrischen Feldes mit einer Konstanten, der Ladung. Analog zur Mechanik, wo die Gravitationskraft als Gradient eines Potentials geschrieben werden kann, ist diese auch für das elektrische Feld möglich (und damit für die Coulomb-Kraft). Man zeigt nämlich leicht

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (1.40)$$

was in einzelnen Komponenten bedeutet

$$\frac{1}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}. \quad (1.41)$$

Definiert man also das Potential über

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi, \quad (1.42)$$

so folgt für das **Potential einer Ladungsverteilung**

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'. \quad (1.43)$$

Das Potential ist demzufolge eine skalare Größe. Allerdings sollte man berücksichtigen, dass es nicht eindeutig bestimmt ist: Eine beliebige Konstante z.B. kann einfach hinzugefügt werden, ohne dass sich das elektrische Feld ändert (Eichtransformation).

Analog zur Diskussion in der Mechanik folgt also, dass die Coulomb-Kraft konservativ ist und also genauso aus einem Potential abgeleitet werden kann

$$\mathbf{F} = -\nabla V, \quad V(\mathbf{r}) = q\Phi(\mathbf{r}). \quad (1.44)$$

Aus der Mechanik wissen wir auch, dass Kurvenintegrale über konservative Felder wegunabhängig sein müssen, also gilt für das elektrische Feld, dass die Potentialdifferenz

$$\Phi(\mathbf{r}) - \Phi(\mathbf{r}_0) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (1.45)$$

immer die gleiche ist, unabhängig vom Weg des Integrals. Diese Potentialdifferenz wird auch als **Spannung** bezeichnet. Die Einheiten sowohl von U als auch von Φ ist das Volt.

Für mehrere Ladungen addieren sich die Potentialbeiträge einfach auf, was schon aus der Zerlegung der Ladungsdichte folgt. Aus

$$\rho(\mathbf{r}') = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \quad (1.46)$$

folgt ja einfach für das Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}. \quad (1.47)$$

1.6 Darstellung der 3d δ -Distribution

Für die **dreidimensionale Dirac-Delta Distribution** $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$ gilt folgende Darstellung

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (1.48)$$

wobei

$$\text{div grad} = \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \quad (1.49)$$

den Laplace-Operator bezeichnet. Diese Identität kann nur im Sinne einer Distribution, d.h. unter einem Integral gelten. Wir können jedoch schon verifizieren, dass diese Funktion verschwindet für $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$

$$\begin{aligned} -\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= -\nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \nabla \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') + (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} - 3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^4} = 0. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Hier haben wir benutzt, dass $\nabla r = 3$ gilt. Für $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ können wir diesen Ausdruck natürlich nicht auswerten, aber offensichtlich divergiert er irgendwie. Die Divergenz muss gerade so beschaffen sein, dass die dreidimensionale δ -Funktion für beliebige Volumina V die Gleichung

$$\int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3r = \begin{cases} 1 & : \mathbf{r}' \in V \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (1.51)$$

erfüllt. Dies kann man in der Tat verifizieren, wozu man $\bar{\mathbf{r}} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ substituiert. Dann gilt für das Integral

$$I = \int_V \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r = \int_{\bar{V}} \Delta_{\bar{\mathbf{r}}} \frac{1}{\bar{r}} d^3\bar{r}. \quad (1.52)$$

In allen Bereichen ausserhalb des Ursprungs ist aber der Integrand Null, wie wir bereits gezeigt haben, was bedeutet, dass das Integral verschwindet wenn der Ursprung nicht in \bar{V} enthalten ist bzw. \mathbf{r}' nicht in V . Wenn aber der Ursprung enthalten ist, können wir das Volumen \bar{V} einfach durch eine Kugel mit Radius R welche am Ursprung zentriert ist ersetzen. In diesem Fall berechnet sich das Integral zu

$$\begin{aligned} I &\rightarrow \int_{V_R} \nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{r} \right) d^3r = \oiint \left(-\frac{1}{R^2} \mathbf{e}_r \right) d\mathbf{S} \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta R^2 \sin(\theta) \mathbf{e}_r \cdot \left(-\frac{1}{R^2} \mathbf{e}_r \right) = -2\pi \int_{-1}^{+1} dx = -4\pi. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Hier haben wir den Gausschen Satz (1.19) benutzt und für das Flächenelement der Kugeloberfläche $d\mathbf{S} = R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \mathbf{e}_r$ mit der für Kugelsymmetrie typischen Substitution $x = \cos(\theta)$ eingesetzt. Insgesamt gilt also für das Integral

$$\int_V \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r = \begin{cases} -4\pi & : \mathbf{r}' \in V \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}. \quad (1.54)$$

Dies erfüllt also gerade die Bedingung an die dreidimensionale Darstellung der δ -Funktion.

1.7 Grundgleichungen der Elektrostatik

Wir leiten jetzt die Grundgleichungen der Elektrostatik (1.2) ab. Dazu betrachten wir den Fluss der elektrischen Feldstärke durch ein vorgegebenes Volumen V

$$\begin{aligned} \oiint_{\partial V} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} &= \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \oiint_{\partial V} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{S} \\ &= - \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \oiint_{\partial V} \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{S} = - \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \int_V \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r \\ &= - \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') (-4\pi) \int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3r = 4\pi \int_V \rho(\mathbf{r}') d^3r' = 4\pi q_V, \end{aligned} \quad (1.55)$$

wobei q_V die im Volumen V eingeschlossene Ladung ist. Hier haben wir den Gausschen Satz (1.19) und die Darstellung der δ -Funktion (1.48) benutzt. Zusammenfassend ergibt sich, dass der Fluss des elektrischen Feldes gerade 4π mal der eingeschlossenen Ladung ist, was als das Gaußsche Gesetz der Elektrostatik bekannt ist. Um eine differentielle Form des Gesetzes abzuleiten schreiben wir die Gleichung wieder mit der Ladungsdichte unter Benutzung des Gaußschen Satzes als

$$\int_V [\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) - 4\pi \rho(\mathbf{r})] d^3r = 0. \quad (1.56)$$

Da diese Gleichung für beliebige Volumina V gilt, muss der Integrand verschwinden und wir haben schon mal die erste von Gl. (1.2)

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r}). \quad (1.57)$$

In Worten bedeutet dies, dass positive Ladungen die Quellen und negative Ladungen die Senken des elektrischen Feldes sind, vgl. auch Abb. 1.5 und Abb. 1.6.

Die zweite Grundgleichung der Elektrostatik sagt aus, dass das elektrische Feld wirbelfrei ist. Eigentlich können wir das sofort schlussfolgern aus der Tatsache, dass wir in der Elektrostatik das elektrische Feld als Gradienten eines Potentials darstellen können. Damit gilt für geschlossene Kurven unter Zuhilfenahme des Integralsatzes von Stokes (1.15)

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{r} = \iint (\nabla \times \mathbf{E}) d\mathbf{S} = 0, \quad (1.58)$$

d.h. die Zirkulation des elektrischen Feldes entlang einer geschlossenen Kurve verschwindet. Die **Grundgleichungen der Elektrostatik** lassen sich somit in integraler

$$\iint_{\partial V} \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi q_V, \quad \oint \mathbf{E} d\mathbf{r} = 0 \quad (1.59)$$

oder in differentieller Form

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.60)$$

darstellen. Die jeweils erste Gleichung heißt auch **Gaußsches Gesetz**.

Wir hatten bereits gezeigt, dass wir das elektrische Feld als Gradienten eines Potentials darstellen können $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, so dass damit die zweite Gleichung automatisch erfüllt wird. Setzt man dies in die erste Gleichung ein, erhält man mit $\operatorname{div} \operatorname{grad} = \Delta$ die **Poisson-Gleichung**

$$\nabla \cdot (\nabla\Phi) = \Delta\Phi = -4\pi\rho. \quad (1.61)$$

Diese lineare, inhomogene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung ist eine fundamentale Gleichung der Elektrostatik.

Falls keine weiteren Randbedingungen vorliegen und die Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ bekannt ist, ist ihre Lösung einfach gegeben durch

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.62)$$

Das ist genau das Potential welches wir aus der Summe von Punktladungen abgeleitet hatten, vgl. Gl. (1.43). Wir können dies aber nochmal mittels der Darstellung (1.48) der δ -Funktion überprüfen

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -4\pi\rho(\mathbf{r}). \quad (1.63)$$

Eine Herausforderung ergibt sich wenn Randbedingungen für das Potential vorliegen. Zum Beispiel kann die Ladungsverteilung in einem endlichen Volumen V vorgegeben sein und die Werte für das Potential Φ oder dessen Ableitungen sind auf dem Rand ∂V des Volumens bekannt. Oft betrachtet man auch das zugehörige homogene Problem, die **Laplace-Gleichung**

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.64)$$

Wie aus der Mathematik bekannt, kann man die allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung als Summe einer speziellen Lösung der Poisson-Gleichung und der allgemeinen Lösung der Laplace-Gleichung darstellen.

1.8 Elektrostatische Feldenergie

Das elektrische Feld enthält Energie. Um sie zu bestimmen, gehen wir von folgender Überlegung aus: Wenn wir eine Ladung im leeren Raum platzieren kostet uns dies keine Energie, bzw. wir können die Konvention treffen, dass wir diese Energie auf Null eichen. Das Hinzufügen einer weiteren Ladung in der Nähe der ersten hingegen kostet Arbeit, da die Coulomb-Abstoßung überwunden werden muss (bei entgegengesetzten Ladungen wird diese Energie eben negativ). Wir können diese Arbeit über das Potential ausrechnen und damit die Arbeit, die zum Aufbauen einer Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ benötigt wird. Diese Ladungsdichte wiederum hängt mit dem elektrischen Feld zusammen, so dass man über diese Überlegung letztlich zur Energie des elektrischen Feldes kommt.

Die Coulomb-Kraft auf eine Testladung q am Ort \mathbf{r} war gegeben durch

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (1.65)$$

wobei \mathbf{E} die elektrische Feldstärke an diesem Ort war. Aus der Mechanik wissen wir, dass die Arbeit um eine Punktladung vom Punkt \mathbf{r}_A nach \mathbf{r}_B zu verschieben gerade durch

$$\begin{aligned} W_{AB} &= - \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -q \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \\ &= +q \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} (\nabla\Phi) \cdot d\mathbf{r} = q[\Phi(\mathbf{r}_B) - \Phi(\mathbf{r}_A)] = qU_{AB}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Hier bezeichnet U_{AB} die Spannung zwischen den beiden Punkten. Die Vorzeichenkonvention in der ersten Gleichung resultiert daraus dass positive Arbeit verrichtet werden muss, wenn Verschiebung und Kraft entgegengesetzt sind, d.h. $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} < 0$ gilt. Weiterhin haben wir benutzt, dass wegen

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi \quad (1.67)$$

auch

$$-\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = (\partial_x\Phi)dx + (\partial_y\Phi)dy + (\partial_z\Phi)dz = d\Phi \quad (1.68)$$

gelten muss.

Die Wechselwirkungsenergie einer auf einen endlichen Raumbereich beschränkten Ladungskonfiguration $\rho(\mathbf{r})$ entspricht der Arbeit, welche benötigt wird um Ladungen aus dem Unendlichen mit der (willkürlichen) Eichung $\Phi(\infty) = 0$ zu dieser Konfiguration zusammenzuziehen. Wir können das rekursiv berechnen, indem wir annehmen dass wir schon $i - 1$ Punktladungen an ihre Endposition verschoben haben und nun die i -te Punktladung hinzufügen wollen. Am Orte der i -ten Punktladung \mathbf{r}_i erzeugen die vorherigen Punktladungen das Potential

$$\Phi(\mathbf{r}_i) = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (1.69)$$

Das heißt, dass die Arbeit um die i -te Ladung vom Unendlichen nach \mathbf{r}_i zu verschieben gerade durch

$$W_i = q_i[\Phi(\mathbf{r}_i) - \Phi(\infty)] = q_i\Phi(\mathbf{r}_i), \quad (1.70)$$

d.h. das Potential am Ende des Weges gegeben. Wir können jetzt die einzelnen Beiträge aufsummieren. Hier kostet nur die erste Ladung nichts, da am Anfang der Raum noch feldfrei (und somit potentialfrei ist). Für N Ladungen wird die Gesamt-Arbeit gerade

$$W = \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \sum_{i>j} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (1.71)$$

Im Kontinuumslimit ignorieren wir erstmal die einschränkende Bedingung in der Summe und ersetzen wieder die Ladungen durch Ladungsdichten und gehen zum Integral über

$$W = \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}). \quad (1.72)$$

Jetzt eliminieren wir noch die Ladungsdichte mit Hilfe der Poisson-Gleichung (1.61)

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{8\pi} \int d^3r (\Delta\Phi)\Phi = -\frac{1}{8\pi} \int d^3r [\nabla \cdot (\nabla\Phi)]\Phi \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int d^3r \nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi) + \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\nabla\Phi)^2 \\ &= -\frac{1}{8\pi} \oint (\Phi\nabla\Phi) \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\nabla\Phi)^2. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Hier kann man mit der Produktregel überprüfen dass die zweite Zeile mit der ersten identisch ist und in der dritten Zeile haben wir den Gaußschen Integralsatz angewandt. Wenn wir die Fläche ins Unendliche legen, können wir das Flächenintegral leicht abschätzen

$$\Phi \propto \frac{1}{r}, \quad \Phi\nabla\Phi \propto \frac{1}{r^3}, \quad d\mathbf{S} \propto r^2, \quad (1.74)$$

so dass insgesamt betrachtet der erste Term verschwindet $-\frac{1}{8\pi} \oint (\Phi\nabla\Phi) \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 0$. Es verbleibt damit für die Energie des elektrischen Feldes

$$W = \frac{1}{8\pi} \int |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 d^3r = \int \omega(\mathbf{r}) d^3r. \quad (1.75)$$

Dies definiert auch die **Energiedichte des elektrischen Feldes**

$$\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2. \quad (1.76)$$

Die Energiedichte ist endlich für endliche elektrische Felder.

Allerdings haben wir beim Übergang zum Kontinuum die Fallunterscheidung $i \neq j$ vernachlässigt. Das führt bei der Berechnung der Gesamtenergie im elektrischen Feld einer Punktladung zu Problemen: Nehmen wir z.B. eine Punktladung am Ursprung mit dem elektrischen Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{e}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad (1.77)$$

mit der Elektronenladung e . Die Energiedichte ergibt sich zu

$$\omega(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{8\pi r^4}, \quad (1.78)$$

was am Orte der Punktladung selbst divergiert. Die Divergenz ist so stark dass auch die Gesamtenergie des elektrischen Feldes einer Punktladung divergiert

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta r^2 \sin(\theta) \frac{e^2}{r^4} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^2}{r^2} dr = -\frac{e^2}{2r} \Big|_0^\infty \rightarrow +\infty. \quad (1.79)$$

Formal ist also die Gesamtenergie, die allein im Feld einer Punktladung enthalten ist, im Rahmen der klassischen Elektrodynamik unendlich. Erst im Rahmen der Quantenelektrodynamik kann auf diese Frage eine formal befriedigende Antwort gegeben werden, hier ist die Selbstenergie endlich.

Man könnte alternativ argumentieren und behaupten, dass es z.B. gar keine Punktladungen gibt und nur im Fernfeld das Bild einer Punktladung korrekt ist. Dann hätten also Elektronen einen endlichen Radius und wir dürften somit bei der Energie des elektrischen Feldes nur bis zum Elektronenradius integrieren. Wenn man annimmt dass die (relativistische) Ruhe-Energie des Elektrons seiner Feldenergie entspricht, so könnte man diesen Radius r^* abschätzen über die Gesamtenergie des Elektrons aus der Relativitätstheorie

$$\frac{e^2}{2r^*} \geq m_e c^2 \quad (1.80)$$

mit Elektronenmasse m_e und Lichtgeschwindigkeit c . Wir können dies nach r^* umstellen, was auf die Definition des **klassischen Elektronenradius** führt (der Faktor $1/2$ wird willkürlich weggelassen)

$$r_e = \frac{e^2}{m_e c^2}. \quad (1.81)$$

Einsetzen der Elektronenladung (in Gauss-Einheiten) $e \approx -4.803 \cdot 10^{-10} \frac{\sqrt{\text{g cm}^3}}{\text{s}}$ (elektrostatische Einheit esu) und der Masse $m_e \approx 9.11 \cdot 10^{-31} \text{kg}$ mit Lichtgeschwindigkeit $c \approx 3 \cdot 10^9 \text{m/s}$ liefert einen klassischen Elektronenradius in der Größenordnung Femtometer ($r_e \approx 2.8 \cdot 10^{-15} \text{m}$). Aus Präzisionsexperimenten ist jedoch bekannt dass der Radius des Elektrons zumindest kleiner als 10^{-3}fm ist, so dass diese Theorie widerlegt ist. Experimente haben keine Hinweise auf eine innere Struktur des Elektrons geliefert, das Modell einer Punktladung ist nach unserem Wissen korrekt.

1.9 Radialsymmetrische Ladungsverteilungen

Wir diskutieren einige bekannte Ladungsverteilungen, welche z.B. zur Beschreibung von Atomkernen genutzt werden können. In diesem Fall entspricht die Gesamtladung $q = Z|e|$ mit der Zahl der Protonen Z .

- Die Ladungsdichte einer Punktladung am Ursprung ist

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r}). \quad (1.82)$$

Davon ausgehend erhalten wir für das Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r}, \quad (1.83)$$

und für die elektrische Feldstärke

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{r^3} \mathbf{r} = \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (1.84)$$

- Für eine Kugelschale mit Radius R setzen wir die Ladungsverteilung

$$\rho(r) = \frac{q}{4\pi R^2} \delta(r - R) \quad (1.85)$$

an. Der Vorfaktor entspricht gerade der Fläche einer Kugel mit Radius R . Das Potential kann über die uns bekannte Formel berechnet werden

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' = \frac{q}{4\pi R^2} \int_0^\infty dr' \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{\delta(r' - R)(r')^2 \sin(\theta')}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos(\theta')}} \\ &= \frac{q}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rRx}}, \end{aligned} \quad (1.86)$$

wobei wir die Substitution $x = \cos(\theta')$ benutzt haben. Das Integral kann mittels Fallunterscheidung gelöst werden und wir erhalten

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{R}\Theta(R-r) + \frac{q}{r}\Theta(r-R), \quad (1.87)$$

es ist also konstant innerhalb der Kugel und entspricht dem Potential einer Punktladung außerhalb. Unter Zuhilfenahme der Grundgleichungen der Elektrostatik in integraler Form hätten wir dies viel einfacher zeigen können. Wir hatten

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi q_V, \quad (1.88)$$

wobei q_V die im Volumen V eingeschlossene Ladung war. Für radialsymmetrische Ladungsverteilungen muss das elektrische Feld auch radialsymmetrisch sein, wir betrachten also als Volumen V Kugeln mit Radius r . Wenn $r < R$ gilt, enthält das Volumen keine Ladung ($q_V = 0$), und das elektrische Feld muss im Inneren der Kugel also verschwinden $\mathbf{E}(r < R) = \mathbf{0}$. Für $r > R$ ist das elektrische Feld gerade durch die Ladung q auf der Kugelschale gegeben und wir erhalten insgesamt

$$\mathbf{E}(r) = \Theta(r-R) \frac{4\pi q}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r = \Theta(r-R) \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (1.89)$$

Daraus können wir das gleiche Potential ableiten wie (1.87), ohne ein einziges Integral berechnen zu müssen.

- Die Ladungsdichte einer homogen geladenen Kugel mit Radius R und Gesamtladung q ist gegeben durch

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{q}{\frac{4\pi}{3}R^3} \Theta(R-r). \quad (1.90)$$

Feldstärke und Potential können wie oben gezeigt berechnet werden.

- Die exponentielle Verteilung passt relativ gut für kleine Atomkerne

$$\rho(r) = \frac{q}{8\pi\lambda^3} e^{-r/\lambda}. \quad (1.91)$$

Hier beschreibt der Parameter $\lambda > 0$ gerade die Ausdehnung des Atomkerns. Auch für einige Elektronen-Verteilungen passt diese ziemlich gut. Zum Beispiel hat man für die Verteilung von Elektronen im Wasserstoff-Atom gerade mit $\lambda = a_0/2$

$$\rho(r) = \frac{-e}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}, \quad (1.92)$$

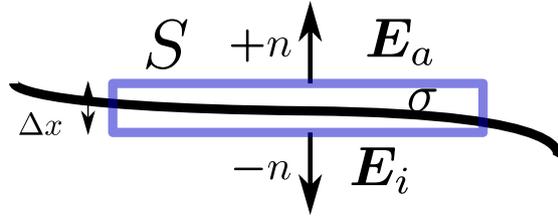
wobei $a_0 \approx 0.53 \cdot 10^{-10} \text{m}$ der Bohrsche Radius ist. Dies bekommt man aus dem Betragsquadrat der Grundzustandswellenfunktion des Wasserstoffatoms (vgl. VL Quantenmechanik).

Allgemein kann man verschiedene Verteilungen (wenn sie positiv definit $\rho(r) \geq 0$ sind) auch durch Momente charakterisieren, z.B.

$$\langle r^k \rangle = \frac{\int d^3r r^k \rho(r)}{\int d^3r \rho(r)}. \quad (1.93)$$

Diese haben dann auch eine geometrische Interpretation.

Abbildung 1.7: Skizze einer 2d Grenzfläche (dick) mit eingezeichneter betrachteter geschlossener 3d Oberfläche (blau), Flächenladungsdichte σ und Normalenvektor \mathbf{n} . Wir betrachten den Grenzfall eines extrem flachen Kästchens $\Delta x \rightarrow 0$.



1.10 Grenzflächen

An Grenzflächen mit einer Ladungsdichte kann sich das elektrische Feld unstetig verhalten. Wir definieren zunächst die Flächenladungsdichte σ als die Ladung pro Fläche, d.h. Ihre Einheit ist im SI-System gegeben durch

$$[\sigma] = \frac{\text{C}}{\text{m}^2}. \quad (1.94)$$

Demzufolge ergibt sich für die Ladung auf der Fläche S

$$q = \iint_S \sigma(\mathbf{r}) dS, \quad (1.95)$$

wobei jetzt dS einfach nur das Flächenintegral (ohne Normalenvektor) beinhaltet. Um die Feldstärke an Grenzflächen zu berechnen, legen wir ein flaches Kästchen über die Grenzfläche, vgl. Abb. 1.7. Auf der einen Seite des Kästchens liegt das elektrische Feld \mathbf{E}_a an, auf der anderen Seite das elektrische Feld \mathbf{E}_i . Wir benutzen die Konvention, dass \mathbf{E}_a auf der Seite mit Normalenvektor $+\mathbf{n}$ anliegt. Wenn Δx so klein ist, dass wir den Fluss des elektrischen Feldes durch die Stirnseiten des Kästchens vernachlässigen können, und weiterhin die Änderung der Flächenladungsdichte im Kästchen vernachlässigbar ist, ergibt sich aus dem Gaußschen Gesetz

$$\oiint \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi\sigma S = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_a - \mathbf{E}_i) S. \quad (1.96)$$

Die erste Gleichung resultiert aus der eingeschlossenen Ladung im Gaußschen Kästchen, die zweite folgt aus der Auswertung des Oberflächenintegrals. Also folgt, dass die Normalenkomponente des elektrischen Feldes an Grenzflächen einen Sprung hat

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_a - \mathbf{E}_i) = 4\pi\sigma, \quad (1.97)$$

welcher proportional zur Flächenladungsdichte ist. Das hätten wir auch schon an unserem Beispiel der Kugelschale sehen können: Hier beträgt die Flächenladungsdichte gerade

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}, \quad (1.98)$$

und das elektrische Feld macht bei $r = R$ tatsächlich einen Sprung von Null auf q/R^2 , vgl. Gl. (1.89).

Das Verhalten der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes können wir mit dem Integralsatz von Stokes untersuchen. Anstelle eines flachen Kästchens verwenden wir jetzt daher eine geschlossene Kontour, welche als flaches Rechteck die Oberfläche zweimal durchdringt, vgl. Abb. 1.8. Wenn wir wieder den Beitrag der Kontur an den Stirnseiten vernachlässigen können und unsere Kontur außerdem klein genug ist, dass wir im Konturintegral ein konstantes elektrisches Feld an den Längsseiten der Kontur annehmen können, erhält man aus $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ und dem Satz von Stokes

$$0 = \iint_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \approx (\mathbf{E}_a - \mathbf{E}_i) \cdot \Delta \mathbf{r}. \quad (1.99)$$

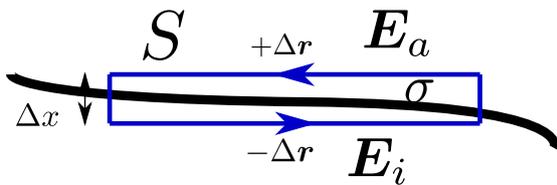


Abbildung 1.8: Skizze einer 2d Grenzfläche (dick) mit eingezeichneter betrachteter geschlossener 2d Kontur (blau), Flächenladungsdichte σ und Tangentialvektor $\Delta \mathbf{r}$ der Kontur. Wir betrachten den Grenzfall einer extrem flachen Schlaufe $\Delta x \rightarrow 0$.

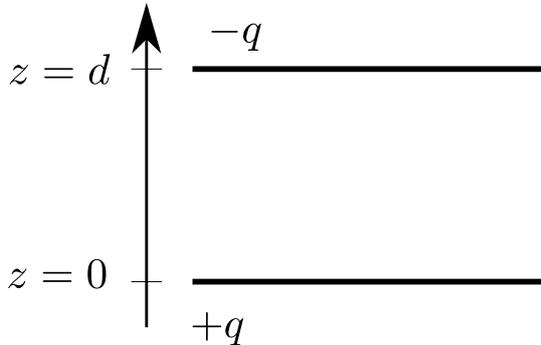


Abbildung 1.9: Skizze eines Plattenkondensators mit Abstand d und Fläche S .

Die Komponenten des elektrischen Feldes in Richtung von $\Delta \mathbf{r}$ müssen also stetig sein. Wir können jetzt unsere Kontur um die Achse des Grenzflächen-Normalenvektors beliebig drehen und erhalten damit, dass die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes an Grenzflächen stetig sind

$$\mathbf{E}_{a,t} = \mathbf{E}_{i,t}. \quad (1.100)$$

Das ist mit unseren Resultaten für die Hohlkugel konsistent.

1.11 Der Plattenkondensator

Ein Plattenkondensator besteht aus zwei parallelen Platten mit Abstand d und Fläche S , vgl. Abb. 1.9 Die beiden Platten tragen homogen verteilt die entgegengesetzt gleich großen Ladungen $\pm q$. Die Flächenladungsdichte beträgt dann

$$\sigma = \pm \frac{q}{S}. \quad (1.101)$$

Zur Vereinfachung des Problems vernachlässigen wir die Streufelder am Kondensatorrand, d.h. wir nehmen den Grenzfall einer sehr großen Kondensatorfläche an. Wir nehmen ferner an, daß außerhalb des Kondensators das Feld $\mathbf{E}_a = 0$ verschwindet, auch dies ist eine Näherung welche natürlich nur für sehr große Abstände gelten kann (die Gesamtladung auf dem Kondensator ist Null). Die zwischen den Platten herrschende Feldstärke können wir berechnen, indem wir für eine Platte das Gaußsche Gesetz anwenden, bzw. das daraus resultierende Verhalten des Feldes an Grenzflächen. An der Grenzfläche macht das elektrische Feld einen Sprung von $4\pi\sigma$, d.h. das Feld \mathbf{E}_i im Inneren des Plattenkondensators ist gegeben durch

$$(\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_a)\mathbf{n} = \mathbf{E}_i\mathbf{n} = E = 4\pi\sigma = 4\pi\frac{q}{S}. \quad (1.102)$$

Die Potentialdifferenz können wir jetzt einfach durch Integrieren ausrechnen

$$\Phi_2 - \Phi_1 = - \int_0^d E(z) dz = -Ed = -\frac{4\pi qd}{S} = -U, \quad (1.103)$$

sie entspricht der Spannung U zwischen den Platten. Eine wichtige Kenngröße eines Kondensators ist seine **Kapazität**

$$C \equiv \frac{q}{U}. \quad (1.104)$$

Sie zeigt an, wie viele Ladungen bei vorgegebener Spannung auf den Kondensator passen. Speziell für den Plattenkondensator erhalten wir

$$C = \frac{S}{4\pi d}, \quad (1.105)$$

d.h. die Kapazität hängt nur von geometrischen Materialgrößen ab. Wir können auch sehr leicht die Energiedichte des Feldes im Kondensator berechnen

$$\omega = \frac{1}{8\pi} |\mathbf{E}|^2 = \frac{(4\pi\sigma)^2}{8\pi} = 2\pi\sigma^2. \quad (1.106)$$

Da in unserer Näherung des Feld homogen war, erhalten wir daraus auch die Gesamtenergie des Kondensators

$$W = \omega Sd = 2\pi\sigma^2 Sd = 2\pi q^2 \frac{d}{S} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} qU = \frac{1}{2} CU^2. \quad (1.107)$$

1.12 Randwertprobleme

Wir hatten schon diskutiert, dass die Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi = -4\pi\rho \quad (1.108)$$

ein Grundproblem der Elektrostatik ist. Falls die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ bekannt ist und keine speziellen Randbedingungen auf Grenzflächen im Endlichen zu erfüllen sind, reicht das Poisson-Integral als allgemeine Lösung aus

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.109)$$

Insbesondere folgt aus dieser Formel auch, dass das Potential und seine Ableitungen im Unendlichen verschwinden

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \infty} \Phi \rightarrow 0, \quad \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \infty} \nabla\Phi \rightarrow \mathbf{0}. \quad (1.110)$$

In praktischen Problemen ist jedoch die Problemstellung eine andere. Oft ist eine endliche Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}')$ in einem bestimmten Raumbereich vorgegeben sowie auch schon der Wert des Potentials oder seiner Ableitungen auf gewissen Grenz- oder Randflächen. Gesucht ist dann das skalare Potential in allen Punkten des Raumbereiches V .

Um solche allgemeinen Randwertprobleme lösen zu können, benötigen wir die Greenschen Theoreme, welche wir unter Verwendung des Gaußschen Satzes ableiten können. Seien $\phi(\mathbf{r})$ und $\psi(\mathbf{r})$ zwei in einem Volumen V mit geschlossener Oberfläche ∂V stetig differenzierbare skalare Felder. Wir betrachten das spezielle Vektorfeld

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r})\nabla\psi(\mathbf{r}). \quad (1.111)$$

Nach der Produktregel gilt dann für die Divergenz

$$\nabla\mathbf{A} = \nabla[\phi(\mathbf{r})\nabla\psi(\mathbf{r})] = \phi(\mathbf{r})\Delta\psi(\mathbf{r}) + (\nabla\phi(\mathbf{r}))(\nabla\psi(\mathbf{r})). \quad (1.112)$$

Wenn wir auf so ein Vektorfeld den Gaußschen Integralsatz anwenden, erhalten wir

$$\int_V \nabla \mathbf{A} d^3r = \oint_{\partial V} \mathbf{A} d\mathbf{S} = \oint_{\partial V} [\phi(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{n} dS, \quad (1.113)$$

wobei \mathbf{n} der Normalenvektor der Fläche ist. Man definiert die **Normalenableitung** der Funktion ψ auf ∂V über

$$[\nabla \psi(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{n} \equiv \frac{\partial \psi}{\partial n}, \quad (1.114)$$

und kann mit ihrer Hilfe dann das 1. der **Greenschen Theoreme** ableiten

$$\int_V [\phi \Delta \psi + (\nabla \phi)(\nabla \psi)] d^3r = \oint_{\partial V} \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS. \quad (1.115)$$

Vertauscht man in dieser Ableitung die Felder

$$\int_V (\psi \Delta \phi + (\nabla \psi)(\nabla \phi)) d^3r = \oint_{\partial V} \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS, \quad (1.116)$$

und zieht dann diese Gleichung vom 1. Greenschen Theorem ab, erhält man das 2. Greensche Theorem

$$\int_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) d^3r = \oint_{\partial V} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS. \quad (1.117)$$

Eine weitere nützliche Identität lässt sich für den Spezialfall $\phi = 1$ ableiten

$$\int_V \Delta \psi d^3r = \oint_{\partial V} \frac{\partial \psi}{\partial n} dS. \quad (1.118)$$

Wir wollen zunächst untersuchen, unter welchen Bedingungen ein elektrostatisches Randwertproblem eine eindeutige mathematische Lösung besitzt. Dazu verwenden wir die Greenschen Theoreme und die Poisson-Gleichung mit

$$\phi(\mathbf{r}') \rightarrow \Phi(\mathbf{r}'), \quad \psi(\mathbf{r}') \rightarrow \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (1.119)$$

d.h. wir integrieren jeweils über d^3r' bzw. dS' und betrachten \mathbf{r} als Parameter. Das 2. Greensche Theorem (1.117) impliziert dann

$$\begin{aligned} \int_V \left[\Phi(\mathbf{r}') \Delta_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Delta_{\mathbf{r}'} \Phi(\mathbf{r}') \right] d^3r' &= -4\pi \int_V \Phi(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3r' + 4\pi \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \\ &= \oint_{\partial V} \left[\Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right] dS'. \end{aligned} \quad (1.120)$$

Hier haben wir in der ersten Zeile einfach nur die 3d Darstellung der δ -Funktion (1.48) sowie die Poisson-Gleichung (1.61) benutzt. Wenn nun $\mathbf{r} \in V$ gilt, erhält man aus der Gleichung oben eine Bestimmungsgleichung für das Potential am Orte \mathbf{r}

$$\Phi(\mathbf{r} \in V) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \Phi}{\partial n'} - \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dS' \quad (1.121)$$

Diese Formel ergibt also das Potential, wenn innerhalb des Volumens V die Ladungsverteilung vorgegeben und auf seinen Rändern der Wert des Potentials und seiner Normalen-Ableitungen

bekannt ist. Man nennt Randbedingungen welche nur den Wert des Potentials Φ am Rand vorgeben auch **Dirichlet-Randbedingungen** und Randbedingungen welche die Normalenableitungen des Potentials am Rand vorgeben **von-Neumann-Randbedingungen**. Letzere entsprechen gerade der Normalen-Komponente des elektrischen Feldes, denn $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}' = -\frac{\partial \Phi}{\partial n'}$. Jedoch sind auch gemischte Randbedingungen möglich, z.B. durch stückweise Vorgabe des Potentials an gewissen Rändern und Vorgabe der Normalenableitung an anderen Rändern. Bei gleichzeitiger Vorgabe vom Wert des Potentials sowie seiner Ableitungen – dies nennt man **Cauchy-Randbedingungen** – ist das Problem zunächst überbestimmt. Sie dürfen nicht unabhängig voneinander gewählt werden sondern müssen selbstkonsistent bestimmt werden.

Wenn der Rand ∂V des Volumens im Unendlichen liegt und wir der Konvention $\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r) = 0$ folgen, können wir den Oberflächenterm vernachlässigen und die Formel für das Potential fällt auf das Poisson-Integral (1.62) zurück. Im entgegengesetzten Fall, wenn in V keine Ladungen vorhanden sind, ist das Potential im Volumen durch Vorgabe der Randbedingungen eindeutig bestimmt

$$\Phi(\mathbf{r} \in V, \rho(\mathbf{r}') = 0) \rightarrow +\frac{1}{4\pi} \iint_{\partial V} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \Phi}{\partial n'} - \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dS'. \quad (1.122)$$

Hierbei reicht es jedoch aus, entweder Dirichlet- oder von-Neumann Randbedingungen zu wählen um die Lösung der Poisson-Gleichung eindeutig (evtl. bis auf eine Konstante) zu bestimmen.

Diese Eindeutigkeit – bei Vorgabe von Dirichlet oder von-Neumann Randbedingungen (oder gemischten) – wollen wir kurz überprüfen. Seien $\phi_i(\mathbf{r})$ Lösungen der Poisson-Gleichung

$$\Delta \phi_{1/2}(\mathbf{r}) = -4\pi \rho(\mathbf{r}), \quad (1.123)$$

und es gelte weiterhin auf dem Rand des Volumens dass entweder die Potentiale selbst

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \phi_2(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial V \quad (1.124)$$

oder aber ihre Normalenableitungen identisch seien

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial n}(\mathbf{r}) = \frac{\partial \phi_2}{\partial n}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial V. \quad (1.125)$$

Dies entspricht Dirichlet- bzw. von-Neumann Randbedingungen auf ∂V . Für die Differenz beider Potentiale

$$\Psi(\mathbf{r}) = \phi_1(\mathbf{r}) - \phi_2(\mathbf{r}) \quad (1.126)$$

muss aber wegen der gleichen Ladungsverteilung die Laplace-Gleichung gelten

$$\Delta \Psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.127)$$

Weiterhin müssen auf den Rändern der Wert von Ψ oder aber der seiner Normalen-Ableitung verschwinden, d.h. je nach Vorgabe von Dirichlet Randbedingungen

$$\Psi(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \partial V. \quad (1.128)$$

oder von-Neumann Randbedingungen

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \partial V. \quad (1.129)$$

Aus dem 1. Greenschen Theorem (1.115) erhalten wir jetzt für $\phi = \psi = \Psi$ die Identität

$$\int_V (\Psi \Delta \Psi + (\nabla \Psi)(\nabla \Psi)) d^3r = \iint_{\partial V} \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial n} dS. \quad (1.130)$$

Die rechte Seite dieser Identität verschwindet immer, bei Dirichlet ($\Psi = 0$) oder von-Neumann ($\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$) Randbedingungen. Der erste Term der linken Seite verschwindet auch, da eben $\Delta \Psi = 0$ gilt. Also folgt

$$\int_V (\nabla \Psi)^2 d^3r = 0, \quad (1.131)$$

und da der Integrand offensichtlich nicht negativ werden kann

$$\nabla \Psi = 0, \quad (1.132)$$

was bedeutet dass $\Psi = C$ konstant sein muss. Sind nun Dirichlet Randbedingungen vorgegeben, folgt direkt aus $\Psi(\partial V) = 0$ dass $\Psi(\mathbf{r}) = 0$ ist und damit beide Lösungen gleich sein müssen. Wenn von-Neumann Randbedingungen vorliegen, gilt

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \phi_2(\mathbf{r}) + C, \quad (1.133)$$

wobei die Konstante C für die elektrische Feldstärke unerheblich ist, sie kann beliebig gewählt werden und würde z.B. bei gemischten Randbedingungen fixiert. Bei Vorgabe von Dirichlet- oder von-Neumann Randbedingungen sind also die physikalischen Größen aus der Poisson-Gleichung eindeutig bestimmbar.

Physikalisch betrachtet können Dirichlet Randbedingungen durch **Leiter** implementiert werden. **Nichtleiter** oder **Isolatoren** sind (für genügend kleine Feldstärken) unbeeindruckt von elektrischen Feldern: Ihre Ladungsträger sind so stark gebunden dass Sie sich bei Anwesenheit eines Feldes nur ein wenig verschieben (Polarisation), aber ansonsten fixiert bleiben. Im Gegensatz dazu bewegen sich die Ladungen in Leitern schon bei sehr kleinen externen elektrischen Feldern, was natürlich ein Gegenfeld induziert. Dieser Prozess läuft so lange ab, bis das interne Feld gerade das externe elektrische Feld komplett kompensiert: Erst dann verschwindet die Netto-Coulombkraft und es findet keine weitere Verschiebung der Ladungsträger statt. Dies bedeutet also für das stationäre Feld in Leitern

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.134)$$

und damit, dass das Potential im Leiter konstant ist

$$\Phi(\mathbf{r}) = \text{const.} \quad (1.135)$$

Damit ist eine Leiter-Oberfläche auch immer eine Äquipotentialfläche. Innerhalb des Leiters müssen sowohl Tangential als auch Normalenkomponente des elektrischen Feldes verschwinden

$$\mathbf{E}_{i,t} = \mathbf{0} = \mathbf{E}_{i,n}. \quad (1.136)$$

Für das äußere elektrische Feld an Leiteroberflächen können wir aus Abschn. 1.10 folgern dass die Tangentialkomponente verschwindet

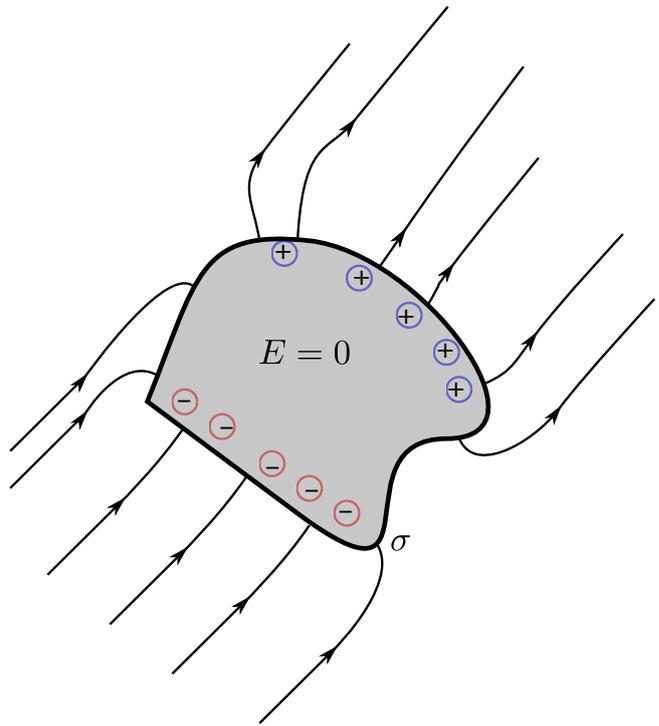
$$\mathbf{E}_{a,t} = \mathbf{0} \quad (1.137)$$

und die Normalenkomponente einen Sprung macht, welcher proportional zur Flächenladungsdichte ist

$$|\mathbf{E}_{a,n}| = 4\pi\sigma. \quad (1.138)$$

Ein angelegtes äußeres Feld erzeugt also auf Leitern eine Flächenladungsdichte σ , welche auch als **Influenzladung** bezeichnet wird, vgl. Abb. 1.10.

Abbildung 1.10: Skizze eines Leiters im externen elektrischen Feld. Die Ladungen in Leitern verschieben sich so lange bis das externe Feld im Inneren des Leiters genau kompensiert ist, d.h. bis das interne Feld verschwindet. Dies induziert eine Influenzladung auf der Oberfläche, so dass das externe Feld immer senkrecht in den Leiter eindringt und das Potential auf der Leiteroberfläche konstant ist.



1.13 Die Greensche Funktion der Poisson-Gleichung

Die Theorie der Greenschen Funktionen wird allgemein benutzt um inhomogene lineare partielle Differenzialgleichungen der Form

$$\mathcal{D}_z \rho(z) = \phi(z) \quad (1.139)$$

zu lösen. Hier ist \mathcal{D}_z ein linearer Differenzialoperator (z.B. Δ) welcher Funktionen von z und Ableitungen nach den Variablen z enthalten kann, aber ansonsten linear auf $\rho(z)$ wirkt. Die Funktion $\rho(z)$ ist die gesuchte Lösung der Differenzialgleichung und die rechte Seite $\phi(z)$ die Inhomogenität. Zu solchen Differenzialoperatoren können wir eine **Greensche Funktion** $G(z, s)$ assoziieren (vgl. VL Mathematische Methoden) über die Gleichung

$$\mathcal{D}_z G(z, s) = \delta(z - s), \quad (1.140)$$

wobei $\delta(z - s)$ der n -dimensionalen Dirac-Delta-Funktion entspricht. Wenn man die Greensche Funktion hat, wird das inhomogene Problem $\mathcal{D}_z \rho(z) = \phi(z)$ durch

$$\rho(z) = \int G(z, s) \phi(s) ds \quad (1.141)$$

gelöst. Dies zu zeigen ist fast trivial

$$\mathcal{D}_z \rho(z) = \mathcal{D}_z \int G(z, s) \phi(s) ds = \int [\mathcal{D}_z G(z, s)] \phi(s) ds = \int \delta(z - s) \phi(s) ds = \phi(z). \quad (1.142)$$

Wir kennen bereits die Greensche Funktion für den Laplace-Differenzialoperator, definiert durch

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.143)$$

Die Funktion

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.144)$$

ist aber nur eine mögliche Lösung für die Greensche Funktion, nämlich die konsistent mit Randbedingungen verschwindenden Potentials im Unendlichen. Wir können beliebige Funktionen hinzuaddieren, welche die Laplace-Gleichung erfüllen

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad : \quad \Delta f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0. \quad (1.145)$$

Speziell kann man die Funktion $f(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ so wählen, dass die Dirichlet- oder von-Neumann Randbedingungen auf weiteren Rändern erfüllt sind.

Wir setzen im 2. Greenschen Theorem (1.117) $\phi(\mathbf{r}') = \Phi(\mathbf{r}')$ und $\psi(\mathbf{r}') = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$

$$\begin{aligned} \int_V d^3r' [\Phi(\mathbf{r}')\Delta_{\mathbf{r}'}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\Delta_{\mathbf{r}'}\Phi(\mathbf{r}')] &= -4\pi \int_V d^3r'\Phi(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &\quad + 4\pi \int_V d^3r'G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}') \\ &= \iint_{\partial V} \left[\Phi(\mathbf{r}')\frac{\partial G}{\partial n'} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right] dS'. \end{aligned} \quad (1.146)$$

Hier haben wir in der 1. Zeile benutzt dass gelten soll

$$\Delta_{\mathbf{r}'}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \Delta_{\mathbf{r}}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.147)$$

und der 2. Term implementiert einfach die Poisson-Gleichung. Für $\mathbf{r} \in V$ können wir wieder nach dem Potential umstellen und erhalten

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}')G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')d^3r' - \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial V} \left[\Phi(\mathbf{r}')\frac{\partial G}{\partial n'} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right] dS'. \quad (1.148)$$

Der Unterschied zu Gleichung (1.121) ist jetzt, dass wir – abhängig von den Randbedingungen – die Greensche Funktion so wählen können, dass nur einer der beiden Terme im Oberflächenintegral beiträgt, wie im Folgenden ausgeführt.

Dirichlet Randbedingungen

Falls Dirichlet Randbedingungen vorliegen, kann man die Greensche Funktion so wählen, dass der 2. Term im Oberflächenintegral verschwindet

$$\iint_{\partial V} G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\frac{\partial \Phi}{\partial n'}dS' \stackrel{!}{=} 0. \quad (1.149)$$

Dies erreicht man, indem man spezielle Dirichlet-Randbedingungen auch an die Greensche Funktion stellt

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad \forall \quad \mathbf{r}' \in \partial V. \quad (1.150)$$

Wir erhalten in diesem Fall das Potential über die übrigen Terme

$$\Phi(\mathbf{r} \in V) = \int_V \rho(\mathbf{r}')G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')d^3r' - \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial V} \Phi(\mathbf{r}')\frac{\partial G_D}{\partial n'}dS'. \quad (1.151)$$

Wenn man also die Greensche Funktion für Dirichlet Randbedingungen $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ kennt hat man damit eine geschlossene Lösungsformel, welche nur von der Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}')$ im Volumen und vom Wert des Potentials $\Phi(\mathbf{r}')$ auf seinen Rändern abhängt.

von-Neumann Randbedingungen

Für von-Neumann Randbedingungen ist die Normalenableitung des Potentials, d.h. die Normalenkomponente des elektrischen Feldes auf den Rändern vorgegeben

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}. \quad (1.152)$$

Entsprechend wählen wir die Greensche Funktion so, dass jetzt der 1. Term des Oberflächenintegrals einfach eine Konstante ergibt

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G_N}{\partial n'} dS' = -\Phi_0. \quad (1.153)$$

Das skalare Potential würde in diesem Fall über

$$\Phi(\mathbf{r} \in V) = \Phi_0 + \int_V \rho(\mathbf{r}') G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 r' + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Phi}{\partial n'} dS' \quad (1.154)$$

berechnet und hängt nur von der Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}')$ im Volumen und von der Normalenableitung des Potentials $\frac{\partial \Phi}{\partial n'}$ auf seinen Rändern ab.

Diese Formeln sind natürlich nur hilfreich wenn man die Greensche Funktion kennt. Der Vorteil der Methode liegt aber darin, dass dieselbe Greensche Funktion dann auch für andere gegebene Ladungsverteilungen sowie andere Randbedingungen vom selben Typ gültig ist. Wir werden im Folgenden eine Methode behandeln, welche die Konstruktion der Greenschen Funktion für Dirichlet-Randbedingungen anhand physikalischer Intuition ermöglicht.

1.14 Die Methode der Bildladungen

Bildladungen ermöglichen es, die Greensche Funktion intuitiv zu finden. Heuristisch kann man diese so verstehen: Wir betrachten zunächst das Potential für eine vorgegebene Ladungsverteilung in Abwesenheit von Randbedingungen, gegeben durch das Poisson-Integral (1.62). Wir können das Potential im gesamten Raum ausrechnen, und es ergeben sich Äquipotentialflächen auf denen das Potential konstant ist. Wenn man eine dieser Äquipotentialflächen einfach zu Oberflächen von Leitern erklärt ist damit automatisch ein spezielles Randwertproblem gelöst, nämlich die Lösung der Poisson-Gleichung des Raumbereiches vor der Leiteroberfläche unter der Dirichlet-Randbedingung des Potentialwertes auf der Fläche und verschwindenden Potential im Unendlichen, vgl. Abb. 1.11. Leider kann man somit nicht allgemeine Randwertprobleme lösen, da sich die Form der Äquipotentialflächen erst im Nachhinein ergibt. Jedoch ergibt sich für einige Probleme (hoher Symmetrie) aus einfachen Lösungen der Elektrostatik eben eine ganze Reihe von weiteren Lösungen für Randwertprobleme.

Wir behandeln dies am Beispiel einer beliebigen Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$, welche im Bereich $z > 0$ lokalisiert ist. Bei $z = 0$ befinde sich eine ideal-leitende Platte und wir möchten das Potential im Volumen

$$V = \{(x, y, z)^T : z > 0\} \quad (1.155)$$

unter Dirichlet-Randbedingungen

$$\Phi(x, y, 0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \Phi(x, y, z) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \Phi(x, y, z) = \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \Phi(x, y, z) = 0 \quad (1.156)$$

untersuchen, vgl. Abb. 1.12. Wir können die Greensche Funktion unter diesen Dirichlet-Randbedingungen

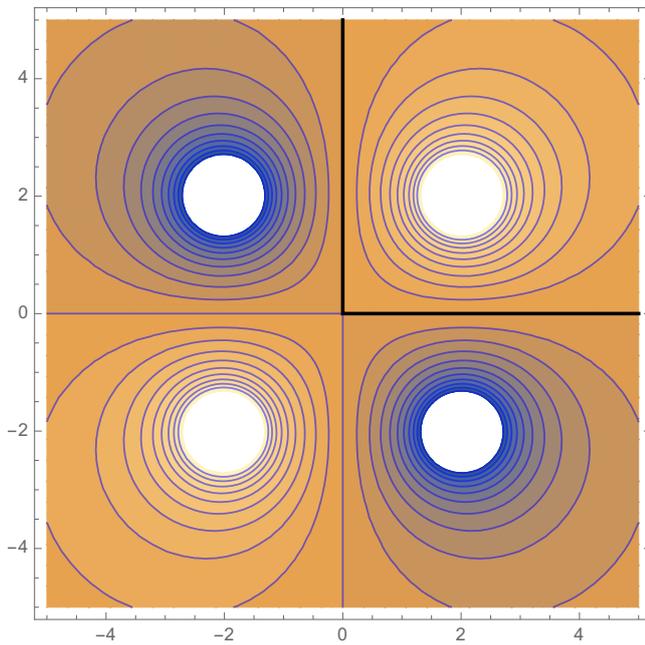


Abbildung 1.11: Konturplot des Potentials von 4 regelmäßig angeordneten Punktladungen (2 mit Ladung $+q$ und 2 mit Ladung $-q$). Die Äquipotentialflächen (blau, schwarz) mit $\Phi = 0$ sind einfach Ebenen. Definiert man die Dirichlet-Randbedingungen auf den Äquipotentialflächen (schwarz), so ist damit das Randwertproblem einer Punktladung vor zwei idealleitenden Ebenen im Raumbereich $x > 0$ und $y > 0$ gelöst (oben rechts). In dieser Sichtweise existieren die 3 übrigen Punktladungen nicht wirklich sondern dienen nur dazu das Randwertproblem zu lösen. Mathematica-Kommando: `ContourPlot`

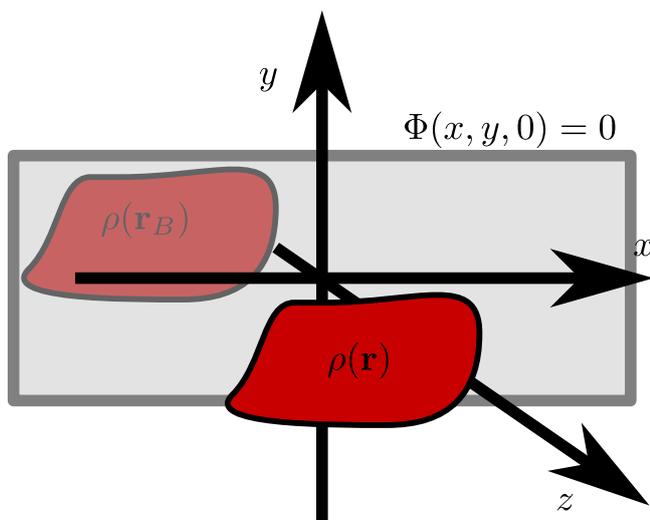


Abbildung 1.12: Skizze des betrachteten Randwertproblems. Gesucht ist die Green'sche Funktion welche auf der Platte bei $z = 0$ und im Unendlichen verschwindet.

schreiben als

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + f(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (1.157)$$

wobei die unbekannte Funktion folgende Bedingungen erfüllen muss

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= 0 \quad \forall \quad \mathbf{r} \in V, \\ \oint_{\partial V} G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Phi}{\partial n'} dS' &= 0. \end{aligned} \quad (1.158)$$

Die zweite Bedingung erfüllen wir durch

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad \forall \quad \mathbf{r}' \in \partial V. \quad (1.159)$$

Also muss speziell auf der Halbebene bei $z' = 0$ gelten

$$\lim_{z' \rightarrow 0} f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{-1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}}, \quad (1.160)$$

was durch

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{-1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_B|} = \frac{-1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \quad (1.161)$$

offensichtlich erfüllt wird. Also muss die Bildladung gerade am Ort

$$\mathbf{r}'_B = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ -z' \end{pmatrix} \quad (1.162)$$

liegen. Ohne Rechnung sehen wir auch, dass

$$\Delta f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_B) = 0 \quad \forall \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in V, \quad (1.163)$$

denn die Bildladung liegt ja außerhalb des betrachteten Volumens. Also erhalten wir für die Greensche Funktion der Poisson-Gleichung mit Dirichlet-Randbedingungen für $z = 0$

$$\begin{aligned} G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_B|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}}. \end{aligned} \quad (1.164)$$

Per Konstruktion verschwindet die Greensche Funktion auf der Fläche $z' = 0$ und auch im Unendlichen, denn die Potentiale der realen Ladungsverteilung und der Bildladung fallen hinreichend schnell ab. Das Potential für die Randbedingung $\Phi(\partial V) = 0$ kann nun für $\mathbf{r} \in V$ aus der Formel

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_B|} \right) \quad (1.165)$$

erhalten werden, vgl. Gleichung (1.151). Für beliebige (im Halbraum $z' > 0$ lokalisierte) Ladungsverteilungen erfüllt es die Randbedingung $\Phi(x, y, 0) = 0$, so dass damit eine ganze Klasse von Randwertproblemen gelöst ist. Der Vorteil des Arbeitens mit der Greenschen Funktion ist jedoch, dass jetzt nicht nur allgemeine Ladungsverteilungen, sondern auch allgemeine Dirichlet-Randbedingungen – z.B. solche mit variierendem vorgegebenen Potential $\Phi(x, y, 0)$ –

nach Gleichung (1.151) gelöst werden können. Dann muss eben einfach nur der Oberflächenterm mit berücksichtigt werden, wofür wir die Normalenableitung der Greenschen Funktion auf der Fläche $z' = 0$ benötigen

$$\left. \frac{\partial G}{\partial z'} \right|_{z'=0} = - \left. \frac{\partial}{\partial z'} G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right|_{z'=0} = \frac{-2z}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (1.166)$$

Das Vorzeichen rührt hier von der Konvention her, dass der Normalenvektor nach außen zeigen soll, d.h. für unser betrachtetes Volumen mit $z > 0$ in negative z -Richtung. Nach Gleichung (1.151) können wir jetzt das Potential für $z > 0$ für beliebige bei $z = 0$ vorgegebene und im Unendlichen verschwindende Werte berechnen über

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \int_V \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 r' - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G_D}{\partial n'} dS' \\ &= \int_V \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 r' + \frac{2z}{4\pi} \iint dx' dy' \frac{\Phi(x', y', 0)}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (1.167)$$

Der Kernpunkt der Methode ist, dass die Bildladung außerhalb von V für die gegebenen Randbedingungen auf ∂V sorgt. Die Position dieser fiktiven Ladungsverteilung, der sogenannten **Bildladung**, hängt dabei von der Position der realen Ladung ab. Wir ersetzen somit Randbedingungen quasi durch Bildladungen.

Wir wollen anhand von Beispielen das Arbeiten mit Bildladungen noch etwas illustrieren.

1.14.1 Beispiel: Punktladung vor Ebene

Das sicher einfachste Beispiel ist eine Punktladung q am Orte $\mathbf{r}' = (0, 0, z')^T$ mit $z' > 0$ vor einer unendlich ausgedehnten Leiterplatte auf welcher das Potential verschwinden soll, also eigentlich eine vereinfachte Variante des bereits besprochenen Problems. Um die Bildladung praktisch zu finden, machen wir den Ansatz

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{q_B}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_B|}, \quad (1.168)$$

wobei q_B die Ladung und \mathbf{r}_B der Ort der Bildladung sein sollen. Um die Randbedingung auf der Platte erfüllen zu können, muss

$$0 = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z')^2}} + \frac{q_B}{\sqrt{(x-x_B)^2 + (y-y_B)^2 + (z_B)^2}} \quad \forall \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (1.169)$$

gelten. Die einzige Lösung für dieses Problem, bei der die Bildladung außerhalb des Volumens liegt, ist also

$$x_B = 0, \quad y_B = 0, \quad z_B = -z', \quad q_B = -q. \quad (1.170)$$

Zusammenfassend haben wir also

$$\Phi(\mathbf{r}) = q \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+z')^2}} \right] \quad \mathbf{r} \in V, \quad (1.171)$$

was die geforderte Randbedingung $\Phi(x, y, 0) = 0$ erfüllt. Die elektrische Feldstärke erhalten wir auch daraus

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = q \left[\frac{1}{[x^2 + y^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-z' \end{pmatrix} - \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z+z')^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z+z' \end{pmatrix} \right]. \quad (1.172)$$

Insbesondere können wir überprüfen, dass das elektrische Feld bei $z = 0$ senkrecht auf der Leiteroberfläche steht

$$\mathbf{E}(x, y, 0) = \frac{q}{[x^2 + y^2 + (z')^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2z' \end{pmatrix}. \quad (1.173)$$

Da im Inneren des Leiters das elektrische Feld verschwindet, können wir über die Normalenkomponente des elektrischen Feldes auch die Flächenladungsdichte der Influenzladung berechnen

$$\sigma(x, y) = \frac{1}{4\pi} \mathbf{e}_z \mathbf{E}(x, y, 0) = -\frac{q}{2\pi} \frac{z'}{[x^2 + y^2 + (z')^2]^{3/2}}. \quad (1.174)$$

Die gesamte Influenzladung erhält man aus dieser durch Integration über die Ebene, wobei Zylinderkoordinaten zweckmäßig sind

$$\begin{aligned} \bar{q} &= \int dx \int dy \sigma(x, y) = -\frac{q}{2\pi} \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \rho \frac{z'}{[\rho^2 + (z')^2]^{3/2}} \\ &= -qz' \int_0^\infty d\rho \frac{\rho}{[\rho^2 + (z')^2]^{3/2}} = -qz' \int_0^\infty d\rho \left(-\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z')^2}} \right) = -qz' \left(-0 + \frac{1}{z'} \right) = -q. \end{aligned} \quad (1.175)$$

Die Influenzladung entspricht somit gerade der Bildladung, was wir auch aus dem Gaußschen Gesetz hätten folgern können.

1.14.2 Beispiel: Punktladung vor Kugel

Ein zweites Beispiel ist das Feld einer Punktladung q am Orte \mathbf{r}' über einer geerdeten Metallkugel am Ursprung mit Radius R . Das zu betrachtende Volumen ist also

$$V = \{\mathbf{r} \quad : \quad r = |\mathbf{r}| \geq R\}, \quad (1.176)$$

und die Terminologie "geerdet" bedeutet, dass die Oberfläche der Metallkugel bei Potential Null festgehalten werden soll, es liegen also Dirichlet Randbedingungen vor

$$\Phi(|\mathbf{r}| = R) = 0, \quad \Phi(|\mathbf{r}| \rightarrow \infty) = 0. \quad (1.177)$$

Die Bildladung darf nicht im betrachteten Volumen liegen, d.h. sie muss sich innerhalb der Metallkugel befinden. Aus Symmetriegründen erwarten wir jedoch, dass die Bildladung auf der Achse Ursprung-Punktladung liegt, vgl. Abb. 1.13. Der Ansatz für unser Potential lautet also wieder

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{q_B}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_B|} = \frac{\frac{q}{r}}{|\mathbf{e}_r - \frac{r'}{r} \mathbf{e}_{r'}|} + \frac{\frac{q_B}{r'_B}}{\left| \frac{r}{r'_B} \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_{r'} \right|}. \quad (1.178)$$

Mit dem Winkel α zwischen \mathbf{r} und \mathbf{r}' gilt $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_{r'} = \cos(\alpha)$. Wir können die Randbedingung $\Phi(r = R) = 0$ schreiben als

$$0 = \frac{\frac{q}{R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{R}\right)^2 - 2\frac{r'}{R} \cos(\alpha)}} + \frac{\frac{q_B}{r'_B}}{\sqrt{\left(\frac{R}{r'_B}\right)^2 + 1 - 2\frac{R}{r'_B} \cos(\alpha)}}. \quad (1.179)$$

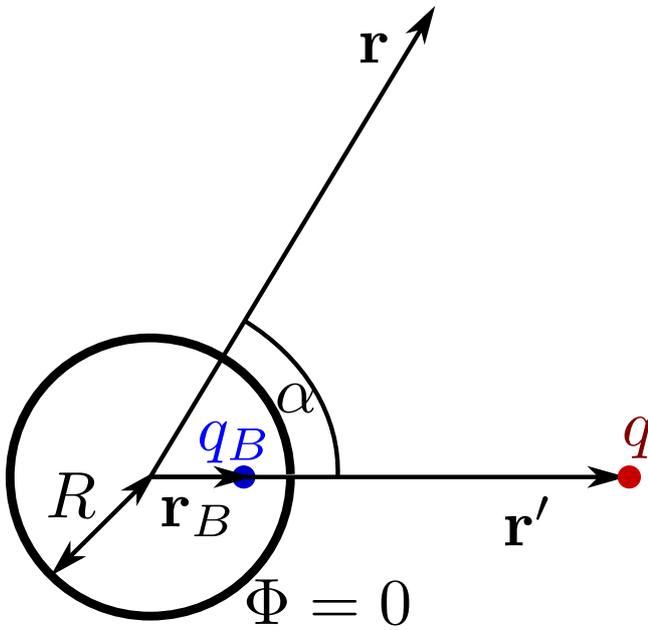


Abbildung 1.13: Skizze einer Punktladung q vor einer geerdeten Metallkugel. Die Bildladung liegt innerhalb der Metallkugel auf der Verbindungsachse des Kugelzentrums und der Punktladung. Ort und Ladung müssen so gewählt werden, dass das Potential auf der Kugeloberfläche verschwindet.

Diese Bedingung muss für alle α erfüllt sein, was wir durch

$$\frac{q}{R} = -\frac{q_B}{r'_B}, \quad \text{und} \quad \frac{r'}{R} = \frac{R}{r'_B} \quad (1.180)$$

oder eben explizit durch

$$q_B = -\frac{R}{r'}q, \quad r'_B = \frac{R}{r'}R \quad (1.181)$$

erreichen können. Die Bildladung liegt also wegen $r' > R$ immer innerhalb der Kugel und ihre Ladung hat ein anderes Vorzeichen als q und ist betragsmäßig kleiner. Das gesamte Potential für eine Punktladung wird

$$\Phi(\mathbf{r}) = q \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\frac{R}{r'}}{\left| \mathbf{r} - \frac{R^2}{(r')^2} \mathbf{r}' \right|} \right). \quad (1.182)$$

Schaut man sich die Konturflächen des gesamten Potentials an, wird deutlich, dass nur die Kontur mit $\Phi = 0$ eine kugelförmige Gestalt hat, vgl. Abb. 1.14. Wir können wieder die Influenzladungsdichte über den Wert des elektrischen Feldes an der Kugeloberfläche berechnen

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{1}{4\pi} \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi|_{r=R} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=R} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{q}{R^2} \frac{R}{r'} \frac{1 - \left(\frac{R}{r'}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{R}{r'}\right)^2 - 2\left(\frac{R}{r'}\right) \cos(\alpha)\right]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (1.183)$$

Wie zu erwarten, ist diese rotationssymmetrisch um $\mathbf{e}_{r'}$ und maximal für $\alpha = 0$. Wie auch aus dem Satz von Gauß zu erwarten, ist das Integral über die Flächenladungsdichte, d.h. die gesamte induzierte Influenzladung gerade gleich der Bildladung

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\alpha R^2 \sin(\alpha) \sigma = -q \frac{R}{r'}. \quad (1.184)$$

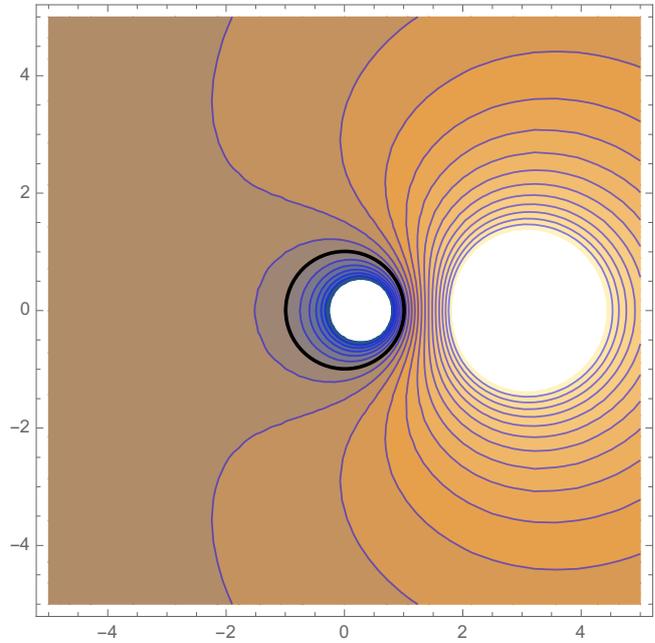


Abbildung 1.14: Konturplot des Potentials von zwei Punktladungen. Wenn die Bildladung innerhalb der Kugel richtig dimensioniert und positioniert ist, hat die Konturfläche mit $\Phi = 0$ (dick, schwarz) Kugelgestalt. Parameter $r' = 3R$, $r'_B = R/3$, $q_B = -q/3$.

Aus dem Potential für eine Punktladung können wir aber auch gleich die Greensche Funktion ableiten

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{\left| \frac{r'}{R}\mathbf{r} - \frac{R}{r'}\mathbf{r}' \right|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr'\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_{r'}}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{r^2(r')^2}{R^2} + R^2 - 2rr'\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_{r'}}}. \quad (1.185)$$

An der letzten Zeile sieht man leicht die Symmetrien

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}), \quad G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad \forall \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \partial V. \quad (1.186)$$

Damit können wir also mit Hilfe dieser Greenschen Funktion das Randwertproblem der Poisson-Gleichung mit einer Kugel für beliebige, auf der Kugeloberfläche vorgegebene Potentiale nach Gleichung (1.151) berechnen. Hierfür benötigen wir allerdings noch die Normalen-Ableitung der Greenschen Funktion. Da unser betrachtetes Volumen außerhalb der Kugel liegt, zeigen die Normalenvektoren (welche per Konvention zur Außenseite des Volumens zeigen) in das Innere der Kugel, und es folgt

$$\left. \frac{\partial G_D}{\partial n'} \right|_{\partial V} = - \left. \frac{\partial G_D}{\partial r'} \right|_{r'=R} = - \frac{1}{R} \frac{r^2 - R^2}{(r^2 + R^2 - 2rR\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_{r'})^{3/2}}. \quad (1.187)$$

Damit erhalten wir die vollständige Lösung nach (1.151) über

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3r' - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G_D}{\partial n'} dS'$$

$$= \int_V \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3r' + \frac{R(r^2 - R^2)}{4\pi} \int_0^\pi \sin(\theta') d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{\Phi(R, \theta', \phi')}{(r^2 + R^2 - 2rR\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_{r'})^{3/2}}, \quad (1.188)$$

wobei wir in der letzten Zeile das Flächenelement $R^2 \sin(\theta') d\theta' d\phi'$ benutzt haben. Je nach vorgegebenem Potential auf der Kugeloberfläche kann die Auswertung recht komplex werden, und nur für die Vorgabe von einem verschwindendem Potential auf der Kugeloberfläche und einer Punktladung außerhalb der Kugel ergibt sich die Lösung (1.182).

Kapitel 2

Multipolentwicklungen

In diesem Kapitel werden wir weitere Methoden zur Lösung des elektrostatischen Randwertproblems untersuchen. Wir werden uns hierfür zunächst auf die Laplace-Gleichung beschränken, welche ja z.B. auch zum Finden der Greenschen Funktion der Poisson-Gleichung gelöst werden muss.

2.1 Vollständige Funktionensysteme

Analog wie wir z.B. den Ortsvektor durch normierte und orthogonale Basisvektoren darstellen können $\mathbf{r} = \sum_i r_i \mathbf{e}_i$ oder in der Quantenmechanik den Zustand durch orthogonale Basiszustände $|\Psi\rangle = \sum_i c_i |\Phi_i\rangle$ können wir auch Funktionen auf einem vorgegebenen Intervall durch Basisfunktionen $\tilde{g}_n(x)$ annähern

$$f(x) = \sum_n a_n \tilde{g}_n(x). \quad (2.1)$$

Man nennt dieses Basis-System ein **orthogonales Funktionensystem**, wenn es auf dem Intervall $I = [a, b]$ die Bedingung

$$\int_a^b \tilde{g}_n^*(x) \tilde{g}_m(x) dx = N_n \delta_{nm} \quad (2.2)$$

erfüllt. Man kann dann die Basisfunktionen normieren mittels

$$g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{N_n}} \tilde{g}_n(x). \quad (2.3)$$

Bei den neu definierten Basisfunktionen handelt es sich dann um ein **orthonormales Funktionensystem**

$$\int_a^b g_n^*(x) g_m(x) dx = \delta_{nm}. \quad (2.4)$$

Ausgehend von diesen Definitionen kann man auch die **Norm einer Funktion** definieren

$$\|f(x)\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx. \quad (2.5)$$

Hat man ein orthogonales Funktionensystem, kann man daraus immer durch Normierung ein orthonormales konstruieren. In diesem orthonormalen System $\{g_n(x)\}$ kann man jede Funktion entwickeln

$$f(x) = \sum_n a_n g_n(x). \quad (2.6)$$

Wenn die Orthonormalitätsrelation (2.4) gilt, können wir die Koeffizienten a_n bestimmen über

$$a_n = \int_a^b g_n^*(x) f(x) dx. \quad (2.7)$$

Ein orthonormales Funktionensystem heißt dann vollständig, falls jede quadratintegrale Funktion sich in dieser Basis entwickeln lässt. Setzt man die Entwicklungskoeffizienten a_n in die Entwicklung der Funktion wieder ein, erhält man

$$f(x) = \sum_n \int_a^b g_n^*(y) f(y) g_n(x) dy. \quad (2.8)$$

Dies kann für allgemeine Funktionen nur funktionieren, wenn die **Vollständigkeitsrelation**

$$\sum_n g_n^*(y) g_n(x) = \delta(x - y) \quad \forall \quad x, y \in [a, b] \quad (2.9)$$

gilt.

2.1.1 Fourier-Reihen

Typische Beispiele für vollständige Funktionensysteme sind Fourier-Reihen. Nimmt man die Basis-Funktionen

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) & : & \quad n = \{1, 2, \dots\}, \\ h_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) & : & \quad n = \{1, 2, \dots\}, \\ h_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

so bilden diese gemeinsam auf dem Intervall $[-\pi, +\pi]$ ein vollständiges Funktionensystem. Die Funktionen $g_n(x)$ können benutzt werden um sämtliche ungeraden Funktionen darzustellen, die Funktionen $h_n(x)$ approximieren alle geraden Funktionen. Wir können also alle quadratintegrablen Funktionen auf dem Intervall $[-\pi, +\pi]$ darstellen als

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n g_n(x), \quad (2.11)$$

wobei wir die Fourier-Koeffizienten berechnen können durch

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx, \\ a_{n \geq 1} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(nx) f(x) dx, \\ b_{n \geq 1} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(nx) f(x) dx. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Alternativ dazu nimmt man auch häufig die Zerlegung

$$k_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \quad : \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.13)$$

Hier können wir auch jede Funktion entwickeln im Intervall $[-\pi, +\pi]$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n k_n(x). \quad (2.14)$$

Die Entwicklungskoeffizienten berechnen sich in diesem Fall zu

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-inx} f(x) dx. \quad (2.15)$$

Allgemein lässt sich das auf periodische Funktionen erweitern. Diese lassen sich sämtlich durch Fourier-Reihen darstellen. Ist deren Periode nicht durch 2π gegeben, kann man eine einfache Variablen-Transformation durchführen, welche die Periode der Funktion auf das Intervall $[-\pi, +\pi]$ abbildet.

2.1.2 Legendre-Polynome

In der Elektrostatik ist das vollständige Funktionensystem der Legendre-Polynome relevant. Wir betrachten hierzu die Funktion welche im Poisson-Integral auftritt

$$\Psi = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.16)$$

Bezeichnet man mit α den Winkel zwischen \mathbf{r} und \mathbf{r}' , können wir dies schreiben als

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos(\alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{r_{<}^2 + r_{>}^2 - 2r_{<}r_{>} \cos(\alpha)}}. \quad (2.17)$$

Hier haben wir definiert

$$r_{<} = \min(r, r'), \quad r_{>} = \max(r, r'). \quad (2.18)$$

Der Zweck dieser Definitionen ist, dass man damit einen dimensionslosen Parameter

$$\frac{r_{<}}{r_{>}} \leq 1 \quad (2.19)$$

hat, nach welchem man die Wurzel entwickeln kann

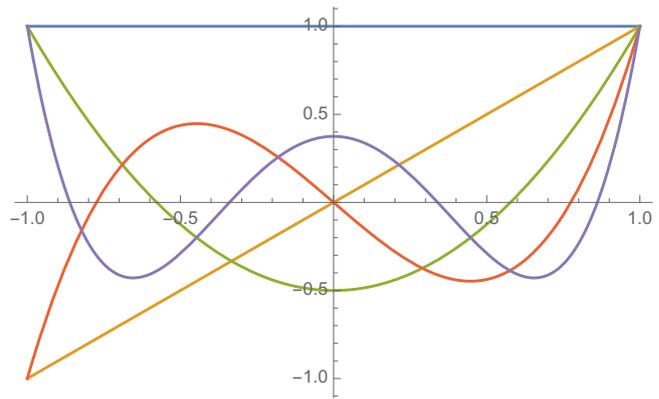
$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{r_{>}} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r_{<}}{r_{>}} \cos \alpha + \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{r_{>}} \left[1 + \cos \alpha \frac{r_{<}}{r_{>}} + \frac{1}{2} (3 \cos^2 \alpha - 1) \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{r_{>}} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \alpha) \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^n. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Die hier auftretenden Koeffizienten sind die **Legendre-Polynome** $P_n(\cos \alpha)$. Mit der für radialsymmetrische Probleme typischen Substitution $x = \cos \alpha$, so dass $-1 \leq x \leq +1$ gilt, lauten die ersten Legendre-Polynome

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2} (3x^2 - 1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2} (5x^3 - 3x). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Abbildung 2.1: Plot der ersten 5 Legendre-Polynome $P_0(x)$ (blau), $P_1(x)$ (orange), $P_2(x)$ (grün), $P_3(x)$ (rot) und $P_4(x)$ (violett).
Mathematica-Kommandos:

Plot,
LegendreP.



Man sieht bereits, dass die Legendre-Polynome mit ungeradem Index auch ungerade Funktionen von x sind und umgekehrt, vgl. Abb. 2.1. Allgemein kann man die Legendre-Polynome nach der **Rodriguez-Formel** berechnen

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (2.22)$$

Die Funktion

$$g(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \quad (2.23)$$

wird dann auch als generierende Funktion der Legendre-Polynome bezeichnet, da wir diese aus der Taylor-Entwicklung der Funktion erhalten. Wir können Sie benutzen um eine praktische Rekursionsformel für die Legendre-Polynome zu bekommen

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial t} = \frac{x - t}{(1 - 2xt + t^2)^{3/2}} = \sum_n n P_n(x) t^{n-1}. \quad (2.24)$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit $(1 - 2xt + t^2)$, wird gerade die generierende Funktion reproduziert

$$(1 - 2xt + t^2) \sum_n n P_n(x) t^{n-1} = \frac{x - t}{(1 - 2xt + t^2)^{1/2}} = (x - t) \sum_n P_n(x) t^n. \quad (2.25)$$

Wir sortieren diese Gleichung nach Potenzen von t

$$\sum_{m=0}^{\infty} m P_m(x) t^{m-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2nx P_n(x) t^n + \sum_{s=0}^{\infty} s P_s(x) t^{s+1} + \sum_{s=0}^{\infty} P_s(x) t^{s+1} - \sum_{n=0}^{\infty} x P_n(x) t^n = 0. \quad (2.26)$$

Da diese Gleichung für alle t und $x \in [-1, +1]$ gelten muss, müssen die Vorfaktoren jeder Potenz von t separat die Gleichung erfüllen. Um diese Potenzen zu sortieren setzen wir einfach $m = n + 1$ und $s = n - 1$, was auf die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= (n + 1) P_{n+1}(x) - 2nx P_n(x) + (n - 1) P_{n-1}(x) + P_{n-1}(x) - x P_n(x) \\ &= (n + 1) P_{n+1}(x) - (2n + 1)x P_n(x) + n P_{n-1}(x) \end{aligned} \quad (2.27)$$

führt. Diese Gleichung kann allerdings nur ab $n = 1, 2, \dots$ gelten, da wir ja die Rand-Terme in der Summe nicht explizit behandelt haben. Wir können diese Formel nach $P_{n+1}(x)$ auflösen und erhalten damit eine numerisch stabile **Rekursionsformel für die Legendre-Polynome**

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n + 1}{n + 1} x P_n(x) - \frac{n}{n + 1} P_{n-1}(x) = 2x P_n(x) - P_{n-1}(x) - \frac{x P_n(x) - P_{n-1}(x)}{n + 1}. \quad (2.28)$$

Diese Rekursionsformel generiert alle Legendre Polynome aus den zwei einfachsten $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$.

Die Legendre-Polynome lassen sich also als Taylor-Koeffizienten der generierenden Funktion verstehen. Durch Ableiten der generierenden Funktion nach x

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial x} = \frac{t}{(1 - 2xt + t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^n \quad (2.29)$$

lassen sich auch andere Beziehungen zwischen den Legendre-Polynomen finden, z.B. (Nachrechnen)

$$P'_{n+1}(x) + P'_{n-1}(x) = P_n(x) + 2xP'_n(x). \quad (2.30)$$

Ableiten der Rekursionsformel (2.28) liefert eine weitere Beziehung (Nachrechnen)

$$\frac{d}{dx}[(2n+1)xP_n(x)] = (n+1)P'_{n+1}(x) + nP'_{n-1}(x). \quad (2.31)$$

Ziel ist jetzt, diese Relationen mit den Eigenschaften der Legendre-Polynomen so zu kombinieren, dass $P_{n\pm 1}(x)$ eliminiert werden kann, so dass man eine Differentialgleichung für die $P_n(x)$ erhält. Wir können aus (2.30) und (2.31) die Relationen

$$P'_{n+1}(x) = (n+1)P_n(x) + xP'_n(x), \quad P'_{n-1}(x) = -nP_n(x) + xP'_n(x) \quad (2.32)$$

erhalten (Nachrechnen). Aus diesen beiden Formeln können wir die Relation

$$(1 - x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x) \quad (2.33)$$

erhalten (Nachrechnen). Differenzieren dieser Gleichung nach x und Ausnutzen von (2.32) liefert dann (Nachrechnen), dass die Legendre-Polynome die sogenannte **Legendre-Differentialgleichung** erfüllen müssen

$$(1 - x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (2.34)$$

Mit Hilfe der Rodriguez-Formel (2.22) oder eben einfach anhand der ersten Legendre-Polynome (2.21) können wir verifizieren dass die Legendre-Polynome die DGL lösen.

Zuletzt wollen wir noch zeigen dass die Legendre-Polynome orthogonal auf dem Intervall $[-1, +1]$ sind. Dazu schreiben wir die Legendre-DGL als

$$\frac{d}{dx}[(1 - x^2)P'_n(x)] = -n(n+1)P_n(x). \quad (2.35)$$

Wenn wir diese Gleichung von links mit $P_m^*(x) = P_m(x)$ multiplizieren und dann von $x = -1$ bis $x = +1$ integrieren erhalten wir

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) \frac{d}{dx}[(1 - x^2)P'_n(x)] dx = - \int_{-1}^{+1} n(n+1)P_m(x)P_n(x) dx. \quad (2.36)$$

Zusätzlich können wir diesen Ausdruck antisymmetrisieren, d.h. n und m vertauschen und die resultierende Gleichung von der obigen abziehen

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} \left[P_m(x) \frac{d}{dx}[(1 - x^2)P'_n(x)] - P_n(x) \frac{d}{dx}[(1 - x^2)P'_m(x)] \right] dx \\ &= [m(m+1) - n(n+1)] \int_{-1}^{+1} P_m(x)P_n(x) dx. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Wenn wie die linke Seite dieser Gleichung partiell integrieren, verschwindet jeweils der Randterm durch den Faktor $(1 - x^2)$ aufgrund der Grenzen $x = \pm 1$ und die anderen Terme heben sich gegenseitig auf, weil sie identisch sind. Es verbleibt also

$$[m(m+1) - n(n+1)] \int_{-1}^{+1} P_m(x)P_n(x)dx = 0. \quad (2.38)$$

Für $n \neq m$ folgt daraus schon mal die Orthogonalität

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x)P_n(x)dx \stackrel{n \neq m}{=} 0. \quad (2.39)$$

Um für $n = m$ den richtigen Normierungsfaktor zu erhalten, integrieren wir über das Quadrat der generierenden Funktion

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1 - 2tx + t^2} = \sum_{n,m=0}^{\infty} t^{n+m} \int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int_{-1}^{+1} |P_n(x)|^2 dx. \quad (2.40)$$

Um das Integral auf der linken Seite zu berechnen, hilft die Substitution $y = 1 - 2tx + t^2$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1 - 2tx + t^2} = \frac{1}{2t} \int_{(1-t)^2}^{(1+t)^2} \frac{dy}{y} = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1}, \quad (2.41)$$

wobei wir im letzten Schritt einfach in eine Potenzreihe um $t = 0$ entwickelt haben. Jetzt können wir einen Koeffizientenvergleich durchführen und erhalten daraus

$$\int_{-1}^{+1} |P_n(x)|^2 dx = \frac{2}{2n+1}, \quad (2.42)$$

was die allgemeine Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m} \quad (2.43)$$

beweist.

Um jetzt eine Funktion $f(x)$ mittels der Legendre-Polynome darzustellen

$$f(x) = \sum_n a_n P_n(x) \quad (2.44)$$

können wir die Koeffizienten a_n bestimmen über

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x)P_n(x)dx. \quad (2.45)$$

2.2 Lösung der Laplace-Gleichung mit axialer Symmetrie

In Kugelkoordinaten lautet der Laplace-Operator

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}. \quad (2.46)$$

Wenn die Funktion f gar nicht vom Winkel ϕ abhängt, verschwindet der letzte Term und das Problem vereinfacht sich etwas. Wir möchten die Laplace-Gleichung für die Funktion $\Phi(r, \theta)$ lösen

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (2.47)$$

Um die Lösung zu erhalten machen wir einen **Separationsansatz**

$$\Phi(r, \theta) = R(r)P(\theta). \quad (2.48)$$

Einsetzen liefert, dass

$$P(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + R(r) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (2.49)$$

Jetzt dividieren wir durch $R(r)P(\theta)$

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{P(\theta)} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (2.50)$$

Analog z.B. zur Lösung des Wasserstoffatoms in der QM (vgl. VL Quantenmechanik) ist jetzt der 1. Term unabhängig von θ und der zweite unabhängig von r . Also müssen beide Terme konstant sein und sich gegenseitig wegheben, wir schreiben also

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) = +k \quad (2.51)$$

und

$$\frac{1}{P(\theta)} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) = -k \quad (2.52)$$

mit noch zu bestimmender Konstante k . Mit dem Ansatz haben wir eine partielle DGL in zwei ordinäre DGL überführt, wir können also hier die partiellen Ableitungen durch normale ersetzen.

Die radiale DGL

$$r^2 R''(r) + 2rR'(r) - kR(r) = 0 \quad (2.53)$$

kann durch einen Potenzreihenansatz

$$R(r) = Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}} \quad (2.54)$$

gelöst werden. Einsetzen liefert (Nachrechnen), dass der Ansatz für beliebige Koeffizienten A und B die radiale Gleichung löst, wenn

$$k = n(n+1). \quad (2.55)$$

Dies setzen wir in den winkelabhängigen Anteil der Gleichung ein

$$\frac{d}{d\theta} (\sin \theta P'(\theta)) + n(n+1) \sin \theta P(\theta) = 0. \quad (2.56)$$

Setzen wir die übliche Substitution $x = \cos \theta$ ein, gilt

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d}{dx} = -\sin \theta \frac{d}{dx} = -\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx}. \quad (2.57)$$

Also wird die Winkel-DGL zur Legendre-DGL (2.34)

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2)P'(x)] + n(n+1)P(x) = 0. \quad (2.58)$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind die Legendre-Polynome $P_n(x) = P_n(\cos \theta)$.

Wir können also die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung unter axialer Symmetrie schreiben als

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta), \quad (2.59)$$

wobei A_n und B_n Entwicklungskoeffizienten sind, welche durch die Randbedingungen bestimmt werden können. Für die konkrete Bestimmung der A_n und B_n sind dann bei bekannter Randbedingung die Ortnormalitätsrelationen der Legendre-Polynome (2.43) hilfreich.

2.3 Kugelfunktionen

Wenn man keine sphärische Symmetrie vorliegen hat, ist das Problem komplizierter. Um die Laplace-Gleichung

$$\Delta f(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = 0 \quad (2.60)$$

zu lösen, machen wir wieder einen Separationsansatz

$$f(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi). \quad (2.61)$$

Dieser wird in die Laplace-Gleichung eingesetzt, wir erhalten

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{Y(\theta, \phi)} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y(\theta, \phi) = 0. \quad (2.62)$$

Hier müssen die radialen- und die Winkelanteile wieder Konstanten sein. Wir kennen die Lösung der radialen Gleichung bereits

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) = +k = n(n+1), \quad (2.63)$$

wobei wir die Lösung für die Separationskonstante k gleich aus Gleichung (2.54) eingesetzt haben. Also muss für den Winkelanteil ebenfalls gelten

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y(\theta, \phi) = -n(n+1)Y(\theta, \phi). \quad (2.64)$$

Wir machen erneut einen Separationsansatz

$$Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi), \quad (2.65)$$

was zunächst auf

$$\frac{1}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Phi(\phi) \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} + n(n+1) = 0 \quad (2.66)$$

führt. Um die beiden Winkelanteile zu separieren, müssen wir noch mit $\sin^2(\theta)$ multiplizieren

$$\left[\frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) + n(n+1) \sin^2 \theta \right] + \frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} = 0. \quad (2.67)$$

Wieder müssen die beiden Terme separat konstant sein. Wir nennen die Separationskonstante $-m^2$ und schauen uns erstmal die einfachere der beiden Gleichungen an

$$\frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} = -m^2 \Phi(\phi). \quad (2.68)$$

Diese wird offensichtlich gelöst durch

$$\Phi(\phi) = \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} \quad : \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (2.69)$$

Hier kommt die Quantisierung von m durch die Forderung der Eindeutigkeit der Lösung: Da es sich um einen Winkel handelt, fordern wir ja $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$. Dieses vollständige Funktionensystem haben wir schon als Beispiel in Abschnitt 2.1.1 kennen gelernt.

Die verbleibende DGL lautet

$$\left[\frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) + n(n+1) \sin^2 \theta \right] = +m^2. \quad (2.70)$$

Da Θ nur von einer Variablen abhängt können wir auch die partiellen Ableitungen durch eine normale ersetzen. Umformen liefert

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta(\theta) = 0. \quad (2.71)$$

Mit der Substitution $x = \cos \theta$ haben wir wieder $\frac{d}{d\theta} = -\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx}$, also schreiben wir

$$(1-x^2)\Theta''(x) - 2x\Theta'(x) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta(x) = 0. \quad (2.72)$$

Für $m = 0$ ist dies gerade die Legendre-DGL (2.34), wir versuchen also auf dieser bekannten Lösung aufzubauen. Wir schreiben die DGL für $m > 0$ weiter um mit der Substitution

$$\Theta(x) = (1-x^2)^{m/2} v_m(x). \quad (2.73)$$

Nach einigen Umformungen (Nachrechnen) führt dies auf

$$(1-x^2)v_m''(x) - 2(m+1)xv_m'(x) + [n(n+1) - m(m+1)]v_m(x) = 0. \quad (2.74)$$

Einmaliges Differenzieren nach x ergibt

$$(1-x^2)v_m'''(x) - 2(m+2)xv_m''(x) + [n(n+1) - (m+1)(m+2)]v_m(x) = 0. \quad (2.75)$$

Vergleichen wir diese beiden DGLen, erkennt man die Beziehung

$$v_m'(x) = v_{m+1}(x), \quad (2.76)$$

bzw. rekursiv

$$v_m(x) = \frac{d^m}{dx^m} v_0(x). \quad (2.77)$$

Laut unserem Ansatz ist $v_0(x)$ aber gerade die Lösung der gewöhnlichen Legendre-DGL (2.34). Also ist die Lösung der verbleibenden Winkel-DGL (2.72) gegeben durch

$$\Theta(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad : \quad m \in \{0, 1, \dots\}, n \in \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (2.78)$$

Schaut man sich die Legendre-Polynome an, wird sichtbar, dass ihr Grad ansteigt mit wachsendem Index. Die Ableitungen nach x werden also verschwinden für genügend große m , so dass wir die Einschränkung $0 \leq m \leq n$ mit berücksichtigen müssen. Es ist jedoch üblich, einen Phasenfaktor mit in die Definition aufzunehmen, so dass die allgemeine Lösung der Winkel-DGL gegeben ist durch **assoziierte Legendre-Polynome** der Form

$$P_\ell^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x), \quad \ell \in \{0, 1, 2, \dots\}, m \in \{0, 1, \dots, \ell\}, \quad (2.79)$$

wobei $x = \cos \theta$ und $P_\ell(x)$ die gewöhnlichen Legendre-Polynome sind, welche wir in Abschnitt 2.1.2 diskutiert haben. Offensichtlich gilt auch $P_\ell^0(x) = P_\ell(x)$.

Einsetzen der Rodriguez-Formel (2.22) liefert eine explizite Formel zum Bestimmen der assoziierten Legendre-Polynome für $0 \leq m \leq \ell$

$$P_\ell^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!} (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2 - 1)^\ell. \quad (2.80)$$

Wir können die Orthogonalitätsrelation der Legendre-Polynome ausrechnen und benutzen, um ordentlich normierte Basisfunktionen zu definieren, die **Kugelflächenfunktionen**

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} P_\ell^m(\cos(\theta)) e^{im\phi}. \quad (2.81)$$

Diese Kugelflächenfunktionen (auch: Kugelfunktionen) erfüllen die Orthonormalitätsrelation

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_{\ell' m'}^*(\theta, \phi) Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}. \quad (2.82)$$

Der Faktor $\delta_{mm'}$ ist sofort aus der Orthogonalität von $e^{im\phi}$ ersichtlich. Der Rest folgt aus der Orthogonalitätsrelation für die assoziierten Legendre-Polynome (für $m = m'$)

$$\int P_\ell^m(x) P_{\ell'}^m(x) dx = \frac{2}{2\ell + 1} \frac{(\ell + m)!}{(\ell - m)!} \delta_{\ell\ell'}. \quad (2.83)$$

Diese Relation wiederum können wir aus der DGL für die assoziierten Legendre-Polynome (2.72) ableiten oder aus der assoziierten Rodriguez-Formel (2.80), die Ableitung ist analog zu der bereits gezeigten für die Orthogonalität der Legendre-Polynome, jedoch etwas technisch. Analog zu den Legendre-Polynomen, welche auch als Lösungen der Legendre-DGL (2.34) definiert werden können, kann man auch die Kugelflächenfunktionen als Eigenfunktionen des Winkel-Anteils – vgl. (2.64) – des Laplace-Operators verstehen

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y_{\ell m}(\theta, \phi) = -\ell(\ell + 1) Y_{\ell m}(\theta, \phi) = r^2 \Delta Y_{\ell m}(\theta, \phi). \quad (2.84)$$

Hierbei haben wir ganz rechts den Laplace-Operators in Kugelkoordinaten (2.46) benutzt – die radialen Anteile verschwinden, da die Kugelflächenfunktionen nicht von r abhängen.

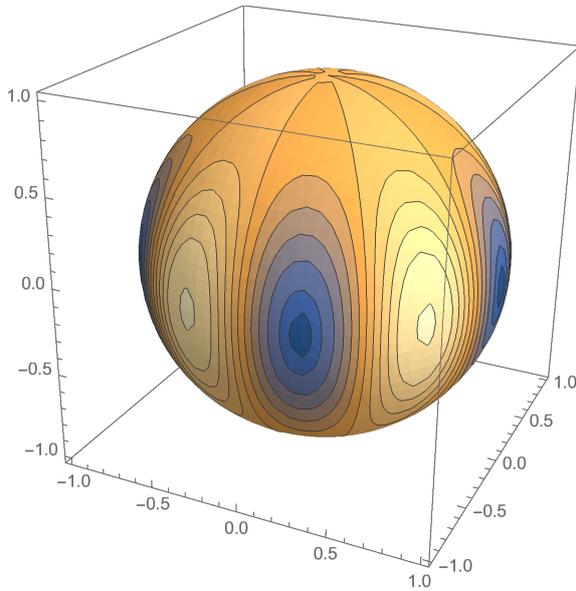


Abbildung 2.2: Konturplot des Realteils von $Y_{55}(\theta, \phi)$ auf der Einheitskugel. Mathematica-Kommandos: `SphericalHarmonicY`, `SliceContourPlot3D`, $\theta = \text{ArcTan}[z, \sqrt{x^2 + y^2}]$, $\phi = \text{ArcTan}[x, y]$.

Die ersten Kugelflächenfunktionen lauten

$$Y_{0,0}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad (2.85)$$

$$Y_{1,-1}(\theta, \phi) = +\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi}, \quad Y_{1,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_{1,+1}(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{+i\phi},$$

sie lassen sich auf Kugeloberflächen darstellen, vgl. Abb. 2.2. Generell sind die Kugelflächenfunktionen mit $m = 0$ gegeben durch die Legendre-Polynome

$$Y_{\ell,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_{\ell}(\cos \theta). \quad (2.86)$$

Weiterhin kann man die Kugelflächenfunktionen für negative m erhalten aus denen für positive m

$$Y_{\ell,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{\ell,+m}^*(\theta, \phi). \quad (2.87)$$

Die Kugelflächenfunktionen erfüllen die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \delta(\cos \theta - \cos \theta') \delta(\phi - \phi'). \quad (2.88)$$

Wir können jede Funktion auf der Einheitskugel in Kugelflächenfunktionen zu entwickeln

$$g(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi). \quad (2.89)$$

Die Entwicklungskoeffizienten können dann bequem aus der Orthogonalitätsbedingung bestimmt werden

$$a_{\ell m} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) g(\theta, \phi). \quad (2.90)$$

Setzen wir diese wieder in der Gleichung für $g(\theta, \phi)$ ein, erhalten wir wieder die Vollständigkeitsrelation (2.88).

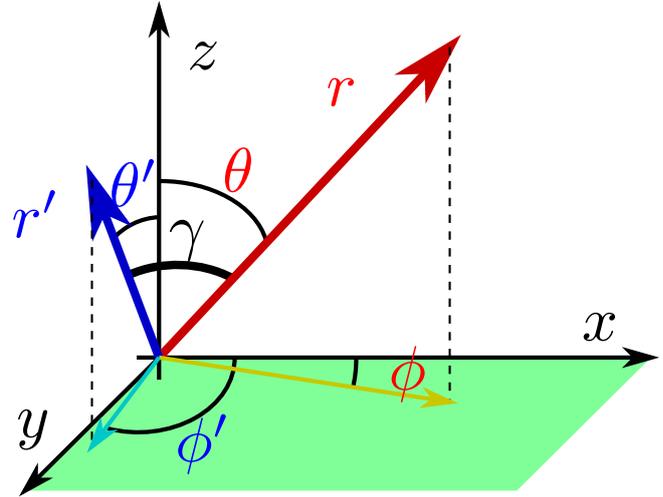


Abbildung 2.3: Darstellung zweier Vektoren \mathbf{r} und \mathbf{r}' in Kugelkoordinaten, welche den Winkel γ einschließen.

Angewandt auf Probleme der Elektrostatik können wir natürlich auch die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

$$\Delta\Phi(r, \theta, \phi) = 0 \quad (2.91)$$

darstellen durch die Kugelflächenfunktionen und eine radiale Komponente

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \left[a_{\ell m} r^{+\ell} + \frac{b_{\ell m}}{r^{\ell+1}} \right] Y_{\ell m}(\theta, \phi). \quad (2.92)$$

Hier sind die Entwicklungskoeffizienten wieder zu bestimmen aus den Randbedingungen.

2.4 Additionstheorem der Kugelflächenfunktionen

Stellt man die Vektoren im Poisson Integral durch Kugelkoordinaten dar, ergibt sich

$$\mathbf{r} = r \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}' = r' \begin{pmatrix} \sin \theta' \cos \phi' \\ \sin \theta' \sin \phi' \\ \cos \theta' \end{pmatrix}, \quad (2.93)$$

so dass ihr Skalarprodukt offensichtlich gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' &= rr' \cos \gamma = rr' [\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' [\cos \phi \cos \phi' + \sin \phi \sin \phi']] \\ &= rr' [\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')]. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Hier bezeichnet γ den Winkel zwischen \mathbf{r} und \mathbf{r}' , und offensichtlich hängt $\cos \gamma$ sowohl von θ und ϕ als auch von θ' und ϕ' ab, vgl. Abb. 2.3.

Wenn wir jede Funktion auf einer Kugeloberfläche in Kugelflächenfunktionen entwickeln können, gilt dies natürlich auch für $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$, wofür wir schon die Entwicklung in Legendre-Polynome kennen

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{r_{>}} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \gamma). \quad (2.95)$$

Genauso dürfen wir in Kugelflächenfunktionen entwickeln, wobei man zunächst ziemlich viele Terme enthalten würde (vgl. Fließbach)

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{\ell, \ell'} \sum_{mm'} A_{\ell \ell' mm'}(r, r') Y_{\ell' m'}^*(\theta', \phi') Y_{\ell m}(\theta, \phi). \quad (2.96)$$

Hier haben wir eine Entwicklung nach komplex konjugierten Kugelflächenfunktionen im ersten Faktor gewählt, diese sind natürlich auch ein vollständiges Funktionensystem. Außerdem haben wir die Summationsgrenzen der Einfachheit halber weggelassen, es gilt immer noch $0 \leq l, l' < \infty$ und $-\ell \leq m \leq +\ell$ sowie $-\ell' \leq m' \leq +\ell'$. Auf diese Gleichung wenden wir den Laplace-Operator an. Die linke Seite ergibt gerade die 3d Dirac-Delta Funktion, welche wir noch in Kugelkoordinaten darstellen können

$$\begin{aligned} \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r') \delta(\cos \theta - \cos \theta') \delta(\phi - \phi') \\ &= -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r') \sum_{\ell} \sum_m Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell m}(\theta, \phi). \end{aligned} \quad (2.97)$$

Im ersten Schritt haben wir einfach die δ -Funktion in Kugelkoordinaten dargestellt (Normierung nachrechnen) und im zweiten dann die Winkelanteile durch die Vollständigkeitsrelation der Kugelflächenfunktionen (2.88) ersetzt. Auf der rechten Seite können wir die Wirkung des Laplace-Operators auf die Kugelflächenfunktionen (2.84) einsetzen

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{\ell \ell'} \sum_{m m'} \left(\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) A_{\ell \ell' m m'}(r, r') Y_{\ell' m'}^*(\theta', \phi') Y_{\ell m}(\theta, \phi). \quad (2.98)$$

Da die Kugelflächenfunktionen linear unabhängig sind, müssen die Koeffizienten übereinstimmen, d.h. die meisten Entwicklungskoeffizienten verschwinden

$$A_{\ell \ell' m m'}(r, r') = A_{\ell m}(r, r') \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}. \quad (2.99)$$

Die verbleibenden Koeffizienten müssen die DGL

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) A_{\ell m}(r, r') = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r') \quad (2.100)$$

erfüllen. Die DGL hängt nicht von m ab, d.h. wir haben sogar $A_{\ell m}(r, r') = A_{\ell}(r, r')$. Für $r \neq r'$ verschwindet deren rechte Seite, und diesen Fall hatten wir bereits diskutiert, vgl. Gleichung (2.53) mit $k = \ell(\ell+1)$. Um ein endliches Potential zu erhalten, kommen nur die Lösungen $A_{\ell} = a_{\ell} r^{\ell}$ für $r < r'$ und $A_{\ell} = b_{\ell} / r^{\ell+1}$ für $r > r'$ in Frage. Weiterhin ergibt $A_{\ell}(r, r')$ in der 2. Ableitung eine Delta-Funktion, ihre erste Ableitung hat also einen Sprung bei $r = r'$ und $A_{\ell}(r, r')$ selbst ist stetig. Damit können wir b_{ℓ} eliminieren und erhalten

$$A_{\ell}(r, r') = \begin{cases} a_{\ell} r^{\ell} & : r < r' \\ a_{\ell} (r')^{2\ell+1} / r^{\ell+1} & : r > r' \end{cases} \quad (2.101)$$

Um a_{ℓ} zu bestimmen, multiplizieren wir (2.100) mit r und integrieren dann auf beiden Seiten bzgl. $\int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} [\dots] dr$. Daraus folgt für $\epsilon \rightarrow 0$ der Koeffizient a_{ℓ} , und wir erhalten insgesamt [Nachrechnen]

$$A_{\ell \ell' m m'}(r, r') = \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{1}{r_{>}} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{\ell} \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}. \quad (2.102)$$

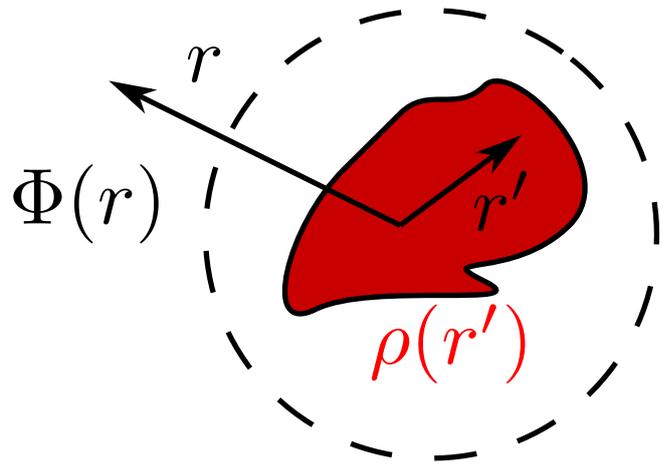
Dies reduziert die Zahl der Koeffizienten in (2.96) berächtlich

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{1}{r_{>}} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell m}(\theta, \phi). \quad (2.103)$$

Der Vergleich mit (2.95) liefert das **Additionstheorem der Kugelflächenfunktionen**

$$P_{\ell}(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell m}(\theta, \phi) : \cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi'). \quad (2.104)$$

Abbildung 2.4: Skizze einer lokalisierten Ladungsverteilung (rot, innerhalb der gestrichelten Kugel). Ist man nur interessiert am Fernfeld $\Phi(\mathbf{r})$ (außerhalb der gestrichelten Kugel), bietet sich eine Multipolentwicklung des Potentials an, was mit $|\mathbf{r}| > |\mathbf{r}'|$ eine vereinfachte Berechnung des Poisson-Integrals ermöglicht.



2.5 Multipolentwicklung

Ein typisches Problem der Elektrostatik sind räumlich begrenzte Ladungsverteilungen $\rho(\mathbf{r})$. Sind keine weiteren Randbedingungen gegeben, können wir der Konvention folgen, dass das Potential im Unendlichen verschwinden soll und erhalten dann die allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung über das Poisson-Integral

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'. \quad (2.105)$$

Wenn die Ladungsverteilung räumlich begrenzt ist, ist es auch das Integrationsvolumen, vgl. Abb. 2.4. Trotzdem kann die Berechnung des Poisson-Integrals durchaus kompliziert sein. Selbst für homogen geladene Körper $\rho(\mathbf{r}') = \rho_0 \forall \mathbf{r}' \in V$ kann durch die Form des Volumens V eine analytische Lösung des Integrals kompliziert werden, hierfür bietet sich für eine einfachere Beschreibung eines solchen Potentials die **Multipolentwicklung** an.

2.5.1 Sphärische Multipolentwicklung

Mit dem Additionstheorem der Kugelflächenfunktionen (2.104) können wir das Poisson-Integral unter der Annahme $r > r'$ schreiben als

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta, \phi) &= \int \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(\cos \gamma) \left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell} d^3r' \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{1}{r^{\ell+1}} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \int Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') \rho(\mathbf{r}') (r')^{\ell} d^3r' \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{1}{r^{\ell+1}} Y_{\ell m}(\theta, \phi) q_{\ell m} \end{aligned} \quad (2.106)$$

Man bezeichnet die Koeffizienten

$$q_{\ell m} = \int Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') \rho(\mathbf{r}') (r')^{\ell} d^3r' \quad (2.107)$$

als die **Multipolmomente** der Ladungsverteilung ρ . Speziell heißen die Größen

- q_{00} Monopolmoment (1, Namensgebung aus $2^0 = 1$)
- q_{1m} : $m \in \{-1, 0, +1\}$ Dipolmomente (3, Namensgebung aus $2^1 = 2$)

- q_{2m} : $m \in \{-2, \dots, +2\}$ Quadrupolmomente (5, Namensgebung aus $2^2 = 4$)
- q_{3m} : $m \in \{-3, \dots, +3\}$ Oktupolmomente (7, Namensgebung aus $2^3 = 8$)
- q_{4m} : $m \in \{-4, \dots, +4\}$ Hexadekupolmomente (9, Namensgebung aus $2^4 = 16$).

Setzen wir diese Formeln ein, sieht man, dass das **Monopolmoment**

$$q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \rho(\mathbf{r}') d^3r' = \frac{q}{\sqrt{4\pi}} \quad (2.108)$$

gerade der Gesamtladung der Ladungsverteilung entspricht. Für sehr große Entfernungen dominiert gerade dieser Term, so dass das Potential jeder Ladungsverteilung in großen Entfernungen so aussieht wie eine Punktladung.

Einsetzen der **Dipolmomente** liefert mit (2.85)

$$\begin{aligned} q_{1,-1} &= \int Y_{1,-1}^*(\theta', \phi') \rho(\mathbf{r}') r' d^3r' = \int \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta' (\cos \phi' + i \sin \phi') \rho(\mathbf{r}') r' d^3r' \\ &= \int \sqrt{\frac{3}{4\pi}} (x' + iy') \rho(\mathbf{r}') d^3r' \\ q_{1,0} &= \int \sqrt{\frac{3}{4\pi}} z' \rho(\mathbf{r}') d^3r' \\ q_{1,-1} &= \int \sqrt{\frac{3}{4\pi}} (-x' + iy') \rho(\mathbf{r}') d^3r', \end{aligned} \quad (2.109)$$

wobei wir einfach x' , y' , und z' in Kugelkoordinaten eingesetzt haben.

Für sehr große Entfernungen dominiert im Potential der Monopolterm (sollte die Gesamtladung nicht zufällig verschwinden), der nächste Beitrag kommt vom Dipolterm usw.

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta, \phi) &\approx 4\pi q_{00} \frac{1}{r} Y_{00}(\theta, \phi) q_{00} + \frac{4\pi}{3} \frac{1}{r^2} [Y_{1,-1}(\theta, \phi) q_{1,-1} + Y_{1,0}(\theta, \phi) q_{1,0} + Y_{1,+1}(\theta, \phi) q_{1,+1}] + \mathcal{O}\left\{\frac{1}{r^3}\right\} \\ &= \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \dots \end{aligned} \quad (2.110)$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, dass die ersten Kugelflächenfunktionen proportional zu x/r , y/r und z/r in Kugelkoordinatendarstellung sind, so dass wir den Beitrag des Dipolmomentes als Skalarprodukt eines Dipolvektors mit dem Ortsvektor darstellen können.

2.5.2 Kartesische Multipolentwicklung

Bei Problemen ohne sphärische Symmetrie kann man natürlich genauso gut kartesische Koordinaten benutzen. Wenn der Schwerpunkt von ρ am Ursprung liegt, setzt man für den $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ Term im Poisson-Integrals eine dreidimensionale Taylor-Reihe um $x' = 0$, $y' = 0$ und $z' = 0$ an

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r' = \int \rho(\mathbf{r}') \left[\frac{1}{r} + \sum_{i=1}^3 \frac{x_i x'_i}{r^3} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^3 \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} x'_i x'_j + \dots \right] d^3r' \\ &= \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^3 \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} \int \rho(\mathbf{r}') x'_i x'_j d^3r' + \dots \end{aligned} \quad (2.111)$$

Hierbei ist der erste Term wieder das Monopolmoment, der zweite Term

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d^3r' \quad (2.112)$$

ist das kartesische Dipolmoment. Man zeigt leicht, dass kartesisches und sphärisches Dipolmoment zusammenhängen

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(q_{1,-1} - q_{1,+1}) \\ \frac{1}{i\sqrt{2}}(q_{1,-1} + q_{1,+1}) \\ q_{1,0} \end{pmatrix}. \quad (2.113)$$

Der dritte Term in der Entwicklung des Potentials oben korrespondiert zum Quadrupolmoment. Umformen (Erweitern mit 3/3 und Hinzufügen einer "Nährhaften Null") liefert

$$\begin{aligned} \frac{1}{3!} \sum_{i,j=1}^3 \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} \int \rho(\mathbf{r}') (3x'_i x'_j - (r')^2 \delta_{ij} + (r')^2 \delta_{ij}) d^3 r' \\ = \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^3 \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} Q_{ij}. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, dass $\sum_{i,j=1}^3 (3x_i^2 - r^2 \delta_{ij}) \delta_{ij} = \sum_{i=1}^3 (3x_i^2 - r^2) = 3r^2 - 3r^2 = 0$ gilt. Der Vorteil dieser Darstellung liegt darin, dass die neu eingeführte Größe, der **Quadrupoltensor** (vgl. auch Trägheitstensor in der VL zur Mechanik)

$$Q_{ij} = \int \rho(\mathbf{r}') (3x'_i x'_j - (r')^2 \delta_{ij}) d^3 r', \quad (2.115)$$

nur 5 unabhängige Größen – genau wie das sphärische Quadrupolmoment – hat, denn er ist symmetrisch und spurfrei. Für höhere Multipolmomente ist eine Beschreibung durch sphärische Multipolmomente günstiger, da diese weniger Komponenten haben.

Zusammenfassend können wir dann für das Potential im Fernfeld schreiben

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3} + \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^3 \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} Q_{ij} + \dots \quad (2.116)$$

mit kartesischem Monopolmoment q , Dipolmoment \mathbf{p} und Quadrupoltensor Q_{ij} . Wegen der Spurfreiheit des Quadrupoltensors folgt weiter $\sum_{ij} \delta_{ij} Q_{ij} = 0$, man kann daher den letzten Summanden auch vereinfachen.

Ein Multipol heißt auch rein, wenn nur Multipolmomente der entsprechenden Ordnung auftreten. Zum Beispiel kann ein reiner Monopol eben nur durch eine Punktladung oder eine radialsymmetrische Ladungsverteilung generiert werden. Ein reiner Dipol kann aus zwei Monopolen mit entgegengesetzten Ladungen konstruiert werden, z.B.

$$\rho_{\text{dip}} = q [-\delta(x+d) + \delta(x-d)] \delta(y) \delta(z). \quad (2.117)$$

Das entsprechende Monopolmoment würde verschwinden, da die Gesamtladung Null ist. Das Dipolmoment aber bleibt endlich und ist gegeben durch Ladung mal Abstand

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2qd \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.118)$$

Platziert man zwei solcher Dipole entgegengesetzt im selben Abstand, erhält man einen reinen Quadrupol, z.B.

$$\rho_{\text{quad}} = q [\delta(x+d)\delta(y+d) - \delta(x-d)\delta(y+d) - \delta(x+d)\delta(y-d) + \delta(x-d)\delta(y-d)] \delta(z). \quad (2.119)$$

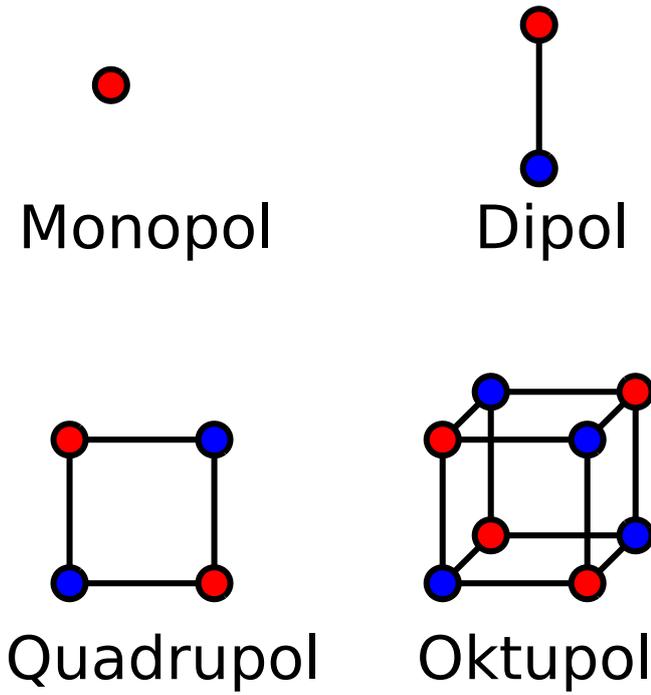


Abbildung 2.5: Reine Multipole können durch Kombinationen von alternierenden Punktladungen (z.B. blau für positiv und rot für negativ) erzeugt werden.

Folgerichtig kann man auch entsprechend zwei reine Quadrupole kombinieren um einen Oktupol zu erhalten

$$\begin{aligned} \rho_{\text{oct}} = & q [\delta(x+d)\delta(y+d) - \delta(x-d)\delta(y+d) - \delta(x+d)\delta(y-d) + \delta(x-d)\delta(y-d)] \delta(z+d) \\ & - q [\delta(x+d)\delta(y+d) - \delta(x-d)\delta(y+d) - \delta(x+d)\delta(y-d) + \delta(x-d)\delta(y-d)] \delta(z-d), \end{aligned} \quad (2.120)$$

vgl. Abb. 2.5. Hierfür ist aber die exakte Ladungskonfiguration wichtig, z.B. können wir zwei Dipole einfach auf einer Gerade platzieren

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(x)\delta(y) [\delta(z-d) - 2\delta(z) + \delta(z+d)]. \quad (2.121)$$

Hierfür verschwindet zwar das Monopolmoment, da die Gesamtladung immer noch Null ist, jedoch würde es ein endliches Quadrupolmoment geben.

2.6 Wechselwirkungsenergie mit dem äußeren Feld

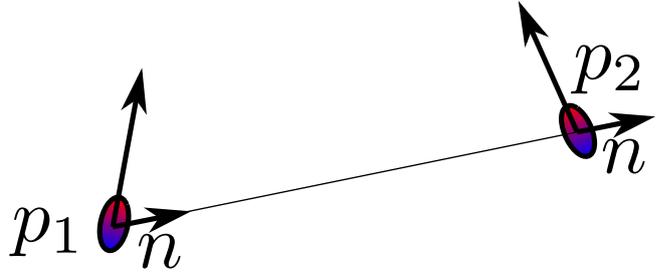
Wir hatten bereits allgemein die Wechselwirkungsenergie einer Punktladung mit dem externen Feld abgeleitet. Aus Abschnitt 1.8 können wir dies leicht für eine Ladungsverteilung generalisieren

$$W = \int \rho(\mathbf{r})\Phi_e(\mathbf{r})d^3r. \quad (2.122)$$

Hierbei ist $\Phi_e(\mathbf{r})$ ein äußeres Feld, welches also nicht von $\rho(\mathbf{r})$, sondern von einer anderen, externen, Ladungsverteilung erzeugt wird. Dieses äußere Potential können wir in eine Taylor-Reihe entwickeln

$$\begin{aligned} \Phi_e(\mathbf{r}) &= \Phi_e(0) + \mathbf{r} \cdot \nabla\Phi_e \Big|_0 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2\Phi_e}{\partial x_i\partial x_j} \Big|_0 x_i x_j + \dots \\ &= \Phi_e(0) - \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_e(0) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial E_{e,j}}{\partial x_i} \Big|_0 x_i x_j + \dots \end{aligned} \quad (2.123)$$

Abbildung 2.6: Die Wechselwirkungsenergie zweier Dipole \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 ist vom Abstand und von Ihrer Orientierung abhängig. Die Winkel Dipol-Verbindungsachse und Dipol-Dipol sind jedoch nicht voneinander unabhängig.



Hierbei bezeichnet $\mathbf{E}_e(\mathbf{r})$ die äußere Feldstärke. Da diese von weit entfernt liegenden Ladungen erzeugt wird, gilt $\nabla \cdot \mathbf{E}_e = 0$ in dem Gebiet in welchem sich unsere Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ befindet. Entsprechend können wir im letzten Term von jedem Summanden den Term

$$0 = \frac{1}{6} r^2 \nabla \cdot \mathbf{E}_e = \frac{1}{6} r^2 \sum_{i,j} \delta_{ij} \frac{\partial E_{e,j}}{\partial x_i} \quad (2.124)$$

subtrahieren und erhalten einen Ausdruck welcher dem Quadrupolmoment nicht unähnlich ist

$$\Phi_e(\mathbf{r}) = \Phi_e(0) - \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_e(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^3 (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \frac{\partial E_{e,j}}{\partial x_i} \Big|_0 + \dots \quad (2.125)$$

Setzt man dies in die Gleichung für die Wechselwirkungsenergie ein, erhält man

$$W = q\Phi_e(0) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} \frac{\partial E_{e,j}}{\partial x_i} \Big|_0 + \dots \quad (2.126)$$

Die verschiedenen Multipole wechselwirken also auf verschiedene Weise mit dem externen Feld: Der Monopol (Gesamtladung) mit dem Potential, der Dipol mit der Feldstärke (dem Gradienten des Potentials), der Quadrupol mit der Ableitung des elektrischen Feldes.

Als einfaches Beispiel betrachten wir die Wechselwirkungsenergie zweier Dipole. Dieses Beispiel ist deswegen so relevant, weil Atome mit stark gebundenen Elektronen ein natürliches Dipolmoment bilden. Das Potential eines Dipols \mathbf{p}_1 am Ursprung ist gegeben durch

$$\Phi_1(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{x p_1^x + y p_1^y + z p_1^z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (2.127)$$

was auf die Feldstärke entfernt vom Ursprung

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi_1(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{p}_1 - 3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_1)}{r^3} \quad (2.128)$$

mit $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ führt. Damit folgt für die Wechselwirkungsenergie der symmetrische Ausdruck

$$W_{12} = -\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_1)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_2)}{r^3}. \quad (2.129)$$

Dieser hängt nicht nur vom Abstand r der beiden Dipole ab, sondern auch von der jeweiligen Orientierung der Dipole zueinander und zu ihrer jeweiligen Verbindungsachse, vgl. Abb. 2.6. Betrachtet man z.B. identische Dipole $p_1 = p_2 = p$, welche in einem bestimmten Abstand entlang der z -Achse (d.h. $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$) voneinander fixiert sind, sich aber drehen können, ergibt sich ein vereinfachter Ausdruck für die Wechselwirkungsenergie

$$W_{12} = \frac{p^2}{r^3} [\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) - 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2]. \quad (2.130)$$

Der minimale Wert der Energie ergibt sich z.B. für $\theta_1 = \theta_2 = 0$. In eine koordinatenfreie Darstellung übertragen bedeutet dies, dass die gleich ausgerichtete Konfiguration der Dipole die Energie minimiert. Wenn die Dipole zueinander zeigen, also antiparallel orientiert sind, wird die Energie maximal.

Kapitel 3

Dielektrika

Wir hatten bisher als Grundgleichungen der Elektrostatik immer nur die Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (3.1)$$

behandelt. Diese gelten aber strenggenommen nur in nichtpolarisierbaren Medien, z.B. im Vakuum oder mikroskopisch gesehen zwischen den Punktladungen eines Festkörpers, wenn dessen Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ genau bekannt ist. In Festkörpern wird die Beschreibung unter Umständen komplizierter. Im Gegensatz zu Leitern (vgl. Abschnitt 1.12) sind in Isolatoren die Ladungen fester gebunden, sie können sich also nicht einfach so lange verschieben bis das externe Feld kompensiert ist. Die Moleküle in solchen Festkörpern können sich jedoch z.B. ein wenig verbiegen, es kommt zu einer teilweisen Ladungstrennung. Diese Ladungstrennung führt dann nach den Grundgleichungen oben auch wieder zu einer Änderung des Feldes, welches wiederum die Ladungsverteilung beeinflusst usw. Nimmt man diese Ladungstrennung in den mikroskopischen Maxwellgleichungen mit auf, sind sie weiterhin exakt. Das kann man für kleine Systeme, z.B. für eine Feder mit einer positiven und einer negativen Ladung noch gut machen, in einem realistischen Festkörper mit ca. 10^{23} Elektronen ist die komplette mikroskopische Betrachtung jedoch nicht mehr machbar.

3.1 Mittelungen

Die Fluktuationen des mikroskopischen elektrischen Feldes sind auf der Längenskala der atomaren Gitterkonstanten sehr groß, z.B. würde es an den Orten der Punktladungen sowieso divergieren. Die grundlegende Idee ist dann, das Feld im Medium zu mitteln, und zwar über Volumina welche deutlich größer als das durchschnittliche Volumen pro Ladungsträger sind. Das gemittelte Feld ergibt das makroskopische Feld, welches man z.B. durch die mittlere Kraft auf eine Punktladung messen kann.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{mak}}(\mathbf{r}) &= \langle \mathbf{E}_{\text{mik}}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \mathbf{E}_{\text{mik}}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') d^3r', \\ \rho_{\text{mak}}(\mathbf{r}) &= \langle \rho_{\text{mik}}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \rho_{\text{mik}}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') d^3r', \end{aligned} \quad (3.2)$$

wobei ΔV das um \mathbf{r} zentrierte Mittelungsvolumen ist – dieses sollte für so eine effektive Beschreibung deutlich größer als der Bereich für die im Festkörper induzierten Dipolmomente (das Raumvolumen pro Atom oder Molekül, also größer als die sog. Elementarzelle) sein.

Um einen einfachen Ausdruck für das makroskopische Feld zu erhalten, betrachten wir zunächst einfach nur ein Molekül mit Schwerpunkt bei \mathbf{r}_j und innerer Ladungsverteilung ρ_j , vgl. Abb. 3.1. Am Orte \mathbf{r} weit außerhalb der Ladungsverteilung ρ_j erzeugt das Molekül mit

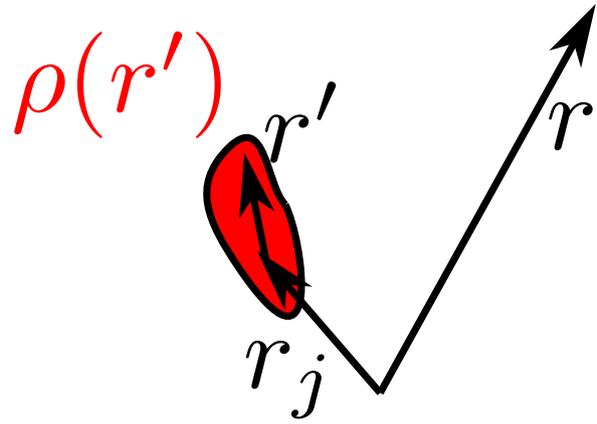


Abbildung 3.1: Skizze eines Moleküls, dargestellt durch die Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}')$. Die Vektoren \mathbf{r} und \mathbf{r}_j zeigen zum Beobachtungspunkt und zum Schwerpunkt des Moleküls.

Index j das elektrische Feld

$$\mathbf{E}_j(\mathbf{r}) = \int_{\text{Mol}} \rho_j(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j - \mathbf{r}'|^3} d^3 r' = -\nabla \int_{\text{Mol}} \rho_j(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j - \mathbf{r}'|} d^3 r'. \quad (3.3)$$

Die Darstellung mit dem separierten Schwerpunkt \mathbf{r}_j der Ladungsverteilung hat den Vorteil, dass wir jetzt das Potential in Multipole um seinen Schwerpunkt herum entwickeln können

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_{\text{Mol}} \rho_j(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' = \frac{q_j}{r} + \frac{\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \dots \quad (3.4)$$

Hier behalten wir nur den Monopol- und Dipolbeitrag (unabhängig vom Ort \mathbf{r}_j des Moleküls)

$$q_j = \int_{\text{Mol}} \rho_j(\mathbf{r}') d^3 r', \quad \mathbf{p}_j = \int_{\text{Mol}} \mathbf{r}' \rho_j(\mathbf{r}') d^3 r'. \quad (3.5)$$

Der erste Term bezeichnet einfach die Ladung des Moleküls q_j und der zweite das Dipolmoment \mathbf{p}_j des j -ten Moleküls. Damit können wir das elektrische Feld des Moleküls j schreiben als

$$\mathbf{E}_j(\mathbf{r}) = -\nabla \left[\frac{q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} + \left(\nabla_j \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \right) \cdot \mathbf{p}_j + \dots \right] \quad (3.6)$$

Hierbei nutzen wir $\nabla_j = (\partial_{x_j}, \partial_{y_j}, \partial_{z_j})$. Um das mikroskopische Feld welches durch alle Moleküle erzeugt wird zu erhalten, summieren wir einfach alle Beiträge auf

$$\mathbf{E}_{\text{mik}}(\mathbf{r}) = -\nabla \sum_j \left[\frac{q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} + (\mathbf{p}_j \cdot \nabla_j) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} + \dots \right]. \quad (3.7)$$

Mit der molekularen Ladungsdichte und der entsprechenden Dipoldichte

$$\rho_{\text{mik}}(\mathbf{r}) = \sum_j q_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad \mathbf{p}_{\text{mik}}(\mathbf{r}) = \sum_j \mathbf{p}_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \quad (3.8)$$

können wir das elektrische Feld auch als Integral schreiben

$$\mathbf{E}_{\text{mik}}(\mathbf{r}) = -\nabla \int d^3 r'' \left[\frac{\rho_{\text{mik}}(\mathbf{r}'')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} + (\mathbf{p}_{\text{mik}}(\mathbf{r}'') \cdot \nabla'') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} + \dots \right]. \quad (3.9)$$

Dieses Feld mitteln wir wie vorhin beschrieben und erhalten das makroskopische elektrische

Feld

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\text{mak}}(\mathbf{r}) &= \langle \mathbf{E}_{\text{mik}}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \mathbf{E}_{\text{mik}}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') d^3 r' \\
&= -\frac{1}{\Delta V'} \int_{\Delta V'} d^3 r' \nabla \int_{\Delta V''} d^3 r'' \left[\frac{\rho_{\text{mik}}(\mathbf{r}'')}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} + (\mathbf{p}_{\text{mik}}(\mathbf{r}'') \cdot \nabla'') \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} + \dots \right] \\
&= -\frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3 r' \nabla \int_{\Delta V} d^3 x \left[\frac{\rho_{\text{mik}}(\mathbf{x} + \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} + (\mathbf{p}_{\text{mik}}(\mathbf{x} + \mathbf{r}') \cdot \nabla_x) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} + \dots \right] \\
&= -\nabla \int_{\Delta V} d^3 x \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \left(\frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \rho_{\text{mik}}(\mathbf{x} + \mathbf{r}') d^3 r' \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\nabla_x \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \right) \cdot \left(\frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \mathbf{p}_{\text{mik}}(\mathbf{x} + \mathbf{r}') d^3 r' \right) + \dots \right], \tag{3.10}
\end{aligned}$$

wobei wir die Substitution $\mathbf{x} = \mathbf{r}'' - \mathbf{r}'$ und die Annahme $\Delta V = \Delta V'$ genutzt und dann die Integrale vertauscht haben. Jetzt können wir die makroskopische Ladungsdichte

$$\rho_{\text{mak}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \rho_{\text{mik}}(\mathbf{x} + \mathbf{r}') d^3 r' = \frac{1}{\Delta V} \sum_j q_j \tag{3.11}$$

und den makroskopischen Dipoldichtevektor, die **Polarisation**

$$\mathbf{P}_{\text{mak}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \mathbf{p}_{\text{mik}}(\mathbf{x} + \mathbf{r}') d^3 r' = \frac{1}{\Delta V} \sum_j \mathbf{p}_j \tag{3.12}$$

eingeführen und erhalten

$$\mathbf{E}_{\text{mak}}(\mathbf{r}) = -\nabla \int d^3 r' \left[\frac{\rho_{\text{mak}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + (\mathbf{P}_{\text{mak}}(\mathbf{r}') \cdot \nabla') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]. \tag{3.13}$$

Das makroskopische Feld ist also in führender Ordnung nicht nur durch die makroskopische Ladungsverteilung gegeben, welche die Monopol-terme der Moleküle berücksichtigt (diese würden bei neutralen Molekülen verschwinden), sondern es gibt noch eine Korrektur durch die makroskopische Polarisationsdichte. In SI-Einheiten hätten wir vor der rechten Seite noch einen Faktor $1/(4\pi\epsilon_0)$.

3.2 Dielektrische Verschiebung

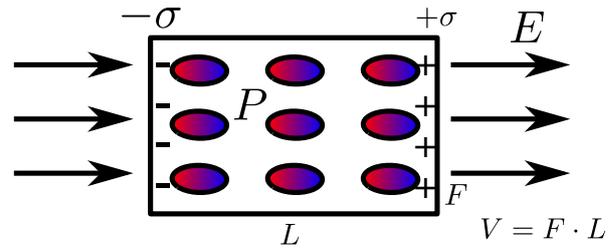
Um jetzt für das neu eingeführte makroskopische gemittelte Feld eine Art Maxwell-Gleichung zu erhalten, bilden wir die Divergenz

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E}_{\text{mak}}(\mathbf{r}) &= - \int_{\Delta V} d^3 r' \left[\rho_{\text{mak}}(\mathbf{r}') \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + (\mathbf{P}_{\text{mak}}(\mathbf{r}') \cdot \nabla') \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\
&= 4\pi \int_{\Delta V} d^3 r' [\rho_{\text{mak}}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + (\mathbf{P}_{\text{mak}}(\mathbf{r}') \cdot \nabla') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \\
&= 4\pi \int_{\Delta V} d^3 r' \rho_{\text{mak}}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - 4\pi \nabla \cdot \int \mathbf{P}_{\text{mak}}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 r' \\
&= 4\pi \rho_{\text{mak}}(\mathbf{r}) - 4\pi \nabla \cdot \mathbf{P}_{\text{mak}}(\mathbf{r}), \tag{3.14}
\end{aligned}$$

wobei wir $\nabla' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ benutzt haben. Bringen wir die makroskopische Ladungsverteilung auf eine Seite, erhalten wir

$$\nabla \cdot [\mathbf{E}_{\text{mak}}(\mathbf{r}) + 4\pi \mathbf{P}_{\text{mak}}(\mathbf{r})] = 4\pi \rho_{\text{mak}}(\mathbf{r}). \tag{3.15}$$

Abbildung 3.2: Induzierte homogene Polarisati-
on in einem Quader mit Länge L und Stirnflä-
chen F , definiert durch die Ausrichtung des ex-
ternen elektrischen Feldes. Es ergeben sich po-
sitive und negative Flächenladungsdichten $\pm\sigma$
an den Stirnflächen.



Also definiert man die **dielektrische Verschiebung** über

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{\text{mak}}(\mathbf{r}) + 4\pi\mathbf{P}_{\text{mak}}(\mathbf{r}). \quad (3.16)$$

In SI-Einheiten geht die ganze Rechnung analog, wir definieren dann $\mathbf{D}_{\text{SI}}(\mathbf{r}) = \epsilon_0\mathbf{E}_{\text{SI,mak}}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}_{\text{SI,mak}}(\mathbf{r})$. Für das makroskopische elektrische Feld gilt weiterhin

$$\nabla \times \mathbf{E}_{\text{mak}}(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.17)$$

da es sich ja nach (3.13) durch einen Gradienten darstellen lässt. Das elektrische Feld welches wir z.B. durch eine Kraft auf eine Punktladung messen können ist das makroskopische, d.h. wir ersetzen in der Schreibweise $\langle \mathbf{E}_{\text{mak}}(\mathbf{r}) \rangle \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r})$ und $\rho_{\text{mak}}(\mathbf{r}) \rightarrow \rho(\mathbf{r})$ und erhalten damit zusammenfassend die **Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik im Medium**

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (3.18)$$

In SI-Einheiten ist die zweite Gleichung identisch, und die erste wird zu $\nabla \cdot \mathbf{D}_{\text{SI}} = \rho_{\text{SI}}$.

3.3 Polarisation

Die effektive Beschreibung des elektrischen Feldes durch ein makroskopisches Feld führt also auf die dielektrische Verschiebung, welche die Polarisation des Mediums, d.h. die Ausbildung von effektiven Dipolmomenten, beinhaltet. Wir haben aber noch nichts darüber gesagt, wie sich die Polarisation unter Anwesenheit eines externen Feldes verhält. Formal hatten wir diese als die Anzahl von Dipolmomenten pro Volumeneinheit und somit als Dipoldichte definiert.

Als einfaches Beispiel betrachten wir einen homogen polarisierten Quader im elektrischen Feld, vgl. Abb. 3.2. Wird nun durch ein elektrisches Feld eine homogene Dipoldichte induziert, ergeben sich an den zum elektrischen Feld senkrechten Flächen eines gedachten Quaders Flächenladungsdichten, welche mit der Polarisationsdichte zusammenhängen. Bezeichnet q_F die Ladung auf den Stirnflächen, gilt

$$\sigma = \frac{q_F}{F}. \quad (3.19)$$

Weiterhin ist das gesamte Dipolmoment des Quaders gerade gegeben durch die Dipoldichte (Polarisation) mal Volumen oder auch durch die Flächenladung q_F mal der Quaderlänge

$$|\mathbf{P}|V = q_FL. \quad (3.20)$$

Die Kombination beider Gleichungen liefert für den Quader

$$|\mathbf{P}| = \sigma. \quad (3.21)$$

Jetzt betrachten wir den allgemeinen Fall und möchten eine Beziehung zwischen der Polarisation $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ und der Ladungsdichte ρ erhalten. Zunächst können wir das makroskopische elektrische Feld mit (3.13) als Gradient von Potentialen ausdrücken

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\text{mak}}(\mathbf{r}) &= -\nabla \int d^3r' \left[\frac{\rho_{\text{mak}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + (\mathbf{P}_{\text{mak}}(\mathbf{r}') \cdot \nabla') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\ &= -\nabla \Phi_\rho(\mathbf{r}) - \nabla \Phi_P(\mathbf{r}).\end{aligned}\quad (3.22)$$

Unter Ausnutzung von (wir lassen die Bezeichnung "mak" weg)

$$\nabla' \left(\mathbf{P}(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \mathbf{P}(\mathbf{r}') + \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.23)$$

können wir das Potential durch die Polarisation ausdrücken als

$$\begin{aligned}\Phi_P(\mathbf{r}) &= \int_V d^3r' \nabla' \left(\mathbf{P}(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \int_V d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \mathbf{P}(\mathbf{r}') \\ &= \iint_{\partial V} \mathbf{P}(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \mathbf{n}' dS' + \int \frac{[-\nabla' \mathbf{P}(\mathbf{r}')]_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \\ &\equiv \Phi_{\sigma_P} + \Phi_{\rho_P}.\end{aligned}\quad (3.24)$$

Der erste Term hängt nur von der Polarisation auf der Oberfläche, d.h. von der induzierten Flächenladungsdichte, ab und wir können allgemein schreiben

$$\Phi_{\sigma_P} = \iint_{\partial V} \frac{\sigma_P(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'. \quad (3.25)$$

Der zweite Term hängt nur von der induzierten Ladungsdichte im Volumen ab, also allgemein

$$\Phi_{\rho_P} = \int_V \frac{\rho_P(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'. \quad (3.26)$$

Also identifizieren wir auf dem Rand ∂V

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = \sigma_P(\mathbf{r}), \quad (3.27)$$

d.h. die Normalen-Komponente der Polarisation (\mathbf{n} zeigt nach außen) entspricht der auf der Oberfläche induzierten Flächenladungsdichte. Genauso gilt innerhalb des Volumens V

$$\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) = -\rho_P(\mathbf{r}), \quad (3.28)$$

d.h. die Quellen der Polarisation sind die induzierten Raumladungsdichten. Die gesamte induzierte Polarisationsladung muss verschwinden – es werden ja durch die Polarisation nur Ladungen verschoben.

$$0 = Q_p = \int_V \rho_P(\mathbf{r}) d^3r = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) d^3r = - \iint_{\partial V} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.29)$$

Beim Verhalten des elektrischen Feldes an Oberflächen fanden wir, dass dessen Normalenkomponente einen Sprung macht $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_a - \mathbf{E}_i) = 4\pi\sigma$, vgl. Abschnitt 1.10. Die gleiche Rechnung mit dem Gaußschen Kästchen führt jetzt auf

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{P}_a - \mathbf{P}_i) = -\sigma. \quad (3.30)$$

Betrachtet man als Grenzfläche eine zwischen Vakuum und Medium, folgt $\mathbf{P}_a = 0$ und $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}$ (Polarisation des Mediums) und somit wieder $\sigma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}$ wie bereits gezeigt am Beispiel des Quaders.

Polarisationsladungsdichten können jedoch immer dann auftreten wenn $\nabla \cdot \mathbf{P} \neq 0$ ist, das hängt von den mikroskopischen Details ab. Wir haben auch immer noch nicht spezifiziert, wie die Polarisation eines Mediums vom elektrischen Feld abhängt, auch dies hängt von den Details ab. Wenn im Material keine permanente elektrische Polarisierung vorliegt, verschwindet jedoch in Abwesenheit eines Feldes auch die Polarisation. Für diese Materialien (ohne permanente Polarisation) kann man eine Taylor-Reihe im elektrischen Feld ansetzen

$$P_i = \sum_j a_{ij} E_j + \sum_{j,k} b_{ijk} E_j E_k + \dots \quad (3.31)$$

Für genügend kleine Feldstärken reicht es aus, nur die linearen Terme a_{ij} zu berücksichtigen. Weiterhin richten sich Dipole in der Regel mit dem elektrischen Feld aus. Empirisch findet man daher sogar, dass die Polarisation für die meisten Materialien proportional zum elektrischen Feld ist

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}. \quad (3.32)$$

Die Proportionalitätskonstante χ_e ist die **elektrische Suszeptibilität** des Mediums. Damit erhält man für die Beziehung zwischen elektrischem Feld und dielektrischer Verschiebung

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} = (1 + 4\pi \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}. \quad (3.33)$$

Die neue Konstante $\epsilon = 1 + 4\pi \chi_e$ ist die **Dielektrizitätskonstante**. Dementsprechend kann man in den Maxwellgleichungen für isotrope und homogene Medien und genügend kleine Feldstärken das elektrische Feld wieder eliminieren

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (3.34)$$

In Gauss-Einheiten ist die Dielektrizitätskonstante also einheitenlos. In SI-Einheiten geht das ganz analog, man definiert $\mathbf{D}_{\text{SI}} = \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{SI}} + \mathbf{P}_{\text{SI}} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E}_{\text{SI}} = \epsilon_{\text{SI}} \mathbf{E}_{\text{SI}}$ mit $\epsilon_{\text{SI}} = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$, was letztlich auf $\nabla \cdot \mathbf{E}_{\text{SI}} = \rho / \epsilon_{\text{SI}}$ führt.

3.4 Elektrostatische Feldenergie

Wir hatten für die Energie einer Ladungsverteilung im Vakuum (1.72) $W = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) d^3r$. Hierbei war $\Phi(\mathbf{r})$ das Feld welches durch die Ladungsverteilung aufgebaut wurde, und das Resultat wurde abgeleitet durch das sukzessive Heranführen von Punktladungen aus dem Unendlichen, was letztlich im Faktor 1/2 resultierte. Dieses Argument können wir aber nicht einfach auf Dielektrika anwenden: Wenn wir eine Punktladung in ein Dielektrikum einführen, müssen wir nicht nur gegen das elektrische Feld arbeiten, sondern auch die Polarisation des umgebenden Mediums ändern, es gibt hier also einen weiteren Beitrag zur Feldenergie. Im Gegensatz dazu hat die Ladung $\delta\rho d^3r$ im Potential $\Phi(\mathbf{r})$, welches von den anderen Ladungen generiert wurde, die Energie $\Phi(\mathbf{r}) \delta\rho(\mathbf{r}) d^3r$.

Ohne Annahmen über die Art und Weise des Dielektrikums wäre die Arbeit, welche zu verrichten wäre für eine kleine Änderung $\delta\rho$ der Ladungsdichte gegeben durch

$$\delta W = \int \Phi(\mathbf{r}) \delta\rho(\mathbf{r}) d^3r. \quad (3.35)$$

Hier ist $\Phi(\mathbf{r})$ das Potential der bereits vorhandenen Ladungsdichte, diese Formel ist identisch z.B. mit (2.122). Nach der Maxwell-Gleichung im Medium $\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$ können wir ableiten

$$\delta\rho = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot (\delta\mathbf{D}). \quad (3.36)$$

Damit gilt für

$$\Phi\delta\rho = \Phi \frac{1}{4\pi} \nabla \delta\mathbf{D} = \frac{1}{4\pi} \nabla(\Phi\delta\mathbf{D}) - \frac{1}{4\pi} (\nabla\Phi) \cdot \delta\mathbf{D}. \quad (3.37)$$

Das setzen wir ein in die Änderung der Energie

$$\begin{aligned} \delta W &= \frac{1}{4\pi} \int \nabla(\Phi\delta\mathbf{D}) d^3r + \int \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D} d^3r \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint (\Phi\delta\mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D} d^3r. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Das Oberflächenintegral verschwindet jedoch für die Randbedingung $\Phi(\infty) = 0$ und $\delta\mathbf{D}(\infty) = \mathbf{0}$. Das bedeutet, dass wir zum Aufbau der Änderung $\delta\rho$ die Arbeit

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D} d^3r \quad (3.39)$$

aufbringen müssen. Die gesamte Arbeit ergibt sich durch formales Aufintegrieren

$$W = \frac{1}{4\pi} \int d^3r \int_0^D \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D}. \quad (3.40)$$

Für ein lineares Medium haben wir $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, und es ergibt sich die Variation

$$\frac{1}{2} \delta(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) = \frac{1}{2} (\delta\mathbf{E}) \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot (\delta\mathbf{D}) = \epsilon \mathbf{E} \cdot (\delta\mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D}. \quad (3.41)$$

Einsetzen liefert letztlich

$$W = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \int_0^D \delta(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}, \quad (3.42)$$

so dass wir für die **elektrostatische Feldenergiedichte im Medium** den Ausdruck

$$\omega = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad (3.43)$$

erhalten. Dieser Ausdruck gilt nur für lineare und isotrope Medien.

Kapitel 4

Magnetostatik

In der Elektrostatik hatten wir sämtliche Zeitableitungen vernachlässigt und auch den Stromdichtevektor Null sowie die Magnetfelder auf Null gesetzt. In der Elektrodynamik ist jedoch auch ein anderer Spezialfall wichtig, bei dem es zu endlichen Strömen und Feldern kommen kann, welche sich jedoch zeitlich nicht ändern. In der Elektrostatik wurde das elektrische Feld durch ruhende Punktladungen erzeugt. In der Magnetostatik wird die magnetische Induktion \mathbf{B} durch zeitunabhängige Ströme generiert. Trotz dieser Analogien gibt es jedoch einen sehr bedeutsamen Unterschied: Es existiert kein magnetischer Monopol analog z.B. zur Elementarladung e , zumindest weist kein experimenteller Befund darauf hin. Somit ist die Grundeinheit der Magnetostatik auch keine Elementarladung, sondern der magnetische Dipol \mathbf{m} .

4.1 Einführung und Definitionen

Um die Gesetze der Magnetostatik später besser verstehen zu können, präzisieren wir zunächst die grundlegenden Definitionen der Stromstärke, der Stromdichte und führen dann in Analogie zum Konzept der Punktladung das Konzept des Stromfadens ein.

Ein elektrischer Strom kann als Bewegung von elektrischen Ladungen z.B. in einem Leiter aufgefasst werden, vgl. Abb. 4.1. Wenn die mittlere Dichte an Ladungsträgern $n = N/V$ zeitlich wie räumlich konstant ist, die Ladung eines Teilchens durch q gegeben ist und F die Querschnittsfläche des Leiters darstellt, gilt für die Ladung, welche während dt durch den Leiterquerschnitt fließt, die Beziehung

$$dQ = nq dV = nqF dz = nqFv dt. \quad (4.1)$$

Die Stromstärke ist definiert durch

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (4.2)$$

Einsetzen liefert für dieses Beispiel

$$I = nFvq. \quad (4.3)$$

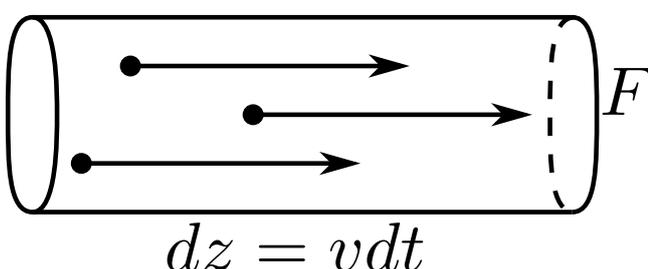
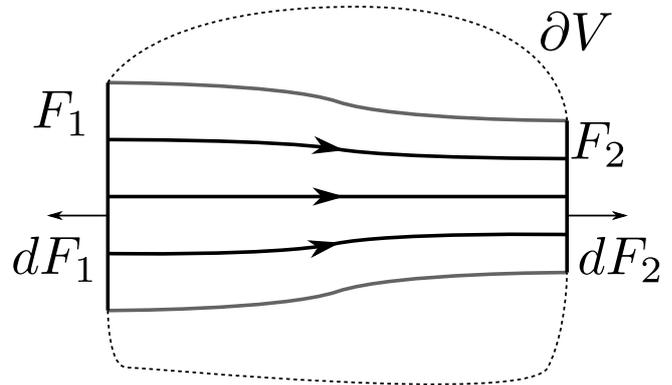


Abbildung 4.1: Visualisierung der Bewegung von Ladungsträgern in einem Leiter. Bei mittlerer Geschwindigkeit v legen diese in der Zeit dt im Mittel den Weg dz zurück.

Abbildung 4.2: Abbildung eines Leiters mit zwei Oberflächen endlicher Stromdichte (schwarz). Wegen $\nabla \mathbf{j} = 0$ gilt, dass durch jede Fläche betragsmäßig der gleiche Strom fließt.



Sie ist proportional zur (mittleren) Geschwindigkeit, zur Querschnittsfläche und zur Ladungsträgerdichte n sowie der Ladung q pro Ladungsträger. Die Stromdichte ist ein Vektor, welcher in Bewegungsrichtung \mathbf{v} der Ladung zeigt und dessen Betrag gerade der pro Zeiteinheit und pro Flächeneinheit senkrecht zur Bewegungsrichtung transportierten Ladung entspricht, also im abgebildeten Beispiel gerade

$$|\mathbf{j}| = \frac{I}{F} = nqv. \quad (4.4)$$

Jetzt ist aber nq im Grenzfall sehr kleiner Volumina gerade die Ladungsdichte, wir erhalten also bei gegebenem Skalarfeld der Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ und Vektorfeld der mittleren Geschwindigkeiten $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ die allgemeine Definition des Vektorfeldes der **Stromdichte**

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t). \quad (4.5)$$

Die **Stromstärke** lässt sich dann aus dem Integral über die Stromdichte konstruieren

$$I = \iint_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{F}. \quad (4.6)$$

Hierbei ist F eine fest vorgegebene Fläche, und das Skalarprodukt projiziert nur die Anteile senkrecht zur Fläche heraus.

Es gelten für stationäre Ströme einige einfache Gesetze, die wir kurz ableiten wollen. Speziell gilt immer aufgrund der Definitionen oben die Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial Q_V}{\partial t} + I_{\partial V} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3r + \oiint_{\partial V} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} \right] d^3r, \\ 0 &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

In der Magnetostatik ist die Ladungsdichte aber zeitlich konstant

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (4.8)$$

so dass folgt, dass im Rahmen der Magnetostatik die Stromdichte divergenzfrei ist

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (4.9)$$

Wendet man dies z.B. auf Leiter mit wechselnden Querschnitten und zwei Kontakten an, so folgt, dass durch jeden Querschnitt der gleiche Strom fließen muss, vgl. Abb. 4.2. Dies folgt aus

$$0 = \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} d^3r = \oiint_{\partial V} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{F} = \iint_{F_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{F} + \iint_{F_2} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{F} = I_1 - I_2. \quad (4.10)$$

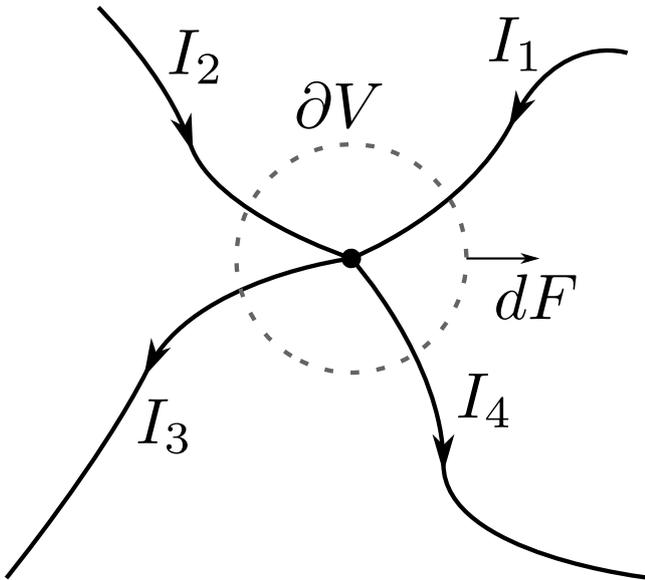


Abbildung 4.3: Darstellung der Ströme an einem Leiterknoten. Da die Ladung auf dem Knoten sich im stationären Fall nicht ändern darf, müssen die Beiträge der Ströme sich wegheben.

Das Vorzeichen resultiert hier aus der Konvention, dass der Normalenvektor des Volumens nach außen zeigen soll. Mit dem gleichen Argument folgt für Leiterknoten mit mehreren Kontakten die **Kirchhoffsche Knotenregel**, dass die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme ist, vgl. Abb. 4.3. Formal folgt dies wieder aus dem Gaußschen Satz

$$0 = \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} d^3r = \oint_{\partial V} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{F} = \sum_i \iint_{F_i} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{F} = I_3 + I_4 - I_1 - I_2. \quad (4.11)$$

Wir geben weiterhin als rein empirisches Gesetz das **Ohmsche Gesetz** an

$$U = RI. \quad (4.12)$$

Die Konstante R heißt **elektrischer Widerstand** (auch Ohmscher Widerstand) und hat die Einheit $V/A = \Omega$. Dieses Ohmsche Gesetz ist kein physikalisches Naturgesetz, es wird von vielen Systemen nicht erfüllt (oft ist die Beziehung zwischen U und I z.B. nicht linear). Weiterhin hängt der Widerstand auch von geometrischen Größen ab und ist somit keine Materialkonstante.

Wir hatten in der Elektrostatik oft mit Punktladungen gerechnet. Das Analogon für Ströme ist der sog. **Stromfaden**, worunter man einen linienförmigen Strom I längs einer Kontur C versteht. Anschaulich wäre ein Stromfaden gegeben durch einen extrem dünnen stromdurchflossenen Draht, welcher längs der Kontur C gelegt ist. Für die Berechnung von Größen mit Hilfe dieses Konzeptes ist es hilfreich, die Differentiale von Kontur-, Flächen- und Volumenintegralen mit dem Tangenteneinheitsvektor \mathbf{e}_t entlang einer vorgegebenen Kontur auszudrücken, vgl. Abb. 4.4. Wenn man die Kontur C nach der Bogenlänge s mittels $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ parametrisiert und den Tangenteneinheitsvektor an jedem Punkt der Kurve mit \mathbf{e}_t bezeichnet, gilt für Linien-, Flächen- und Volumenelement

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_t ds, \quad d\mathbf{F} = \mathbf{e}_t dF, \quad d^3r = d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dF ds. \quad (4.13)$$

Für die Ströme gilt dann

$$\mathbf{j} = j\mathbf{e}_t, \quad I = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{F} = jdF. \quad (4.14)$$

Daraus folgt dann, dass man das Volumenintegral der Stromdichte auch als Konturintegral entlang von Stromfäden verstehen kann

$$\mathbf{j} d^3r = j\mathbf{e}_t df ds = jdf d\mathbf{r} = I d\mathbf{r}. \quad (4.15)$$

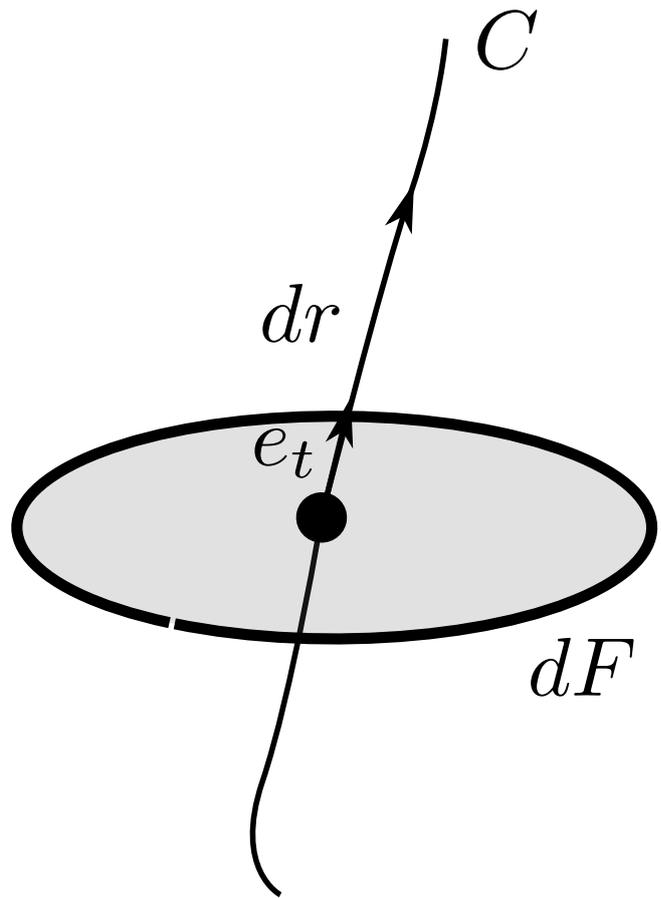


Abbildung 4.4: Visualisierung eines Stromfadens entlang einer Kontur C mit Linienelement $d\mathbf{r}$, Flächenelement $d\mathbf{F}$ und Tangenteneinheitsvektor \mathbf{e}_t .

Analog wie wir von kontinuierlichen Ladungsverteilungen zu Punktladungen übergegangen sind, geht dies mit dem Konzept des Stromfadens formal durch die Substitution

$$\mathbf{j}d^3r \rightarrow I d\mathbf{r}. \quad (4.16)$$

Um die elektrische Leistung abzuleiten, betrachten wir die Arbeit, welche aufzuwenden ist um eine Punktladung q um die Strecke $d\mathbf{r}$ zu verschieben

$$dW = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (4.17)$$

Geschieht die Ladungsverschiebung innerhalb der Zeit dt , erhalten wir daraus die nötige elektrische Leistung

$$\frac{dW}{dt} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}). \quad (4.18)$$

Um dies für allgemeine Ladungsverteilungen zu erhalten, substituieren wir $q \rightarrow \rho(\mathbf{r})d^3r$

$$dP = \rho(\mathbf{r})d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r})d^3r \quad (4.19)$$

bzw. die gesamte vom Feld \mathbf{E} im Volumen V bewirkte Leistung beträgt

$$P = \int_V \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r})d^3r. \quad (4.20)$$

Für einen einzelnen Stromfaden entlang der Kontur C können wir weiter vereinfachen

$$P \rightarrow I \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = IU, \quad (4.21)$$

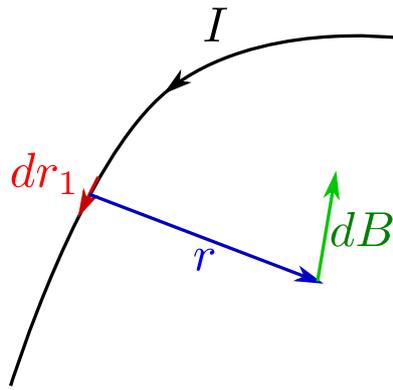


Abbildung 4.5: Illustration des Gesetzes von Biot-Savart: Ein Längenelement $d\mathbf{r}_1$ eines Stromfadens mit Stromstärke I erzeugt am Orte \mathbf{r} ein Magnetfeld der Stärke $d\mathbf{B}$.

wobei U die Spannung zwischen Anfangs- und Endpunkten der Kontur darstellt (formal hätten wir das auch aus $\mathbf{j} = j\mathbf{e}_z = I\delta(x)\delta(y)\mathbf{e}_z$ ableiten können). Die Dimension der Leistung ist also $[P] = VA = W = J/s$. Falls man zusätzlich einen Ohmschen Leiter hat $U = RI$ erhält man

$$P \rightarrow RI^2 = \frac{U^2}{R}. \quad (4.22)$$

Diese Leistung wird benötigt um die Ladungen durch das Medium zu transportieren, mikroskopisch gesehen werden die Elementarladungen beschleunigt, kollidieren mit den Atomrümpfen, werden wieder beschleunigt etc. Die aufgewendete Arbeit bei der Beschleunigung der Elektronen wird dabei in ungeordnete Bewegung der Atomrümpfe umgewandelt und somit als Wärme in die Umgebung dissipiert. Daher nennt man die Leistung $P = RI^2$ für einen Ohmschen Leiter auch **Verlustleistung**.

Man kann das Ohmsche Gesetz auch lokal formulieren. Statt $I = \frac{U}{R}$ schreibt man dann

$$\mathbf{j} = \sigma_c(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho_c(\mathbf{r})}\mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (4.23)$$

Der Koeffizient $\sigma_c(\mathbf{r})$ ist die **elektrische Leitfähigkeit** und sein Inverses $\rho_c(\mathbf{r}) = 1/\sigma_c(\mathbf{r})$ heißt **spezifischer elektrischer Widerstand**.

4.2 Das Gesetz von Biot und Savart

Stromdurchflossene Drähte haben eine ablenkende Wirkung auf magnetische Dipole wie z.B. Kompaßnadeln. Dies wurde bereits 1802 von Romagnosi und 1819 von Oersted beobachtet. Biot und Savart haben dann ab 1820 die Zusammenhänge zwischen dem Strom I durch den Draht, der magnetischen Induktion \mathbf{B} und der resultierenden Kraft abgeleitet.

Speziell lässt sich das **Gesetz von Biot und Savart** in lokaler Form gut für einen Stromfaden formulieren: Ein Längenelement $d\mathbf{r}_1$ eines Stromfadens mit Stromstärke I erzeugt am Ort \mathbf{r} entfernt die magnetische Induktion

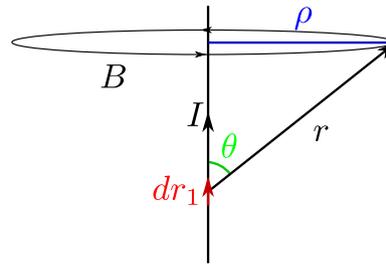
$$d\mathbf{B} = kI \frac{d\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}. \quad (4.24)$$

Hierbei ist \mathbf{r} der Verbindungsvektor vom Längenelement zum Beobachtungspunkt, vgl. Abb. 4.5. Die Konstante k hängt hierbei vom Einheitensystem ab, in Gauß-Einheiten gilt

$$k = \frac{1}{c}. \quad (4.25)$$

In SI-Einheiten erhält man $k_{\text{SI}} = \frac{\mu_0}{4\pi}$ mit der magnetischen Feldkonstanten $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{N/A}^2$. Dieses Gesetz ist mit dem invers quadratischen Abfall ähnlich zur Coulomb-Kraft, jedoch durch seinen Vektorcharakter deutlich komplizierter.

Abbildung 4.6: Berechnung der magnetischen Induktion am Ort \mathbf{r} für einen unendlich langen Stromfaden.



Es wurde auch in dieser Form nicht von Biot und Savart abgeleitet. Stattdessen betrachten sie einen unendlich langen geraden Stromfaden, was wir als Beispiel nutzen. Das gesamte Magnetfeld erhält man aus dem Integral über die Beiträge der lokalen Linienelemente

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}. \quad (4.26)$$

Auswertung des Kreuzproduktes liefert, dass die resultierende magnetische Induktion senkrecht zu \mathbf{e}_z und \mathbf{e}_ρ stehen muss, also in \mathbf{e}_ϕ -Richtung zeigen muss. Der Betrag berechnet sich aus

$$|d\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}| = dr_1 r \sin \theta, \quad (4.27)$$

wobei θ der Winkel zwischen \mathbf{r} und $d\mathbf{r}_1$ ist, vgl. Abb. 4.6. Bezeichnen wir mit $\rho = r \sin \theta$ den konstanten (minimalen) Abstand des Beobachtungspunktes vom Draht und benutzen wir $r^2 = r_1^2 + \rho^2$, ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{I}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r \sin \theta}{r^3} dr_1 \mathbf{e}_\phi = \frac{I\rho}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[r_1^2 + \rho^2]^{3/2}} dr_1 \mathbf{e}_\phi = \frac{I}{c\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cosh(u) du}{[\sinh^2(u) + 1]^{3/2}} \mathbf{e}_\phi \\ &= \frac{I}{c\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\cosh^2(u)} \mathbf{e}_\phi = \frac{I}{c\rho} [\tanh(u)]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2I}{c\rho} \mathbf{e}_\phi, \end{aligned} \quad (4.28)$$

wobei wir die Substitution $r_1 = \rho \sinh(u)$ genutzt haben. Dies ist die eigentliche Urform des Gesetzes von Biot und Savart: Ein unendlich langer Draht wird vom Magnetfeld ringförmig umgeben, dessen Betrag invers mit dem Abstand abfällt.

4.3 Kräfte zwischen Leitern

Um 1822 untersuchte Ampere, inspiriert durch die Beobachtungen Oersteds, die Kräfte zwischen zwei Leiterschleifen. Er fand empirisch, dass ein Magnetfeld eine Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter ausübt. Formuliert man diese Kraft für einen Leiter der Länge $d\mathbf{r}_1$ mit Strom I_1 und externem Magnetfeld \mathbf{B} , erhält man ein **erstes Amperesches Gesetz** in lokaler Form

$$d\mathbf{F} = \frac{I_1}{c} d\mathbf{r}_1 \times \mathbf{B}. \quad (4.29)$$

Nimmt man an, dass das Magnetfeld \mathbf{B} am Ort \mathbf{r}_1 durch eine 2. geschlossene Leiterschleife erzeugt wird und dass der 1. Leiter auch eine geschlossene Schleife ist, erhält man die Kraft zwischen zwei geschlossenen Stromkreisen, auch als **Amperesches Kraftgesetz** bekannt

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{I_1}{c} \oint_{C_1} d\mathbf{r}_1 \times \left(\frac{I_2}{c} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{r}_2 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \right) = \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{r}_1 \times (d\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r})}{|\mathbf{r}|^3}, \quad (4.30)$$

mit $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, vgl. Abb. 4.7. Hierbei haben wir einfach das Gesetz von Biot-Savart benutzt und eingesetzt, und die berechnete Kraft ist die von Leiter 2 auf Leiter 1 ausgeübte. Das doppelte

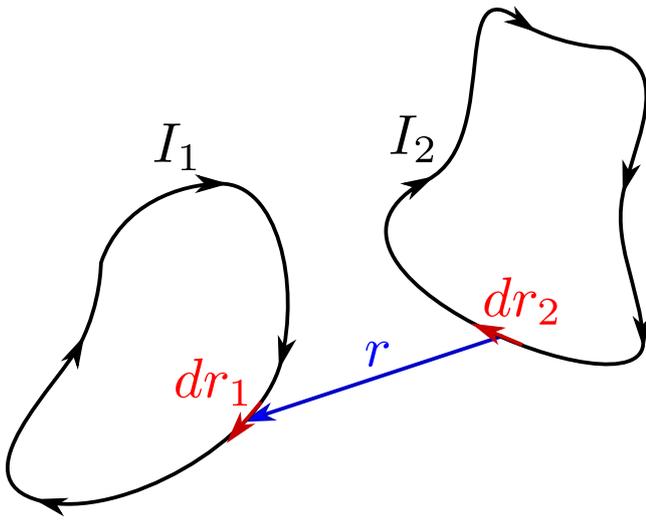


Abbildung 4.7: Die Kraft zwischen zwei beliebig geformten Leitern 1 und 2 ist gegeben durch (4.33).

Kreuzprodukt können wir noch etwas vereinfachen

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \\ \mathbf{dr}_1 \times (\mathbf{dr}_2 \times \mathbf{r}) &= \mathbf{dr}_1(\mathbf{dr}_2 \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{dr}_1 \cdot \mathbf{dr}_2). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Der unsymmetrische Beitrag unter $1 \leftrightarrow 2$ verschwindet unter dem Konturintegral

$$\oint_{C_2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{dr}_2 = - \oint_{C_2} \left(\nabla \frac{1}{|\mathbf{r}|} \right) \cdot \mathbf{dr}_2 = - \iint_{A(C_2)} \nabla \times \left(\nabla \frac{1}{|\mathbf{r}|} \right) \mathbf{dA} = 0. \quad (4.32)$$

Damit verbleibt für die resultierende Kraft einfach nur

$$\mathbf{F}_{12} = - \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \mathbf{dr}_1 \cdot \mathbf{dr}_2. \quad (4.33)$$

Diese Form ist deutlich leichter auszuwerten, außerdem erkennt man auch, dass $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ gilt (3. Newtonsches Axiom, vgl. VL Mechanik).

Stellen wir uns eine allgemeine Stromdichte als durch viele Stromfäden zusammengesetzt vor, können wir die Stromfaden-Substitution $I \mathbf{dr} \rightarrow \mathbf{j} d^3r$ nutzen und erhalten aus (4.29) die allgemeine Kraft auf einen Leiter mit der Stromdichteverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ im Volumen V durch das äußere Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) d^3r. \quad (4.34)$$

Speziell erhält man für eine Punktladung

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = q \mathbf{v}(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (4.35)$$

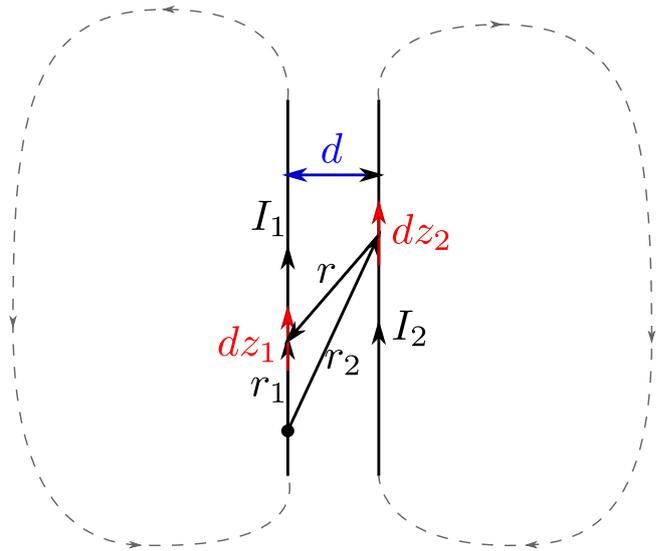
Einsetzen führt damit auf den magnetischen Anteil der **Lorentz-Kraft**

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c} \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_0). \quad (4.36)$$

Ein Drehmoment könnte man ganz analog ausrechnen. Hierbei muss nur berücksichtigt werden, dass bei ausgedehnten Stromverteilungen die lokale Form des Kraftgesetzes benutzt werden muss. Das gesamte Drehmoment auf eine Stromverteilung \mathbf{j} im externen Feld wird dann

$$\mathbf{N} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{dF} = \frac{1}{c} \int \mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) d^3r. \quad (4.37)$$

Abbildung 4.8: Zwei stromdurchflossene parallele Drähte entlang der z -Achse, von denen der linke durch den Ursprung geht und der rechte um $d\mathbf{e}_x$ versetzt ist, üben eine Kraft aufeinander aus. Zur Anwendung von (4.33) schließt man die Stromkreise im Unendlichen und vernachlässigt die Beiträge äußeren Schleifen.



Ein weiteres wichtiges Anwendungsbeispiel ist die Kraft zwischen zwei unendlich langen parallelen Stromfäden, vgl. Abb. 4.8. Um sie zu berechnen, stellen wir uns vor, dass die Leiter im Unendlichen geschlossen werden und zwar so, dass die äußeren Leiterschleifen zu weit voneinander entfernt sind um sich zu beeinflussen. Die Kraft, welche der gesamte 2. Stromfaden auf ein Stück der Länge dz_1 des ersten Stromfadens am Orte \mathbf{r}_1 ausübt, berechnet sich zu

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_{12} &= -\frac{I_1 I_2}{c^2} dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dz_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} = -\frac{I_1 I_2}{c^2} dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dz_2 \frac{-d\mathbf{e}_x - (z_2 - z_1)\mathbf{e}_z}{[d^2 + (z_2 - z_1)^2]^{3/2}} \\ &= d\frac{I_1 I_2}{c^2} dz_1 \mathbf{e}_x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz_2}{[d^2 + z_2^2]^{3/2}} = d\frac{I_1 I_2}{c^2} dz_1 \mathbf{e}_x \left[\frac{z_2}{d^2 [d^2 + z_2^2]^{1/2}} \right]_{z_2=-\infty}^{z_2=+\infty} \\ &= \frac{2I_1 I_2}{c^2 d} dz_1 \mathbf{e}_x. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Die Kraft pro Länge, welche von C_2 auf C_1 ausgeübt wird

$$\mathbf{f}_{12} = \frac{2I_1 I_2}{c^2 d} \mathbf{e}_x \quad (4.39)$$

wirkt also anziehend, wenn die Ströme gleich gerichtet sind, und abstoßend, wenn die Ströme verschiedenes Vorzeichen haben. Man kann dies experimentell sehr leicht überprüfen, indem man testet in welche Richtung sich die Drähte verformen sobald ein Strom eingeschaltet wird.

4.4 Maxwell-Gleichungen der Magnetostatik

Um die lokale Form des Biot-Savart Gesetzes (4.24)

$$d\mathbf{B} = \frac{I}{c} \frac{d\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (4.40)$$

auch für allgemeine Stromdichten aufschreiben zu können, platzieren wir den Stromfaden $d\mathbf{r}_1$ bei \mathbf{r}' und den Beobachtungspunkt bei \mathbf{r} . Der Vektor vom Längenelement des Stromfadens zum Beobachtungspunkt ist dann $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, so dass sich nach Integration und Substitution (4.16) das **Gesetz von Biot-Savart** in integraler Form

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{B} = \frac{1}{c} \int d^3 r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (4.41)$$

für das gesamte Magnetfeld am Beobachtungspunkt ergibt. Dieser Ausdruck ist analog zum elektrischen Feld (1.13), welches durch eine Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}')$ generiert wird

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r'. \quad (4.42)$$

Wir können das Magnetfeld etwas umschreiben

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \left(-\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{1}{c} \int d^3r' \left(+\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') \\ &= \nabla \times \left(\frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \right). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Damit ist die magnetische Induktion ein Rotationsfeld, und wir können folgern

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.44)$$

In Worten bedeutet dies, dass es keine Quellen des magnetischen Feldes, d.h. keine isolierten magnetischen Monopole gibt. In integraler Form lautet das Gesetz entsprechend für beliebige Volumina V

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F} = 0. \quad (4.45)$$

Aus Vergleich mit (5) sehen wir auch, dass diese Maxwell-Gleichung über die Magnetostatik hinaus gilt.

Wir berechnen weiter die Rotation der magnetischen Induktion unter Ausnutzung von $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$ und der 3d-Darstellung (1.48) der δ -Funktion $\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \nabla \times \left(\nabla \times \left(\frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \right) \right) \\ &= \frac{1}{c} \int \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3r' - \frac{1}{c} \int \Delta \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \\ &= -\frac{\nabla}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \\ &= +\frac{\nabla}{c} \int \frac{\nabla' \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' - \frac{\nabla}{c} \int \nabla' \left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3r' + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \\ &= +\frac{\nabla}{c} \int \frac{\nabla' \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' - \frac{\nabla}{c} \oiint_{\partial V} \left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \cdot d\mathbf{F}' + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Hier verschwinden Terme, da wir in der Magnetostatik $\nabla \mathbf{j} = 0$ angenommen haben und ein Oberflächenintegral wieder ins Unendliche gelegt haben, wo der Stromdichtevektor verschwindet. Also verbleibt ein **zweites Amperesches Gesetz** in lokaler Form

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}), \quad (4.47)$$

welches für $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ und $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ aus den Maxwell-Gleichungen (5) hervorgeht. Durch Integrieren erhalten wir

$$\iint (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{F} = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} \iint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{F} = \frac{4\pi}{c} I. \quad (4.48)$$

Damit lautet das zweite Amperesche Gesetz in integraler Form

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} I, \quad (4.49)$$

d.h. das Konturintegral der magnetischen Induktion entlang einer Kontur C ist proportional zum Strom der durch die Kontur berandeten Fläche.

Zusammenfassend erhalten wir für die **Grundgleichungen der Magnetostatik** in lokaler Form

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (4.50)$$

4.5 Das Vektorpotential

Wir hatten in Abschnitt 1.7 die Komplexität der Grundgleichungen der Elektrostatik reduzieren können indem wir das elektrische Feld als Gradienten eines Potentials $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ geschrieben haben. So etwas versuchen wir jetzt auch. Die erste der Grundgleichungen (4.50) ist sofort erfüllt, wenn wir die magnetische Induktion als Rotation eines Vektorfeldes, des **Vektorpotentials** \mathbf{A} schreiben

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (4.51)$$

denn die Divergenz von Rotationsfeldern verschwindet. Jedoch ist das neu eingeführte Feld, das Vektorpotential, nicht eindeutig bestimmt. Wir können einen Gradienten einer beliebigen skalaren Funktion hinzuaddieren

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\phi, \quad (4.52)$$

ohne dass sich etwas an den Gleichungen ändert. In der Elektrostatik ging es nur um eine Konstante, hier haben wir die Freiheit einer ganzen skalaren Funktion. Diese Freiheit bei der Wahl der Hilfsgröße nennt man **Eichfreiheit**.

Für magnetostatische Probleme ist die sogenannte **Coulomb-Eichung** zweckmäßig. Hierbei fordern wir, dass

$$\nabla \mathbf{A} = 0 \quad (4.53)$$

gilt, bzw. wir wählen das skalare Feld ϕ entsprechend. Mit dieser Wahl erhalten wir für die Rotation der magnetischen Induktion

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A}. \quad (4.54)$$

Damit muss das Vektorpotential die Gleichung

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (4.55)$$

erfüllen. Die einzelnen Komponenten des Vektorpotentials müssen also gerade die Poisson-Gleichung (1.61) der Elektrostatik erfüllen

$$\Delta A_i = -\frac{4\pi}{c} j_i \quad : \quad i \in \{x, y, z\}. \quad (4.56)$$

Daher können wir für das Vektorpotential in Coulomb-Eichung und ohne weitere Randbedingungen die Lösung sofort hinschreiben

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'. \quad (4.57)$$

Damit gilt dann für die magnetische Induktion

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left(\frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \right). \quad (4.58)$$

Das ist mit Gleichung (4.43) konsistent.

4.6 Beispiel: Magnetfeld einer Stromschleife

Als einfaches Beispiel betrachten wir eine geschlossene kreisförmige Stromschleife mit Radius R in der xy -Ebene. Es bieten sich also Zylinderkoordinaten mit den Einheitsvektoren

$$\mathbf{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

an. Mit dieser Wahl erfüllen die Einheitsvektoren

$$\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_\rho, \quad \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_\rho = -\mathbf{e}_z. \quad (4.60)$$

In Zylinderkoordinaten ist die Stromdichte dann gegeben durch

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') = I \delta(z') \delta(\rho' - R) \mathbf{e}'_\phi. \quad (4.61)$$

Der Vorfaktor bestimmt sich aus der Tatsache, dass das Flächenintegral über die Stromdichte über den Leiterquerschnitt gerade die Stromstärke I ergeben soll, es handelt sich also um eine zweidimensionale Darstellung der δ -Funktion.

Das Magnetfeld wird dann allgemein gegeben durch

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r'. \quad (4.62)$$

Der Einfachheit halber betrachten wir nur das Magnetfeld entlang der z -Achse, also

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(z\mathbf{e}_z) &= \frac{I}{c} \int_0^\infty \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \delta(\rho' - R) \delta(z') \frac{\mathbf{e}'_\phi \times [(z - z')\mathbf{e}'_z - \rho'\mathbf{e}'_\rho]}{[(z - z')^2 + (\rho')^2]^{3/2}} \\ &= \frac{I}{c} \int_0^\infty \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \delta(\rho' - R) \delta(z') \frac{(z - z')\mathbf{e}'_\rho + \rho'\mathbf{e}'_z}{[(z - z')^2 + (\rho')^2]^{3/2}} \\ &= \frac{2\pi I}{c} \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{z\mathbf{e}'_\rho + R\mathbf{e}_z}{[z^2 + R^2]^{3/2}} \mathbf{e}_z \\ &= \frac{2\pi I}{c} \frac{R^2}{[z^2 + R^2]^{3/2}} \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Es zeigt also nur in Richtung der z -Achse und ist maximal innerhalb der Leiterschleife. Etwas einfacher wäre die Rechnung mit der Stromfaden-Substitution

$$\mathbf{B}(z\mathbf{e}_z) = \frac{I}{c} \oint_C d\mathbf{r}' \times \frac{z\mathbf{e}_z - R\mathbf{e}'_\rho}{[z^2 + R^2]^{3/2}} = \frac{I}{c} \int_0^{2\pi} \frac{R\mathbf{e}'_\phi \times (z\mathbf{e}_z - R\mathbf{e}'_\rho)}{[z^2 + R^2]^{3/2}} d\phi = \frac{2\pi I}{c} \frac{R^2}{[z^2 + R^2]^{3/2}} \mathbf{e}_z. \quad (4.64)$$

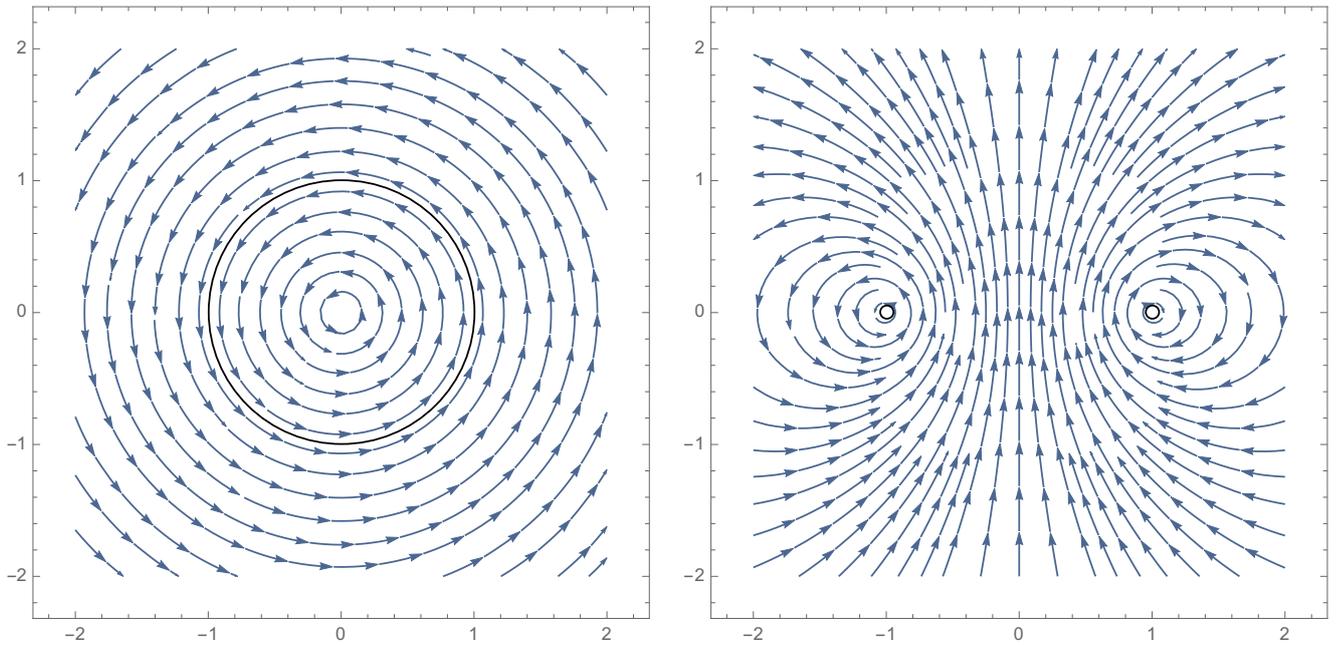


Abbildung 4.9: Links: Vektorpotential der Leiterschleife (Radius $R = 1$) bei $z = 0$. Es gibt keine Komponente in z -Richtung. Rechts: Magnetfeld der Leiterschleife in der xz -Ebene, die Leiterschleife durchstößt die Ebene bei $x = \pm 1$ und $z = 0$. Das gesamte Magnetfeld ist rotationssymmetrisch um die z -Achse. Mathematica-Kommando: StreamPlot.

Alternativ dazu hätten wir auch das Vektorpotential für eine Leiterschleife berechnen können

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(z\mathbf{e}_z + \rho\mathbf{e}_\rho) &= \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' = \frac{I}{c} \oint_C \frac{d\mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{IR}{c} \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{e}'_\phi d\phi'}{\left| \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z - R\mathbf{e}'_\rho \right|} \\ &= \frac{I}{c} \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{R\mathbf{e}'_\phi}{\sqrt{\rho^2 + R^2 + z^2 - 2\rho R(\cos\phi \cos\phi' + \sin\phi \sin\phi')}}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Dieser Ausdruck kann näherungsweise berechnet werden, z.B. ergibt sich nahe der z -Achse ($\rho \ll R$)

$$\mathbf{A} = \frac{\pi I}{c} \frac{R^2 \rho}{[R^2 + z^2]^{3/2}} \mathbf{e}_\phi + \mathcal{O}\{\rho^2\}. \quad (4.66)$$

Berechnen wir davon die Rotation (Rotation in Zylinderkoordinaten beachten), ist dies konsistent mit dem zuvor berechneten Magnetfeld entlang der z -Achse (4.63). Visualisiert man diese Vektorfelder, ergibt sich ein ringförmiges Vektorpotential in der Leiterschleifen (xy)-Ebene und ein durch den Ring der Leiterschleife laufendes Magnetfeld, vgl. Abb. 4.9.

Bei einer Spule mit N Windungen und vernachlässigbarer Länge müssen wir das Resultat (4.63) nur mit N multiplizieren. Anders sieht es aus für eine ausgedehnte Spule, welche wir z.B. aus N Leiterschleifen bei $z = nL/N$ zusammensetzen können

$$\begin{aligned} B(z\mathbf{e}_z) &= \frac{2\pi I}{c} \mathbf{e}_z \sum_{n=-N/2}^{+N/2} \frac{R^2}{(z - n\frac{L}{N})^2 + R^2)^{3/2}} \rightarrow \frac{2\pi I}{c} \mathbf{e}_z \int_{-N/2}^{+N/2} \frac{R^2}{(z - n\frac{L}{N})^2 + R^2)^{3/2}} dn \\ &= \frac{2\pi I}{c} \mathbf{e}_z \frac{N}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{R^2}{[(z - z')^2 + R^2]^{3/2}} dz' \\ &\xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{4\pi I}{c} \frac{N}{L}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Dieses bekannte Resultat ergibt sich also nur im Limes unendlich langer Spulen.

4.7 Magnetisches Moment stationärer lokalisierter Ströme

Wenn das Gebiet in welchem eine stationäre Stromverteilung vorliegt räumlich begrenzt ist, kann man analog zur Multipolentwicklung in der Elektrostatik eine Fernfeldentwicklung für das Vektorpotential einführen (in Coulomb-Eichung)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \\ &= \frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \left[\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \mathcal{O} \left\{ \frac{1}{r^3} \right\} \right] d^3 r'. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Hier haben wir nur die beiden führenden Terme behalten, welche in der Elektrostatik zum Monopol- und Dipolterm korrespondierten und wir nehmen an, dass in dem Gebiet in welchem $\mathbf{j}(\mathbf{r}') \neq 0$ ist gleichzeitig immer $r' \ll r$ gilt (Fernfeld).

Jetzt gilt für allgemeine (d.h. nicht notwendigerweise divergenzfreie) lokalisierte Vektorfelder $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ und (hinreichend gutartige) skalare Felder $f(\mathbf{r}')$ und $g(\mathbf{r}')$ die Beziehung

$$\int [f(\mathbf{r}')(\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla')g(\mathbf{r}') + g(\mathbf{r}')(\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla')f(\mathbf{r}') + f(\mathbf{r}')g(\mathbf{r}')(\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}'))] d^3 r' = 0, \quad (4.69)$$

wobei das Integral über den kompletten Raum geht. Man kann dies zeigen, indem man z.B. den 2. Term partiell integriert: Für lokalisierte Stromverteilungen verschwindet der Randterm und man erhält

$$\begin{aligned} \int g(\mathbf{j} \cdot \nabla')f &= \sum_i \int g(j_i \partial'_i) f d^3 r' = - \sum_i \int (\partial'_i g j_i) f d^3 r' \\ &= - \sum_i \int f j_i \partial'_i g d^3 r' - \sum_i \int f g \partial'_i j_i d^3 r' = - \int f(\mathbf{j} \cdot \nabla')g d^3 r' - \int f g(\nabla' \cdot \mathbf{j}) d^3 r'. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Einsetzen zeigt sofort die Relation (4.69).

Wir benutzen jetzt diese Identität, um die Fernfeld-Entwicklung des Vektorpotentials (4.68) zu vereinfachen. Der erste Term verschwindet, da komponentenweise gilt

$$\int j_i(\mathbf{r}') d^3 r' = 0. \quad (4.71)$$

Formal folgt dies sofort aus der Identität (4.69) mit $\nabla' \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$ und $f(\mathbf{r}') = 1$ und $g(\mathbf{r}') = x'_i$. Die anschauliche Bedeutung ist, dass die Ladungserhaltung erzwingt, dass die Ströme kreisförmig geschlossen sind und so sich die Komponenten umkehren müssen. Der Monopolterm verschwindet also in der Entwicklung und wir müssen nur den Dipolbeitrag betrachten. Benutzen wir wieder die Identität (4.69), diesmal jedoch mit $f(\mathbf{r}') = x'_i$, $g(\mathbf{r}') = x'_j$ und $\nabla' \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$, folgt

$$\int (x'_i j_j + x'_j j_i) d^3 r' = 0. \quad (4.72)$$

Die i -Komponente des Dipolterms ist proportional zu

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \left(\int \mathbf{r}' j_i d^3 r' \right) &= \sum_j x_j \int x'_j j_i d^3 r' = -\frac{1}{2} \sum_j x_j \int (x'_i j_j - x'_j j_i) d^3 r' \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j \int (\mathbf{r}' \times \mathbf{j})_k d^3 r' = -\frac{1}{2} \left[\mathbf{r} \times \int (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}) d^3 r' \right]_i, \end{aligned} \quad (4.73)$$

wobei wir die Summe antisymmetrisiert und die komponentenweise Definition des Kreuzproduktes eingesetzt haben. In Vektorschreibweise bedeutet dies für den Dipolterm

$$\int \mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')d^3r' = -\frac{1}{2}\mathbf{r} \times \int [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')]d^3r'. \quad (4.74)$$

Also definiert man ein **magnetisches Moment einer lokalisierten Stromverteilung** über

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')d^3r', \quad (4.75)$$

was analog zum Dipolterm in (2.116) in der Elektrostatik zu verstehen ist.

Für große Abstände verhält sich das Vektorpotential in Coulomb-Eichung somit ungefähr wie

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} + \mathcal{O}\left\{\frac{1}{r^3}\right\}, \quad (4.76)$$

und wir können über $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ das Magnetfeld im Fernfeldbereich für ein konstantes Dipolmoment berechnen

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3} \nabla \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) + \left(\nabla \frac{1}{r^3} \right) \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{r^3} ((\nabla \cdot \mathbf{r})\mathbf{m} - (\nabla \cdot \mathbf{m})\mathbf{r}) + \left(-\frac{3}{2} \frac{2\mathbf{r}}{r^5} \right) \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) = \frac{1}{r^3} (3\mathbf{m} - \mathbf{m}) - 3 \frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r})}{r^5} \\ &= \frac{2\mathbf{m}}{r^3} - 3 \frac{\mathbf{m}r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{m}r^2}{r^5}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Als einfaches Beispiel betrachten wir das magnetische Moment einer einzelnen kreisförmigen Leiterschleife. Mit $\mathbf{j}(\mathbf{r}') = I\delta(\rho' - R)\delta(z')\mathbf{e}'_\phi$ ergibt sich

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2c} \int_0^\infty \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \delta(\rho' - R)\delta(z') [\rho' \mathbf{e}'_\rho + z' \mathbf{e}'_z] \times \mathbf{e}'_\phi = \frac{I\pi}{c} R^2 \mathbf{e}_z. \quad (4.78)$$

Setzen wir dies in das Magnetfeld ein, erhalten auf der z -Achse $\mathbf{r} = z\mathbf{e}_z$ gerade die Fernfeld-Entwicklung von (4.63) für $z \gg R$. Im Nahfeldbereich gibt es jedoch Abweichungen, da wir die Ausdehnung des magnetischen Dipols vernachlässigt haben, vgl. Abb.4.10. Das Resultat für das magnetische Moment lässt sich sogar auf ebene, aber ansonsten beliebig geformte, Leiterschleifen verallgemeinern. Mit der Stromfaden-Substitution gilt für eine Leiterschleife entlang der Kontur C wegen $\frac{1}{2}\mathbf{r} \times d\mathbf{r} = d\mathbf{F}$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r})d^3r = \frac{I}{2c} \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \frac{I}{c} F_C \mathbf{n}, \quad (4.79)$$

wobei F_C die von der Kontur umschlossene Fläche ist und \mathbf{n} der Normalenvektor senkrecht zur Fläche (bestimmt durch den Drehsinn der Kontur und die rechte-Hand Regel).

Ein weiteres Beispiel wäre das magnetische Moment von einer Menge von Punktladungen gleicher Masse m und gleicher Ladung q

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = q \sum_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i), \quad (4.80)$$

wobei \mathbf{v}_i die Geschwindigkeit und \mathbf{R}_i den Ort der i -ten Punktladung beschreiben. Einsetzen liefert sofort das magnetische Moment

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2c} \sum_i (\mathbf{R}_i \times \mathbf{v}_i) = \frac{q}{2mc} \sum_i \mathbf{R}_i \times \mathbf{p}_i = \frac{q}{2mc} \sum_i \mathbf{L}_i = \frac{q}{2mc} \mathbf{L}, \quad (4.81)$$

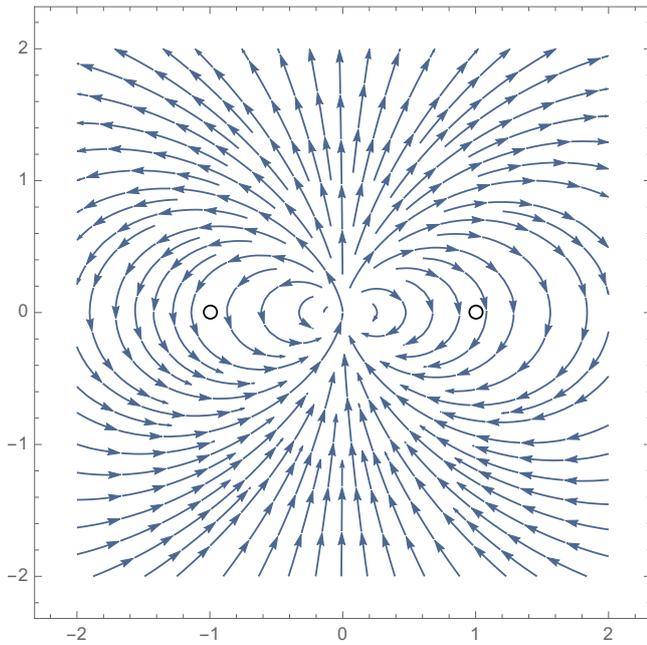


Abbildung 4.10: Magnetische Induktion eines Dipols $\mathbf{m} = \frac{I}{c}\pi R^2 \mathbf{e}_z$ in der xz -Ebene nach Gleichung (4.77). Im Nahfeldbereich gibt es deutliche Unterschiede zum Feld einer Leiterschleife, vgl. Abb. 4.9 rechts.

wobei \mathbf{L} der Gesamt-Drehimpuls der Punktladungen ist. Das magnetische Moment ist proportional zum Gesamt-Drehimpuls, und der Koeffizient heißt auch **gyromagnetisches Verhältnis**

$$G = \frac{q}{2mc}. \quad (4.82)$$

Dieses gilt für alle Bahn-Drehimpulse. In der (relativistischen) Dirac-Theorie gibt es hierzu Korrekturen, z.B. bekommt man für das Elektron ziemlich genau den doppelten Wert.

4.8 Dipol im externen Magnetfeld

Die komplette Dynamik einer Stromverteilung wird natürlich durch das Amperesche Kraftgesetz bestimmt. Jedoch ist eine vereinfachte Beschreibung mittels eines Dipolmoments häufig sinnvoll.

4.8.1 Kraft

Aus dem Ampereschen Kraftgesetz (4.29) erhalten wir die Gesamtkraft, welche eine äußere magnetische Induktion (externes Feld) auf die lokalisierte Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ ausübt

$$d\mathbf{F} = \frac{I}{c} d\mathbf{r} \times \mathbf{B} \implies \mathbf{F} = \frac{1}{c} \int [\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] d^3r. \quad (4.83)$$

Wir nehmen an, dass die Stromverteilung nur in einem begrenzten Gebiet existiert, in welchem sich wiederum das externe Feld nur wenig ändert. Die Idee ist wieder, das externe Feld um den Schwerpunkt der Stromverteilung herum zu entwickeln, die Annahme ist also dass sich das externe Feld im Gebiet der Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ kaum ändert. Legen wir den Schwerpunkt der Stromverteilung in den Ursprung, lautet die Entwicklung

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \mathbf{B}_0 + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=0} + \dots \\ &= \mathbf{B}_0 + \sum_i (\mathbf{r} \cdot \nabla B_i(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=0}) \mathbf{e}_i \equiv \mathbf{B}_0 + \sum_i ((\mathbf{r} \cdot \nabla) \hat{B}_i^0) \mathbf{e}_i. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Hierbei benutzen wir im folgenden die Notation \hat{B} um anzudeuten dass die Ableitungen des Nabla-Operators nur auf das Magnetfeld wirken und den Index \hat{B}^0 um anzudeuten dass nach

der Ableitung das Feld am Ursprung evaluiert wird. Damit bekommt man für die Kraft

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{c}\mathbf{B}_0 \times \int \mathbf{j}(\mathbf{r})d^3r - \frac{1}{c} \int \left[\sum_i ((\mathbf{r} \cdot \nabla)\hat{B}_i^0)\mathbf{e}_i \right] \times \mathbf{j}(\mathbf{r})d^3r. \quad (4.85)$$

Der erste Term verschwindet aber aus den gleichen Gründen wie bereits im vorherigen Abschnitt gezeigt. Die i -Komponente der Kraft wird also zu

$$F_i = -\frac{1}{c} \int d^3r \left[((\mathbf{r} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{B}}_0) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) \right]_i = -\frac{1}{c} \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \left[\nabla \hat{B}_j^0 \right] \cdot \left[\int \mathbf{r}' j_k(\mathbf{r}') d^3r' \right]. \quad (4.86)$$

Nutzen wir die Identität (4.74) mit $\mathbf{r} \rightarrow \nabla \hat{B}_j^0$, können wir dies schreiben als

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{1}{2c} \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \left\{ \left[\nabla \hat{B}_j^0 \right] \times \left[\int \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) d^3r \right] \right\}_k \\ &= - \sum_{jk} \epsilon_{ijk} [\mathbf{m} \times \nabla \hat{B}_j^0]_k = - \sum_{jk} \epsilon_{ijk} [\mathbf{m} \times \nabla]_k \hat{B}_j^0 = + \sum_{jk} \epsilon_{ijk} (\mathbf{m} \times \nabla)_j \hat{B}_k^0 \\ &= \left[(\mathbf{m} \times \nabla) \times \hat{\mathbf{B}}_0 \right]_i. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Damit können wir die Kraft in führender Ordnung über das Dipolmoment berechnen

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \times \nabla) \times \hat{\mathbf{B}}_0 = -\mathbf{m}(\nabla \hat{\mathbf{B}}) + \nabla(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0) = \nabla(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0). \quad (4.88)$$

Wir können den Term in Klammern also als ein Potential interpretieren

$$V = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}, \quad (4.89)$$

vgl. Abschnitt 2.6, wo die Wechselwirkungsenergie eines reinen elektrischen Dipols mit Dipolmoment \mathbf{p} durch $W_{\text{dip}} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_0$ gegeben war. Ein (gedämpfter) magnetischer Dipol wird daher versuchen, sich parallel mit dem Magnetfeld einzustellen, so dass seine Wechselwirkungsenergie minimal wird. Das ist das Funktionsprinzip einer Kompaßnadel. Für die Wechselwirkungsenergie zweier magnetischer Dipole \mathbf{m}_1 und \mathbf{m}_2 bekommen wir dann auch einen Ausdruck analog zu Gleichung (2.129).

4.8.2 Drehmoment

Zusätzlich zur Gesamtkraft auf einen Dipol existiert auch ein Drehmoment. Hier trägt schon der erste Term in der Entwicklung des externen Feldes bei und wir betrachten nur diese führende Ordnung. Aufintegrieren des Ampereschen Kraftgesetzes liefert

$$\begin{aligned} d\mathbf{N} &= \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = \frac{I}{c} \mathbf{r} \times (d\mathbf{r} \times \mathbf{B}_0) \\ \mathbf{N} &= \frac{1}{c} \int \mathbf{r} \times (\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}_0) d^3r = \frac{1}{c} \int d^3r [\mathbf{j}(\mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}_0) - \mathbf{B}_0(\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}))]. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Hier können wir wieder den Hilfsatz der Magnetostatik (4.69) mit $g(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) = r$ benutzen, so dass sich ergibt

$$0 = 2 \int [r(\mathbf{j} \cdot \nabla)r] d^3r = 2 \int d^3r (r\mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_r) = 2 \int d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}. \quad (4.91)$$

Damit fällt im Drehmoment ein Term weg und wir bekommen weiter unter Nutzung von (4.74) mit $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{B}_0$,

$$\mathbf{N} = \frac{1}{c} \int d^3r [r \cdot \mathbf{B}_0] \mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2c} \mathbf{B}_0 \times \left(\int d^3r r\mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) \right) = +\mathbf{m} \times \mathbf{B}_0. \quad (4.92)$$

Das Drehmoment steht also senkrecht zur Ebene welche von \mathbf{B} und \mathbf{m} aufgespannt wird, d.h. in führender Ordnung dreht sich der Dipol in der Ebene von \mathbf{B} und \mathbf{m} .

4.9 Magnetostatik in Materie

4.9.1 Grundgleichungen der Magnetostatik

Analog zur Diskussion der Dielektrika in Kapitel 3 lassen sich auch realistische Stromverteilungen in der Materie gut unterteilen in Beiträge, welche auf sehr kleinen Skalen variieren, wie z.B. magnetische Momente von einzelnen Atomen und Molekülen, und Beiträge welche sich nur auf großen Skalen ändern wie z.B. die Stromdichte einer Leiterschleife. Die Beiträge der einzelnen magnetischen Momente von Atomen sind nicht im Einzelnen bekannt und wir interessieren uns nur für ihren Mittelwert. Wir benutzen dieselbe Notation wie bei der Diskussion der Dielektrika und zerlegen die Stromdichte in einen makroskopischen Anteil (welcher z.B. auf der Größenskala von Objekten wie Leiterschleifen variiert) und einen molekularen Anteil (welcher z.B. in Bohrschen Atommodellen durch die elektronischen Ringströme in einzelnen Atomen generiert wird)

$$\mathbf{j}_{\text{mik}}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_{\text{mak}}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_{\text{mol}}(\mathbf{r}). \quad (4.93)$$

Wie zuvor in der Elektrostatik nehmen wir an, dass sich die makroskopischen Größen wieder durch eine Mittelungsprozedur aus dem mikroskopischen erhalten lassen

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\text{mak}}(\mathbf{r}) &= \langle \mathbf{j}_{\text{mik}}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int \mathbf{j}_{\text{mik}}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') d^3 r', \\ \mathbf{B}_{\text{mak}}(\mathbf{r}) &= \langle \mathbf{B}_{\text{mik}}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int \mathbf{B}_{\text{mik}}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') d^3 r'. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Aus der Zerlegung der Stromdichten folgt dann auch eine entsprechende Zerlegung des Vektorpotentials, z.B. in Coulomb-Eichung

$$\mathbf{A}_{\text{mik}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{\text{mak}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' + \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{\text{mol}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'. \quad (4.95)$$

Die makroskopische magnetische Induktion soll sich wieder durch eine Rotation aus einem makroskopischen Vektorpotential berechnen

$$\mathbf{B}_{\text{mak}} = \langle \nabla \times \mathbf{A}_{\text{mik}} \rangle \stackrel{!}{=} \nabla \times \mathbf{A}_{\text{mak}}. \quad (4.96)$$

Damit folgt aus der Darstellung der makroskopischen magnetischen Induktion als Rotation, dass weiterhin auch für das makroskopische Feld die Gleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_{\text{mak}} = \nabla \cdot (\langle \nabla \times \mathbf{A}_{\text{mik}} \rangle) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}_{\text{mak}}) = 0 \quad (4.97)$$

gelten muss.

Um vom mikroskopischen Vektorpotential zum makroskopischen über zu gehen, könnte man der Ableitung (3.10) folgen. Hier machen wir das phänomenologisch und nähern den molekularen Beitrag zum Vektorpotential durch magnetische (Dipol-)Momente

$$\mathbf{A}_{\text{mol}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{\text{mol}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \approx \sum_i \frac{\mathbf{m}_i \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}, \quad (4.98)$$

vgl. (4.76), mit dem magnetischen Moment \mathbf{m}_i und Ort \mathbf{r}_i des i -ten Moleküls. Analog zur Polarisation in der Elektrostatik definiert man bei der Mittelung über die makroskopischen Volumenelemente dann die magnetische Dipoldichte oder **Magnetisierung**

$$\mathbf{M} = N \langle \mathbf{m} \rangle, \quad (4.99)$$

wobei N die Anzahl der magnetischen Dipole im Mittelungsvolumen und $\langle \mathbf{m} \rangle$ ein mittleres magnetisches Moment pro Molekül ist. Damit können wir die Summe wieder durch ein Integral ersetzen und erhalten analog zu der Diskussion für Gleichung (3.13) für das gesamte makroskopische Vektorpotential

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{mak}}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{\text{mak}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' + \int \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 r' \\ &= \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{\text{mak}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' + \int \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \left(\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3 r'. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Wir müssen hier den 2. Term noch als Rotation schreiben. Unter Ausnutzung von

$$\nabla \times (\phi \mathbf{M}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{M} + \phi \nabla \times \mathbf{M} \quad (4.101)$$

mit $\phi = 1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ folgt dann

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \left(\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) + \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4.102)$$

Den Term mit der totalen Rotation möchten wir wieder in ein Oberflächenintegral überführen. Es gilt die Identität für allgemeine Vektorfelder \mathbf{b}

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{b}) d^3 r = \oint_{\partial V} (\mathbf{n} \times \mathbf{b}) dF, \quad (4.103)$$

wobei \mathbf{n} der nach außen zeigende Normalenvektor ist. Diese Identität ist analog zu den Integralsätzen von Gauß und Stokes. Um sie zu beweisen, betrachten wir zunächst das Vektorfeld

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} \quad (4.104)$$

und nehmen an, dass \mathbf{c} konstant sei. Aus dem Gaußschen Integralsatz folgt dann sofort

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{a} d^3 r = \int_V \nabla \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \oint_{\partial V} (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n} dF. \quad (4.105)$$

Wir versuchen jetzt den konstanten Vektor \mathbf{c} aus dem Integral zu ziehen. Für konstante \mathbf{c} gilt aber

$$\nabla \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \sum_{ijk} \partial_i \epsilon_{ijk} b_j c_k = \sum_{ijk} c_k \epsilon_{kij} \partial_i b_j = \mathbf{c} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}). \quad (4.106)$$

Genauso folgt aus der Definition des Kreuzprodukts

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} b_i c_j n_k = \sum_{ijk} \epsilon_{jki} c_j n_k b_i = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{b}). \quad (4.107)$$

Einsetzen dieser beiden Resultate liefert

$$\mathbf{c} \cdot \int_V (\nabla \times \mathbf{b}) d^3 r = \int_V \mathbf{c} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) d^3 r = \oint_{\partial V} \mathbf{c} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{b}) dF = \mathbf{c} \cdot \oint_{\partial V} (\mathbf{n} \times \mathbf{b}) dF, \quad (4.108)$$

und da diese Relation für alle Vektoren \mathbf{c} gelten muss, folgt automatisch die Behauptung (4.103). Also erhalten wir unter der Annahme, dass die Magnetisierung \mathbf{M} räumlich beschränkt ist und dass das Integral über den kompletten Raum geht

$$\int_V \nabla' \times \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' = \oint_{\partial V} \mathbf{n}' \times \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dF' = 0. \quad (4.109)$$

Der Zusatzterm im makroskopischen Vektorpotential lässt sich damit als Rotation schreiben

$$\mathbf{A}_{\text{mak}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{\text{mak}}(\mathbf{r}') + c\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{\text{mak}}(\mathbf{r}') + \mathbf{j}_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r', \quad (4.110)$$

mit dem **Magnetisierungsstrom**

$$\mathbf{j}_M = c\nabla \times \mathbf{M} \quad (4.111)$$

und dem **Leitungsstrom** \mathbf{j}_{mak} .

Wir können jetzt die Ableitung der Maxwell-Gleichung analog zu Abschnitt 4.4 wiederholen und bekommen

$$\nabla \times \mathbf{B}_{\text{mak}} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_{\text{mak}} + \mathbf{j}_M) = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_{\text{mak}} + c\nabla \times \mathbf{M}). \quad (4.112)$$

Der Sinn dieser Rechnungen war also, die Rotation der Magnetisierung zu erhalten. Umformen liefert jetzt

$$\nabla \times (\mathbf{B}_{\text{mak}} - 4\pi\mathbf{M}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{mak}}. \quad (4.113)$$

Analog zur dielektrischen Verschiebung führt man dann die **magnetische Feldstärke** ein

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}_{\text{mak}} - 4\pi\mathbf{M}. \quad (4.114)$$

In SI-Einheiten hätten wir statt des Faktors $1/c$ einen Faktor $\mu_0/(4\pi)$, man nimmt dann die magnetische Feldkonstante μ_0 auf die linke Seite und definiert $\mathbf{H}_{\text{SI}} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_{\text{SI}} - \mathbf{M}_{\text{SI}}$.

Zusammengefasst lauten die Maxwell-Gleichungen der Magnetostatik damit – wir lassen wieder den Index "mak" stillschweigend weg –

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.115)$$

In SI-Einheiten hätten wir entsprechend in der ersten Gleichung $\nabla \times \mathbf{H}_{\text{SI}} = \mathbf{j}_{\text{SI}}$. Analog zur Elektrostatik, wo bei Anwesenheit von Materie die elektrische Feldstärke \mathbf{E} durch die dielektrische Verschiebung \mathbf{D} ersetzt wird, ersetzt in der Magnetostatik in Materie die magnetische Feldstärke \mathbf{H} die magnetische Induktion \mathbf{B} . Im Vakuum gilt in Gauss-Einheiten jeweils $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ und $\mathbf{D} = \mathbf{E}$.

Wenn man die Energiedichte des Magnetfeldes bestimmt, könnte man wieder wie in der Elektrostatik vorgehen und die Ströme sequentiell aufbauen. Für solche zeitlich veränderlichen Felder gibt es jedoch zusätzliche Kräfte, gegen die Arbeit verrichtet werden muss, welche in der Langzeit-Energiebilanz berücksichtigt werden muss. Wir verschieben daher die Diskussion der Feldenergie auf später und geben nur das Resultat der **Energiedichte des magnetischen Feldes in Materie** an

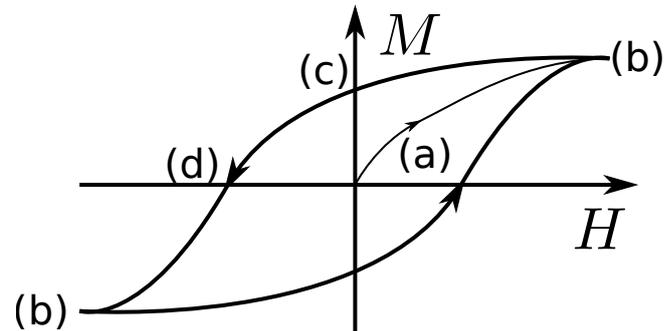
$$\omega = \frac{1}{8\pi} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}. \quad (4.116)$$

4.9.2 Formen von Magnetismus

Für lineare und isotrope Medien haben wir dann wieder analog zur Elektrostatik die Verknüpfungsgleichung

$$\mathbf{M} = \chi_M \mathbf{H}, \quad (4.117)$$

Abbildung 4.11: Typische Hysterese der Magnetisierung M in Abhängigkeit der magnetischen Feldstärke H . Nur das unberührte Material zeigt für kleine Feldstärken ein lineares Verhalten (a), für große Feldstärken richten sich alle Dipole aus bis eine Sättigung erfolgt (b). Reduziert man das externe Feld wieder, bleibt selbst bei verschwindenden Feldstärken eine Restmagnetisierung ("Remanenz" (c)) übrig. Eine Umkehr der Feldstärke bis zu einem bestimmten Wert ("Koerzitivkraft" (d)) ist nötig um die Magnetisierung zu löschen.



die Materialkonstante χ_M heißt **magnetische Suszeptibilität**. Im Unterschied zur elektrischen Suszeptibilität kann diese auch negativ werden, d.h. magnetische Feldstärke und Magnetisierung können in verschiedene Richtungen zeigen. Für lineare Medien ist die magnetische Induktion also proportional zur magnetischen Feldstärke

$$\mathbf{B} = (1 + 4\pi\chi_M)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H}, \quad (4.118)$$

wobei μ die **magnetische Permeabilität** ist.

Man unterscheidet die folgenden Klassen magnetischen Verhaltens.

- **Diamagnetismus:** $\chi_M < 0, \mu < 1$

Diamagnete enthalten keinerlei permanente magnetische Dipole, diese werden erst durch ein externes Feld induziert und sind somit nach der Lenzschen Regel dem induzierenden Feld entgegengesetzt. Diamagnetismus tritt in allen Stoffen auf, er kann jedoch durch die anderen Eigenschaften dominiert werden.

- **Paramagnetismus:** $\chi_M > 0, \mu > 1$

Paramagnete enthalten bereits permanente magnetische Dipole, welche durch das externe Feld nur ausgerichtet werden und in Richtung des Feldes zeigen. Ihr Verhalten ist stark temperaturabhängig $\chi_M \rightarrow \chi_M(T)$.

- **kollektiver Magnetismus:** $|\mu| \gg 1, \mu = \mu(H)$

Hier dominiert die Wechselwirkung zwischen den magnetischen Momenten. Dies bestimmt somit die Ausrichtung der Magnetisierung, welche somit zumindest in weiten Bereichen unabhängig vom externen Feld wird. Es handelt sich also nicht mehr um lineare Medien. Man unterscheidet hier die Unterklassen

- **Ferromagnetismus:** Hier sind die magnetischen Momente alle bei verschwindenden Temperaturen parallel ausgerichtet. Bei steigenden Temperaturen bleibt dies so unterhalb einer kritischen Temperatur, der **Curie-Temperatur**. Typisch für ferromagnetisches Verhalten ist auch eine Hysteresekurve der Magnetisierung in Abhängigkeit von der magnetischen Feldstärke, vgl. Abb. 4.11.
- **Ferrimagnetismus:** Bei diesem Spezialfall gibt es verschiedene ferromagnetische Untergitter A und B mit endlicher Gesamtmagnetisierung unterhalb einer kritischen Temperatur $\mathbf{M} = \mathbf{M}_A + \mathbf{M}_B \neq 0$.
- **Antiferromagnetismus:** Hier haben sich die Magnetisierungen der Untergitter gerade jeweils exakt weg $\mathbf{M}_A + \mathbf{M}_B = 0$, es handelt sich um einen Spezialfall des Ferrimagnetismus.

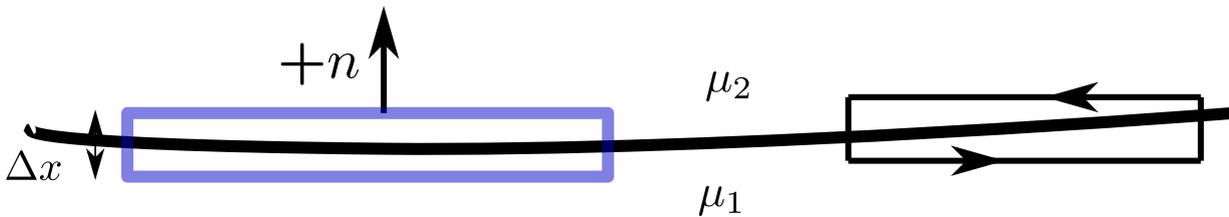


Abbildung 4.12: Visualisierung eines Gaußschen Kästchens (links) bzw. einer Stokeschen Schleife (rechts), welche die Grenzfläche zwischen zwei Medien verschiedener Permeabilitäten μ_i durchstoßen.

4.9.3 Verhalten in Grenzflächen

An Grenzflächen zwischen zwei Medien mit verschiedenen – aber ansonsten räumlich konstanten – magnetischen Permeabilitäten μ_1 und μ_2 verhält sich die magnetische Induktion nicht immer stetig. Analog zur Diskussion in der Elektrostatik betrachten wir wieder Gaußsche Kästchen bzw. Stokessche Schleifen welche die Grenzfläche zwischen beiden Medien durchstoßen, vgl. Abb. 4.12. Die Betrachtung des Gaußschen Kästchens zusammen mit

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.119)$$

liefert, dass die Normalen-Komponente der magnetischen Induktion stetig ist

$$0 = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} = \oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F} = \Delta F \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1). \quad (4.120)$$

Betrachten wir die Stokessche Schleife genauer, folgt

$$\iint_F (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n}' dF = \oint_{\partial F} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} \iint_F \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}' dF. \quad (4.121)$$

Hier bezeichnet F die Fläche der Stokeschen Schleife, deren Normalenvektor \mathbf{n}' jedoch tangential zur Grenzfläche ist. Falls die Flächenstromdichte verschwindet $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}' = 0$, folgt also Stetigkeit der Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke

$$B_{1,n} = B_{2,n}, \quad H_{1,t} = H_{2,t}. \quad (4.122)$$

In der Elektrostatik hatten wir aus analogen Erwägungen

$$E_{1,t} = E_{2,t}, \quad D_{1,n} = D_{2,n}. \quad (4.123)$$

Kapitel 5

Allgemeine Maxwell-Gleichungen

Wir hatten bisher die Grundgleichungen der Elektrostatik (zeitlich konstante Ladungsdichten, verschwindende Zeitableitungen, nur elektrische Felder)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (5.1)$$

für die dielektrische Verschiebung \mathbf{D} und das elektrische Feld \mathbf{E} sowie die Grundgleichungen der Magnetostatik (zeitlich konstante Ströme, verschwindende Zeitableitungen, nur magnetische Felder)

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.2)$$

für die magnetische Feldstärke \mathbf{H} und die magnetische Induktion \mathbf{B} , jeweils verknüpft weiter durch die Polarisation \mathbf{P} bzw. die Magnetisierung \mathbf{M} . Wenn wir zeitabhängige Phänomene betrachten, sind also Korrekturen zu diesen Gleichungen zu erwarten, welche durch die allgemeinen Maxwell-Gleichungen beschrieben werden.

5.1 Grundgleichungen

Das Gesetz von Biot-Savart beschreibt die magnetische Induktion, welche durch einen Strom erzeugt wird. Umgekehrt untersuchte Faraday 1831, ob ein Magnetfeld \mathbf{B} auch einen Strom erzeugen kann. Empirisch fand er, dass ein bewegter Permanentmagnet in einem Stromkreis einen Strom induzieren kann. Das gleiche gilt wenn man zwei Stromkreise betrachtet und einen mit endlichem Strom davon bewegt. Alternativ kann man auch einfach nur die Stromstärke in einem Stromkreis ändern und findet einen Induktionsstrom im zweiten Stromkreis. Mathematisch wird die Faradaysche Beobachtung über die **elektromotorische Kraft** (der Einheit nach eigentlich eine Spannung)

$$\kappa_{\partial F} = \oint_{\partial F} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (5.3)$$

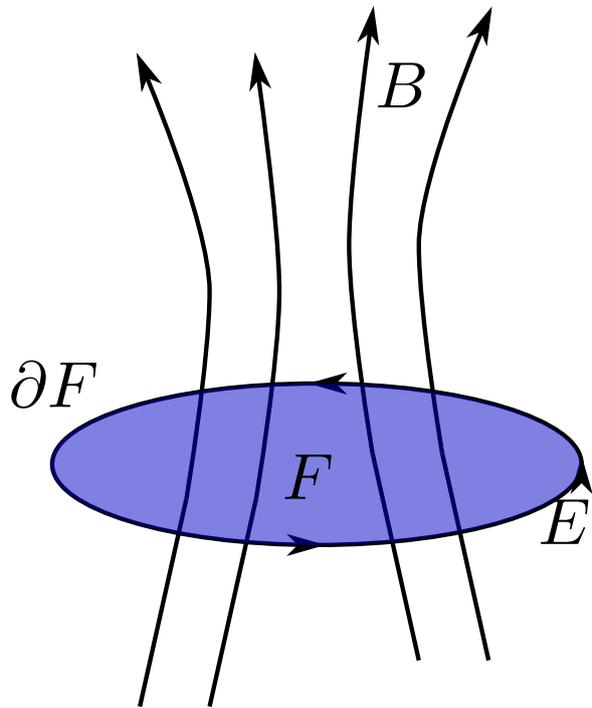
entlang einer die Fläche F berandenden Kontur ∂F sowie über den **magnetischen Fluss**

$$\Phi_F = \iint_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F} \quad (5.4)$$

durch diese Fläche beschrieben, vgl. Abb. 5.1. Faraday fand, dass die elektromotorische Kraft proportional zur Zeitableitung des magnetischen Flusses ist

$$\oint_{\partial F} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F}. \quad (5.5)$$

Abbildung 5.1: Visualisierung von magnetischem Fluss, definiert durch das Oberflächenintegral der magnetischen Induktion und elektromotorischer Kraft, definiert durch das Konturintegral der elektrischen Feldstärke. Der Normalenvektor der Fläche zeigt nach oben, wenn die Kontur im mathematischen Drehsinn durchlaufen wird (rechte-Hand Regel).



Wenden wir den Integralsatz von Stokes mit beliebigen (zeitlich konstanten) Flächen F darauf an, folgt

$$\iint_F \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} \right) \cdot d\mathbf{F} = 0 \quad \implies \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}. \quad (5.6)$$

Dies verallgemeinert die Maxwellgleichung $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ aus der Elektrostatik auf zeitabhängige Felder.

Aber auch in der Magnetostatik gibt es Korrekturen, wir hatten hier ja zeitlich konstante Ladungsdichten und somit divergenzfreie Stromdichten ($\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$) gefordert. In der Tat folgt dies auch aus dem Ampereschen Gesetz der Magnetostatik $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$. Der endgültige Schritt zu den Maxwell-Gleichungen wurde dann 1864 von Maxwell gemacht. Allgemein gilt keine Divergenzfreiheit der Ströme, sondern nur noch die aus der Ladungserhaltung folgende Kontinuitätsgleichung

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \right). \quad (5.7)$$

Die divergenzfreie Größe in Klammern kann man mit einem Rotationsfeld identifizieren. Die fehlende Gleichung wurde also von Maxwell "geraten", indem er im Ampereschen Gesetz

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (5.8)$$

die Substitution

$$\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.9)$$

vornahm und somit dieses Amperesche Gesetz auf zeitabhängige Felder erweiterte

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (5.10)$$

Damit waren die Maxwell-Gleichungen komplett

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho, \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\
 \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \\
 \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Zusätzlich sind die Hilfsgrößen \mathbf{D} und \mathbf{H} mit den makroskopischen Feldern \mathbf{E} und \mathbf{B} über die Polarisation bzw. Magnetisierung verknüpft

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \rightarrow (1 + 4\pi\chi_E)\mathbf{E} = \epsilon\mathbf{E}, \\
 \mathbf{B} &= \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M} \rightarrow (1 + 4\pi\chi_M)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H},
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

wobei die letzten Ausdrücke jeweils nur für lineare Medien gelten. Das lokale Ohmsche Gesetz verbindet zudem empirisch die Stromdichte mit der elektrischen Feldstärke

$$\mathbf{j} = \sigma_c \mathbf{E}, \tag{5.13}$$

wobei σ_c die spezifische Leitfähigkeit des Mediums darstellt. In diesen Maxwell-Gleichungen sind \mathbf{B} und \mathbf{E} makroskopische, d.h. gemittelte, Felder und \mathbf{D} und \mathbf{H} daraus abgeleitete Hilfsgrößen. Die Maxwell-Gleichungen sind somit vier gekoppelte partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung, zwei davon inhomogen.

5.2 Mikroskopische Maxwell-Gleichungen und Potentiale

Wenn die Quellen ρ und \mathbf{j} sämtliche Beiträge beinhalten, braucht man keine dielektrische Verschiebung $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ und magnetische Feldstärke $\mathbf{H} = \mathbf{B}$, und die Gleichungen werden etwas einfacher

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho, \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\
 \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \\
 \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Betrachtet man auch noch die Maxwellgleichungen im Vakuum, gilt $\rho = 0$ und $\mathbf{j} = 0$. Maxwell konnte anhand dieser Gleichungen die Existenz von elektromagnetischen Wellen vorhersagen. Insbesondere breiten sich diese mit der Geschwindigkeit c aus, welche aus den damals bekannten experimentellen Daten zu berechnen war. Die Tatsache, dass diese Wellengeschwindigkeit c mit der damals schon bekannten Lichtgeschwindigkeit gut übereinstimmte, veranlasste Maxwell zu der Vermutung, dass das Licht selbst eine elektromagnetische Welle ist.

Analog zur Elektrostatik und Magnetostatik werden wir wieder versuchen, die Komplexität der Maxwell-Gleichungen zu verringern durch die Einführung von Potentialen. Diese müssen wiederum partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung erfüllen.

Konkret setzen wir, da ja weiterhin gilt

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{5.15}$$

analog zur Magnetostatik

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.16)$$

an. Setzen wir das im Faraday-Gesetz ein, folgt

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (5.17)$$

Das können wir erfüllen indem wir den Ausdruck in Klammern als Gradientenfeld schreiben (Gradientenfelder sind rotationsfrei), was das skalare Potential Φ analog zur Elektrostatik definiert

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi. \quad (5.18)$$

Umstellen nach der elektrischen Feldstärke liefert dann

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi. \quad (5.19)$$

Wir betrachten jetzt die mikroskopischen Maxwell-Gleichungen mit $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ und $\mathbf{D} = \mathbf{E}$, von denen die beiden homogenen

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (5.20)$$

schon durch die Wahl der Potentiale per Konstruktion erfüllt sind. Setzen wir die Potentiale in die inhomogenen Maxwell-Gleichungen ein, haben wir damit die Komplexität auf nur zwei gekoppelte Gleichungen für das skalare Potential Φ und das Vektorpotential \mathbf{A} reduziert

$$\begin{aligned} -4\pi\rho &= -\nabla \cdot \mathbf{E} = \Delta\Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}), \\ -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} &= -\nabla \times \mathbf{B} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Die vier gekoppelten Maxwell-Gleichungen 1. Ordnung für die mikroskopischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} werden damit also zu zwei gekoppelten Gleichungen 2. Ordnung für die Potentiale Φ und \mathbf{A} . Es geht jedoch noch einfacher: Addieren wir zum Vektorpotential den Gradienten einer beliebigen skalaren Funktion $\Lambda(\mathbf{r}, t)$ hinzu $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \Lambda(\mathbf{r}, t)$, ändert sich am Magnetfeld nichts, vgl. die Diskussion in der Magnetostatik. Damit das elektrische Feld auch unverändert bleibt, müssen wir bei so einer **Eichtransformation** sowohl Vektorpotential als auch das skalare Potential ändern

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \Lambda(\mathbf{r}, t), \quad \Phi \rightarrow \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (5.22)$$

Analog zur Coulomb-Eichung in der Magnetostatik können wir die Eichfreiheit nutzen, um die Gleichungen für die Potentiale weiter zu vereinfachen. Speziell wird die **Lorenz-Eichung** durch die Forderung

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (5.23)$$

erfüllt. In dieser Eichung entkoppeln die Gleichungen (5.21) für die Potentiale formal

$$\begin{aligned} -4\pi\rho &= \Delta\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \\ -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} &= \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Etwas kompakter schreibt man auch mit dem **d'Alembert-Operator** (manchmal auch "Quabla"-Operator genannt)

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \quad (5.25)$$

die Gleichungen für die Potentiale als **inhomogene Wellengleichungen**

$$\square \Phi = -4\pi\rho, \quad \square \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (5.26)$$

Im Vakuum gelten **homogene Wellengleichungen** mit $\rho = 0$ und $\mathbf{j} = 0$

$$\square \Phi = 0, \quad \square \mathbf{A} = 0. \quad (5.27)$$

Bei diesen Gleichungen ist natürlich immer noch zu beachten, dass die Lorenz-Eichung (5.23) immer erfüllt sein muss.

5.3 Bestimmung der Eichfunktion

Wir wollen noch beleuchten, wie bei einer bestimmten Eichvorgabe (z.B. Coulomb-Eichung oder Lorenz-Eichung) und gegebenen skalaren Potential Φ und Vektorpotential \mathbf{A} die Eichtransformation gefunden werden kann, welche die geforderte Eichung erfüllt.

5.3.1 Lorenz-Eichung

Seien also Φ' und \mathbf{A}' die neuen Potentiale, welche die Lorenz-Eichung erfüllen sollen. Dann gilt

$$0 = \nabla \mathbf{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = \nabla \mathbf{A} + \Delta \Lambda + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2}. \quad (5.28)$$

Die Eichfunktion Λ muss für die Lorenz-Eichung also eine inhomogene Wellengleichung erfüllen

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Lambda = \square \Lambda = - \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right). \quad (5.29)$$

Daran sehen wir aber auch schon, dass selbst die Wahl der Lorenz-Eichung die Potentiale Φ' und \mathbf{A}' nicht eindeutig fixiert. Wenn z.B. Φ und \mathbf{A} bereits zu Anfang schon die Lorenz-Eichung erfüllen, verschwindet die rechte Seite der Bestimmungsgleichung für die Eichfunktion, und die Lösungen der homogenen Wellengleichung $\square \Lambda = 0$ führen zu Eichfunktionen welche verschiedene Lorenz-Eichungen ineinander überführen.

5.3.2 Coulomb-Eichung

Wir hatten in der Magnetostatik auch die Coulomb-Eichung

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (5.30)$$

eingeführt (auch transversale oder instantane Eichung genannt). In dieser Eichung entkoppeln die Wellengleichungen (5.21) nicht mehr vollständig, jedoch hängt die Gleichung für Φ nicht mehr vom Vektorpotential ab

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= -4\pi\rho, \\ \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Wir können dann also zuerst die Gleichung für das skalare Potential unabhängig mit dem Poisson-Integral lösen

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'. \quad (5.32)$$

Für eine vorgegebene zeitabhängige Ladungsdichte wird somit das Potential $\Phi(\mathbf{r}, t)$ instantan im ganzen Raum gegeben, was die alternative Namensgebung "instantane Eichung" erklärt. Wenn wir das skalare Potential gefunden haben, können wir diese Lösung in der Gleichung für das Vektorpotential einsetzen

$$\begin{aligned} \square \mathbf{A} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \nabla \int \frac{\frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t)}{\partial t}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \\ &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} - \frac{1}{c} \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r', \end{aligned} \quad (5.33)$$

wobei wir einfach die Kontinuitätsgleichung benutzt haben. Das Vektorpotential erfüllt also eine inhomogene Wellengleichung und ist durch Vorgabe der Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ bestimmt.

Wir können diese aber in eine **longitudinale Stromdichte** \mathbf{j}_{\parallel} und **transversale Stromdichte** \mathbf{j}_{\perp} zerlegen

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\parallel} &= -\frac{1}{4\pi} \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r', \\ \mathbf{j}_{\perp} &= \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Aus diesen Definitionen folgt auch, dass gilt

$$\nabla \times \mathbf{j}_{\parallel} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{j}_{\perp} = 0. \quad (5.35)$$

Man sieht jetzt, dass die gesamte Stromdichte sich als Summe des longitudinalen und transversalen Anteils schreiben lässt

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\perp} + \mathbf{j}_{\parallel} &= +\frac{1}{4\pi} \nabla \left(\nabla \cdot \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \right) - \frac{1}{4\pi} \Delta \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' - \frac{1}{4\pi} \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \\ &= -\frac{1}{4\pi} \nabla \left(\int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \right) + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \nabla \int \nabla' \cdot \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' + \frac{1}{4\pi} \nabla \left(\int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \right) \\ &= \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Hier haben wir in der 1. Zeile den Entwicklungssatz für die doppelte Rotation eingesetzt und in der zweiten Zeile dann die Darstellung der 3d δ -Funktion benutzt sowie im 1. Term der 2. Zeile $\nabla |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = -\nabla' |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ eingesetzt. Die letzte Zeile folgt schließlich mittels des Gaußschen Satzes und verschwindender Stromdichte im Unendlichen. Also hebt sich der longitudinale Anteil der Stromdichte in der Inhomogenität der Gleichung für das Vektorpotential gerade heraus

$$\square \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\perp}. \quad (5.37)$$

Daher kommt auch die Bezeichnung "transversale Eichung".

Die Coulomb-Eichung ist besonders günstig, wenn überhaupt keine Quellen vorliegen $\rho(\mathbf{r}, t) = 0$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$. Dann verschwindet das Potential und das Vektorpotential erfüllt einfach nur die homogene Wellengleichung

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \square \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (5.38)$$

Elektrisches Feld und Magnetfeld sind dann eindeutig durch das Vektorpotential bestimmt $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ bzw. $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

Um die Eichfunktion zu finden, nehmen wir jetzt an, dass Φ und \mathbf{A} die Coulomb-Eichung nicht erfüllen, d.h. $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0$. Die gesuchten neuen Potentiale

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda(\mathbf{r}, t), \quad \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (5.39)$$

sollen sie erfüllen, d.h.

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0 = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot (\nabla \Lambda) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \Delta \Lambda. \quad (5.40)$$

Die gesuchte Eichfunktion Λ ist also eine Lösung der inhomogenen Laplace-Gleichung

$$\Delta \Lambda(\mathbf{r}, t) = -\nabla \cdot \mathbf{A}. \quad (5.41)$$

Falls die rechte Seite verschwindet, sind also immer noch durch Lösungen Λ der homogenen Laplace-Gleichung Umeichungen zwischen verschiedenen Coulomb-Eichungen möglich.

5.4 Erhaltungssätze und Poynting-Vektor

5.4.1 Energiebilanz

Um die Arbeit zu berechnen, welche ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld erfährt, betrachten wir zunächst die Lorentz-Kraft

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right). \quad (5.42)$$

Hier wurde der erste Anteil von Coulomb-etabliert (1.9) und der zweite Anteil entspricht dem Ampereschen Gesetz, vgl. Abschnitt 4.3. Wegen $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ folgt für eine Punktladung aber auch, dass $d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$ gilt, d.h. bei einer Verschiebung um $d\mathbf{r}$ leistet das magnetische Feld keine Arbeit

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}, \quad (5.43)$$

da die Kraftkomponente stets senkrecht zur Geschwindigkeit \mathbf{v} steht.

Mit der Substitution $q \rightarrow \rho(\mathbf{r}, t) d^3r$ erhalten wir die Kraft-Dichte zur Lorentz-Kraft

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right), \quad (5.44)$$

und mittels Multiplikation mit $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ wird daraus eine Leistungsdichte

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (5.45)$$

Diese ist immer noch nur durch das elektrische Feld und die Stromdichte bestimmt und beschreibt die Leistung welche notwendig ist, um eine Stromdichte \mathbf{j} in Anwesenheit eines elektrischen Feldes \mathbf{E} aufrecht zu erhalten. Die gesamte (mechanische) Leistung im Volumen V ergibt sich damit zu

$$\frac{dW_V^{\text{mech}}}{dt} = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3r. \quad (5.46)$$

Jedoch gibt es durch die Kopplung zwischen elektrischer und magnetischer Feldstärke in den Maxwell-Gleichungen durchaus einen Beitrag des Magnetfeldes. Wir können die Maxwell-Gleichungen benutzen um die Stromdichte zu eliminieren

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \left(\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \right). \quad (5.47)$$

Einsetzen der Identität

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \quad (5.48)$$

führt dann auf

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} &= \frac{c}{4\pi} \left(\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \frac{1}{c} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \right) \\ &= -\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Die gesamte mechanische Arbeitsleistung im Volumen V lässt sich also darstellen als

$$\frac{dW_V^{\text{mech}}}{dt} = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r \left[c \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}) \right]. \quad (5.50)$$

Jetzt definiert man den **Poynting-Vektor** über

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (5.51)$$

und die **Energiedichte des elektromagnetischen Feldes** über

$$\omega = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}). \quad (5.52)$$

Für lineare und isotrope homogene Medien mit konstanten elektrischen und magnetischen Permeabilitäten gilt offensichtlich

$$\mathbf{H} \cdot \partial_t \mathbf{B} = \frac{1}{2} \partial_t (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}), \quad \mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{D} = \frac{1}{2} \partial_t (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}). \quad (5.53)$$

Setzen wir dies in die Arbeitsleistung ein, folgt

$$\frac{dW_V^{\text{mech}}}{dt} = \int d^3r \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = - \int d^3r \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} \right). \quad (5.54)$$

Da dies für beliebige Volumina V erfüllt sein muss, erhalten wir eine Bilanzgleichung für die Energiedichte, analog zur Kontinuitätsgleichung, das **Poynting-Theorem**

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (5.55)$$

Im Unterschied zur normalen Kontinuitätsgleichung für die Ladungsdichte haben wir einen Zusatzterm für die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes. Das liegt daran, dass die Energie, welche im elektromagnetischen Feld enthalten ist, im Gegensatz zur Gesamtladung nicht streng erhalten ist. Hingegen gilt für die Summe aus der gesamten Feldenergie im Volumen V

$$\frac{dW_V^{\text{Feld}}}{dt} = \int_V d^3r \frac{\partial \omega}{\partial t} \quad (5.56)$$

und der gesamten (mechanischen) Energie der Ladungsträger im Volumen V

$$\frac{dW_V^{\text{mech}}}{dt} = \int_V d^3r \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (5.57)$$

nach dem Gaußschen Satz die Bilanzgleichung

$$\frac{d}{dt} (W_V^{\text{mech}} + W_V^{\text{Feld}}) = - \oiint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{F}. \quad (5.58)$$

Der Term auf der rechten Seite, d.h. das Oberflächenintegral über den Poynting-Vektor beschreibt somit den Fluss von Feldenergie in das Volumen V hinein, der Poynting-Vektor beschreibt eine Energie-Flussdichte. In das Poynting-Theorem und somit auch in die Bilanzgleichung der Gesamtenergie geht allerdings nur $\nabla \cdot \mathbf{S}$ ein. Addiert man zum Poynting-Vektor willkürlich eine Rotation $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S} + \nabla \times \mathbf{F}$, ändert sich die Divergenz von \mathbf{S} und die Energiebilanz nicht. Daher muss $\mathbf{S} \neq 0$ nicht immer mit einem Energiestrom korrespondieren. Zum Beispiel haben die homogenen Felder

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H \end{pmatrix} \quad (5.59)$$

einen nicht-verschwindenden Poynting-Vektor

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{c}{4\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ -EH \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.60)$$

Allerdings ist für homogene (räumlich konstante) Felder dieser Vektor divergenzfrei $\nabla \cdot \mathbf{S} = 0$, so dass kein Energiefluss durch die Oberfläche auftritt.

5.4.2 Impulsbilanz

Wir hatten den Poynting-Vektor als Energiestromflächendichte eingeführt, er hat jedoch auch Relevanz für die Impulsbilanz. Ausgehend von der Lorenz-Kraft erhalten wir für die Impulsänderung einer Punktladung

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \mathbf{p}^{\text{mech}} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right). \quad (5.61)$$

Für mehrere Punktladungen im Volumen V , beschrieben durch Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ und Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ berechnet sich die Änderung des Gesamtimpulses zu

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbf{p}_V^{\text{mech}} &= \int_V \left(\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right) d^3r \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{D}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \frac{1}{c} \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d^3r \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{D}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} \times \mathbf{D}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \times \mathbf{D} \right) d^3r \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{D}) + \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} \times \mathbf{D}) - \mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \right) d^3r.
\end{aligned} \tag{5.62}$$

Hier haben wir im ersten Schritt die Quellen ρ und \mathbf{j} mittels der inhomogenen Maxwell-Gleichungen (5.11) eliminiert, im zweiten die Zeitableitung umgeschrieben und im dritten die homogenen Maxwell-Gleichungen ausgenutzt.

Wir betrachten im folgenden den mikroskopischen Feldimpuls mit $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ und $\mathbf{H} = \mathbf{B}$, in Materie werden die Relationen deutlich komplizierter. Wir definieren den **Feldimpuls**

$$\mathbf{p}_V^{\text{Feld}} = \frac{1}{4\pi c} \int_V (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) d^3r = \int_V \frac{\mathbf{S}}{c^2} d^3r, \tag{5.63}$$

was damit eine Interpretation des Poynting-Vektors als Impulsdichte zulässt. In den Gleichungen der Impulsbilanz können wir diesen auf die andere Seite bringen

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}_V^{\text{mech}} + \frac{d}{dt}\mathbf{p}_V^{\text{Feld}} = \frac{1}{4\pi} \int_V (\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})) d^3r. \tag{5.64}$$

Damit ist für die Impulsbilanz gezeigt, dass nicht nur die Impulse der beteiligten Teilchen, sondern auch der Feldimpuls in die Impulsbilanz eingeht. Um die rechte Seite dieser Gleichung besser zu verstehen, betrachten wir zunächst den Beitrag des elektrischen Feldes und erhalten für dessen i -Komponente

$$\begin{aligned}
[\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})]_i &= E_i \sum_j (\partial_j E_j) - \sum_{jk} \epsilon_{ijk} E_j (\nabla \times \mathbf{E})_k \\
&= E_i \sum_j (\partial_j E_j) - \sum_{jklm} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} E_j (\partial_l E_m) \\
&= E_i \sum_j (\partial_j E_j) - \sum_{jlm} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) E_j (\partial_l E_m) \\
&= E_i \sum_j (\partial_j E_j) - \sum_j E_j (\partial_i E_j) + \sum_j E_j (\partial_j E_i) \\
&= \sum_j \partial_j (E_i E_j) - \frac{1}{2} \partial_i (\sum_j E_j E_j) = \sum_j \partial_j \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \sum_k E_k E_k \right).
\end{aligned} \tag{5.65}$$

Hier haben wir nur die Definition des Kreuzproduktes und die Identität $\sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$ benutzt. Die Berechnung der i -Komponente für die magnetische Induktion geht natürlich genauso

$$[\mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})]_i = \sum_j \partial_j \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \sum_k B_k B_k \right). \tag{5.66}$$

Wir definieren dann den **Maxwellscher Spannungstensor** mittels

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left(E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \sum_k (E_k E_k + B_k B_k) \right). \quad (5.67)$$

Er ist offensichtlich symmetrisch $T_{ij} = T_{ji}$ und seine Spur korrespondiert zur negativen Energiedichte des mikroskopischen elektromagnetischen Feldes

$$\sum_i T_{ii} = \frac{-1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) = -\omega. \quad (5.68)$$

Mit diesem können wir die Impulsbilanzgleichung kompakter schreiben

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{p}_V^{\text{mech}} + \mathbf{p}_V^{\text{Feld}}]_i = \int_V \sum_j \partial_j T_{ij} d^3r. \quad (5.69)$$

Wir können die rechte Seite dieser Gleichung für festes i als Divergenz eines Vektors $\mathbf{t}_i = (T_{i1}, T_{i2}, T_{i3})^T$ auffassen und den Gaußschen Satz anwenden

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{p}_V^{\text{mech}} + \mathbf{p}_V^{\text{Feld}}]_i = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{t}_i) d^3r = \oint_{\partial V} \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{n} dF = \oint_{\partial V} \sum_j T_{ij} n_j dF. \quad (5.70)$$

Legt man die Fläche ∂V in einen feldfreien Raum oder ins Unendliche (wo die Felder verschwinden), verschwindet die komplette rechte Seite und man sieht, dass nur die Summe aus dem gesamten mechanischen Impuls und dem gesamten Feldimpuls erhalten bleibt. Im allgemeinen verschwindet der Beitrag der rechten Seite jedoch nicht, er entspricht der i -Komponente des Impulsflusses durch den Rand des Volumens V , also einer zeitlichen Änderung einer Kraft-Flächendichte. In Worten bedeutet dies, dass die Impulsbilanz von mechanischem Impuls, Feldimpuls und den Kräften zwischen Feld und seiner Berandung immer ausgeglichen ist. Mit dieser Sichtweise können wir aus dem Maxwellschen Spannungstensor den Strahlungsdruck extrahieren. Man erhält dann für die i -Komponente einer Kraft auf das Flächenelement ΔF den Ausdruck

$$F_i = - \sum_j T_{ij} n_j \Delta F. \quad (5.71)$$

Die Gesamtkraft normal zum Flächenelement ΔF ergibt sich damit zu

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \sum_i F_i n_i = - \sum_{ij} T_{ij} n_i n_j \Delta F. \quad (5.72)$$

Dies ist genau die Kraft, welche elektromagnetische Strahlung (d.h. nur Feldimpuls) auf ein geschwärztes Flächenelement ausübt (perfekter Absorber). Elektromagnetische Strahlung kann also nicht nur Energie, sondern auch Impuls auf Flächen übertragen. Die Kraft pro Flächeneinheit liefert uns den **Strahlungsdruck**

$$P_{\text{Strahlung}} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}}{\Delta F} = - \sum_{ij} T_{ij} n_i n_j. \quad (5.73)$$

Dieser ist z.B. beobachtbar an Kometenschweiften oder auch an drehbar gelagerten Flächen im Vakuum, welche auf der einen Seite Reflektor und auf der anderen Seite Absorber sind.

5.5 Lösungen im Vakuum

Wir hatten bereits gesehen, dass unter Wahl der Lorenz-Eichung das skalare Potential und das Vektorpotential separate Wellengleichungen erfüllen. Genauso ergeht es in diesem Fall auch den Feldern. Im Vakuum gilt $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ und $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ und außerdem verschwinden die Quellen $\rho = 0$ und $\mathbf{j} = 0$. Die Maxwell-Gleichungen (5.11) werden damit hochsymmetrisch

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} &= +\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0.\end{aligned}\quad (5.74)$$

Bilden wir eine doppelte Rotation, ermöglicht dies, ein Feld zu eliminieren, z.B.

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{B}. \quad (5.75)$$

Einsetzen des Entwicklungssatzes $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B}$ unter Ausnutzung der homogenen Maxwell-Gleichung liefert somit, dass die magnetische Induktion die Wellengleichung erfüllen muss

$$\left[\Delta + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \mathbf{B} = \square \mathbf{B} = 0. \quad (5.76)$$

Eine völlig analoge Rechnung liefert genau dieselbe Gleichung für das elektrische Feld

$$\left[\Delta + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \mathbf{E} = \square \mathbf{E} = 0. \quad (5.77)$$

Dies sind komponentenweise Wellengleichungen für Wellen mit der Geschwindigkeit c , wie bereits von Maxwell richtig erkannt wurde. Solche Gleichungen werden von jeder Funktion der Form

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = f_-(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) + f_+(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t) \quad (5.78)$$

gelöst, solange $f_{\pm}(x)$ hinreichend oft differenzierbar sind und die **Dispersionsrelation** gilt

$$\omega = c|\mathbf{k}| = ck. \quad (5.79)$$

Man findet sie durch direktes Einsetzen und Ausnutzen von

$$\Delta \Psi = k^2 \Psi'', \quad \partial_t^2 \Psi = \omega^2 \Psi'', \quad (5.80)$$

was sich einfach durch die Kettenregel ergibt.

5.5.1 Ebene Wellen

Wir betrachten zunächst nur eine der Lösungen $f_-(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$. Betrachtet man die Punkte konstanten Argumentes (und damit auch konstanter Lösung f_-) bei der festen Zeit t_0

$$\phi_-(\mathbf{r}, t_0) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t_0, \quad (5.81)$$

so ist die Fläche konstanter Phase (konstanter Lösung) zur Zeit t_0 gegeben durch

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{const.} \quad (5.82)$$

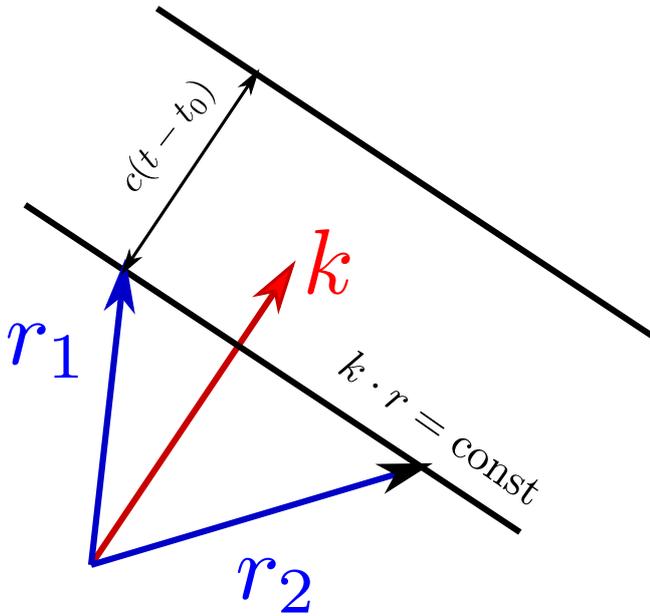


Abbildung 5.2: Darstellung einer Front konstanter Phase zu zwei verschiedenen Zeiten t_0 und t . Die Wellenfronten propagieren in Richtung des Vektors \mathbf{k} mit Geschwindigkeit c .

Dies ist eine Ebenengleichung für eine Ebene senkrecht zu \mathbf{k} . Um dieselbe Phase $\phi_-(\mathbf{r}, t_0)$ zu einem anderen Zeitpunkt t zu erhalten, muss

$$\Phi_-(\mathbf{r}, t_0) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t \quad (5.83)$$

gelten, also

$$r_{\parallel} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}}{k} = \frac{\Phi_-(\mathbf{r}, t_0)}{k} + \frac{\omega}{k} t = \frac{\Phi_-(\mathbf{r}, t_0)}{k} + ct. \quad (5.84)$$

Die Ebene gekennzeichnet durch die konstante Phase $\Phi_-(\mathbf{r}, t_0)$ bewegt sich also mit der **Phasengeschwindigkeit**

$$v_{ph} = \frac{dr_{\parallel}}{dt} = \frac{\omega}{k} = c \quad (5.85)$$

in die Richtung von \mathbf{k} , was daher auch **Wellenvektor** oder Ausbreitungsvektor heißt, vgl. Abb. 5.2. Völlig analog bezeichnet dann die andere Teillösung f_+ die Ausbreitung ebener Wellenfronten in die entgegengesetzte Richtung $-\mathbf{k}$. Wenn jetzt zusätzlich die Funktionen $f_{\pm}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)$ periodische Funktionen sind, z.B.

$$f_{\pm}(\mathbf{r}, t) = A_{\pm} e^{+i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)}, \quad (5.86)$$

spricht man von ebenen Wellen. Allgemein nennt man räumlich-zeitlich periodische Funktionen eine **ebene Welle**, wenn die Punkte konstanter Phase eine Ebene bilden, durch die Periodizität hat man dann periodisch fortgesetzte Ebenen für eine feste Phase

$$\Delta \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{k} = 2\pi n. \quad (5.87)$$

Daraus erhalten wir den Abstand zwischen zwei benachbarten Wellenfronten gleicher Phase, die **Wellenlänge**

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|}. \quad (5.88)$$

Setzt man sich hingegen an den Ort \mathbf{r} und wartet bis die Phase wieder denselben Wert erreicht, definiert dies die **Periode** oder Schwingungsdauer

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (5.89)$$

deren Inverses die **Frequenz** ist

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (5.90)$$

Die Größe ω heißt dann auch **Kreisfrequenz**. In Kombination ergibt sich daraus für das Produkt aus Frequenz und Wellenlänge

$$\lambda\nu = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = c. \quad (5.91)$$

Diese Überlegungen gelten für allgemeine Lösungen der Wellengleichung. Speziell für das elektromagnetische Feld im Vakuum setzen wir also an

$$\mathbf{E} = \Re \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{B} = \Re \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega' t)}. \quad (5.92)$$

Hier werden wir im Folgenden die Einschränkung auf den Realteil immer implizit annehmen – sämtliche Felder sind natürlich immer reell. Weiterhin sind die Wellengleichungen zwar formal entkoppelt, jedoch müssen die Lösungen immer noch die Maxwell-Gleichungen erfüllen, z.B. impliziert $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ die Relation

$$i(\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = i \frac{\omega'}{c} \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega' t)} \quad (5.93)$$

für alle Orte und Zeiten. Daher folgt dann schon mal, dass die Argumente der Exponentialfunktionen gleich sein müssen

$$\omega = \omega', \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}'. \quad (5.94)$$

Auch der Vektor-Charakter erfordert dann Gleichheit der Vorfaktoren, und aus den Gleichungen $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{B}$ folgt, dass die Vektoren \mathbf{E}_0 , \mathbf{B}_0 und \mathbf{k} ein Rechtssystem bilden

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \frac{\omega}{c} \mathbf{B}_0 = |\mathbf{k}| \mathbf{B}_0. \quad (5.95)$$

Speziell betrachten wir eine Welle welche sich in z -Richtung fortpflanzt

$$\mathbf{k} = k \mathbf{e}_z. \quad (5.96)$$

Für die Felder impliziert das

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \Re(E_x^0 \mathbf{e}_x + E_y^0 \mathbf{e}_y) e^{+i(kz - \omega t)}, \\ \mathbf{B} &= \Re(E_x^0 \mathbf{e}_y - E_y^0 \mathbf{e}_x) e^{+i(kz - \omega t)}. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Speziell bekommen wir für reelle Werte $E_x^0 = E_0$ und $E_y^0 = 0$ für die Felder

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(kz - \omega t) \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{B} = E_0 \cos(kz - \omega t) \mathbf{e}_y. \quad (5.98)$$

Die mittlere Energiedichte wird damit über $\langle \cos^2(x) \rangle = \frac{1}{2}$ zu

$$\langle \omega \rangle = \frac{1}{8\pi} \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \rangle = \frac{1}{8\pi} E_0^2. \quad (5.99)$$

Sie ist also für eine ebene Welle (im Mittel) konstant. Der Poynting-Vektor wird wegen

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (5.100)$$

immer in Ausbreitungsrichtung der Welle zeigen. Daher können wir für den mittleren Poynting-Vektor schreiben

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \rangle \frac{\mathbf{k}}{k} = \frac{c}{8\pi} E_0^2 \mathbf{e}_k = c \langle \omega \rangle \mathbf{e}_k, \quad (5.101)$$

d.h. der mittlere Energiefluss der ebenen Welle und auch der Feldimpuls verlaufen in Richtung des Wellenvektors \mathbf{k} , und der Betrag des mittleren Poynting-Vektors ist gegeben durch das Produkt aus Lichtgeschwindigkeit und mittlerer Energiedichte. Der Maxwell'sche Spannungstensor wird wegen $\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 = 2E_0^2 \cos^2(kz - \omega t)$ zu

$$T = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} E_0^2 \cos^2(kz - \omega t), \quad (5.102)$$

und man kann daraus z.B. für einen perfekten Absorber den Strahlungsdruck berechnen.

5.5.2 Polarisation

Im allgemeinen können wir jedoch die Parameter E_x^0 und E_y^0 komplex wählen

$$E_x^0 = |E_x^0| e^{+i\phi}, \quad E_y^0 = |E_y^0| e^{+i(\phi+\delta)}, \quad (5.103)$$

so dass die Felder sich zu

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} |E_x^0| \cos(kz - \omega t + \phi) \\ |E_y^0| \cos(kz - \omega t + \phi + \delta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -|E_y^0| \cos(kz - \omega t + \phi + \delta) \\ |E_x^0| \cos(kz - \omega t + \phi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.104)$$

berechnen. Je nach dem Verhalten der relativen Phase δ und der Amplituden E_x^0 und E_y^0 ergibt sich ein qualitativ anderes Verhalten der Felder. Dies wird benutzt um die Wellen folgendermaßen zu klassifizieren.

- **linear polarisierte Welle:**

Dieser Fall entsteht für $\delta = 0$ oder $\delta = \pm\pi$. Dann vereinfachen sich die Felder zu

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} |E_x^0| \\ \pm |E_y^0| \\ 0 \end{pmatrix} \cos(kz - \omega t + \phi), \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mp |E_y^0| \\ |E_x^0| \\ 0 \end{pmatrix} \cos(kz - \omega t + \phi), \quad (5.105)$$

wobei das obere Vorzeichen für $\delta = 0$ und das untere für $\delta = \pm\pi$ gilt. Man sieht, dass sowohl elektrisches als auch magnetisches Feld in einer konstanten Ebene schwingen, vgl. Abb. 5.3, daher der Name linear polarisiert. Die Richtung der elektrischen Feldstärke heißt dann auch **Polarisationsrichtung**.

- **zirkular polarisierte Welle:**

Dieser Fall folgt für $\delta = \pm\pi/2$ und $|E_{0x}| = |E_{0y}| = E$. Die Felder berechnen sich zu

$$\mathbf{E} = E \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t + \phi) \\ \mp \sin(kz - \omega t + \phi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = E \begin{pmatrix} \pm \sin(kz - \omega t + \phi) \\ \cos(kz - \omega t + \phi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.106)$$

d.h. ihre Schwingungsrichtung ändert sich mit der Zeit. Hier gilt das obere Vorzeichen für $\delta = +\pi/2$ und das untere für $\delta = -\pi/2$, diese Werte korrespondieren zu verschiedenen Drehrichtungen der Felder, vgl. Abb. 5.4.

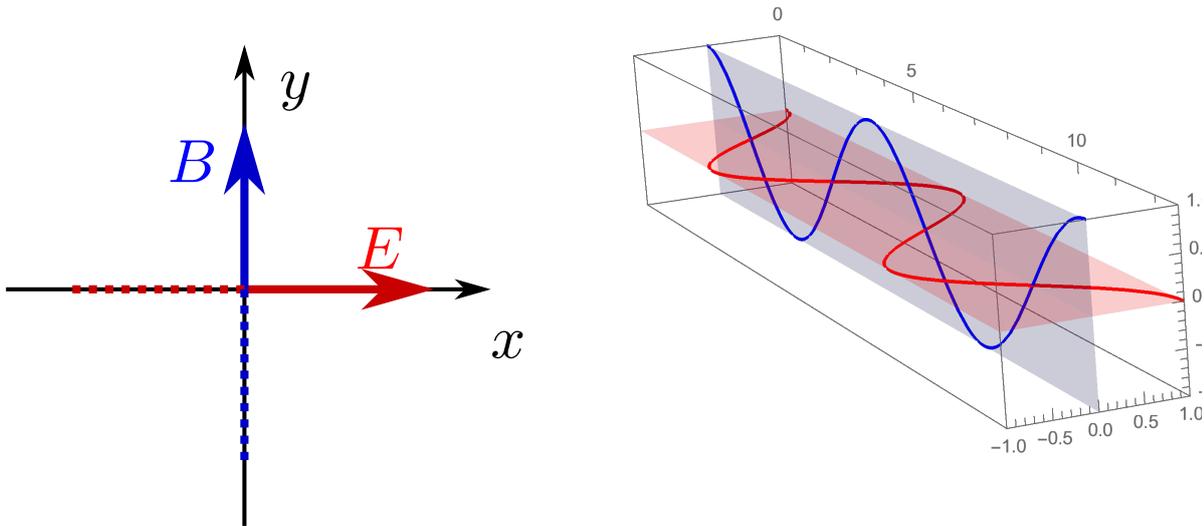


Abbildung 5.3: Links: Darstellung des elektrischen Feldes (rot) und der magnetischen Induktion (blau) einer linear polarisierten Welle in der xy -Ebene. Der Wellenvektor \mathbf{k} zeigt aus der Bildebene heraus. Die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} schwingen in einer konstanten Ebene. Rechts: Volle 3d Darstellung über zwei Perioden. Die elektrischen (rot) bzw. magnetischen (blau) Felder zeigen von der z -Achse (Schnittgerade der Ebenen) zu den gezeigten Kurven. Mathematica-Kommando: ParametricPlot3D.

- **elliptisch polarisierte Welle:**

Alle anderen Fälle heißen elliptisch polarisiert (ohne Bild). Dies kommt daher, weil die elektrische Feldstärke (und auch die magnetische Induktion) auf einer Ellipse liegen, beschrieben durch die Gleichung

$$\left(\frac{E_x \cos \delta}{|E_{0x}| \sin \delta} - \frac{E_y}{|E_{0y}| \sin \delta} \right)^2 + \left(\frac{E_x}{|E_{0x}|} \right)^2 = 1, \quad (5.107)$$

und analog für die magnetische Induktion. Die Ellipse ist im Allgemeinen nicht nur gestreckt entlang einer der Koordinatenachsen, sondern kann auch gedreht sein. Trotzdem kann auch dieser komplizierte allgemeine Fall auf die beiden ersten zurückgeführt werden.

Jede beliebige elliptisch polarisierte Welle lässt sich aus zwei senkrecht zueinander linear polarisierten Wellen konstruieren, dies sieht man direkt an den Feldern (5.104)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= |E_x^0| \cos(kz - \omega t + \phi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + |E_y^0| \cos(kz - \omega t + \phi + \delta) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{B} &= |E_x^0| \cos(kz - \omega t + \phi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + |E_y^0| \cos(kz - \omega t + \phi + \delta) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.108)$$

was genau der Überlagerung von zwei linear polarisierten Wellen in \mathbf{e}_x und \mathbf{e}_y Richtung entspricht, vgl. (5.105).

Genauso kann man auch jede beliebige elliptisch polarisierte Welle als Überlagerung von rechts- und links-zirkular polarisierten Wellen geschrieben werden. Definiert man die kom-

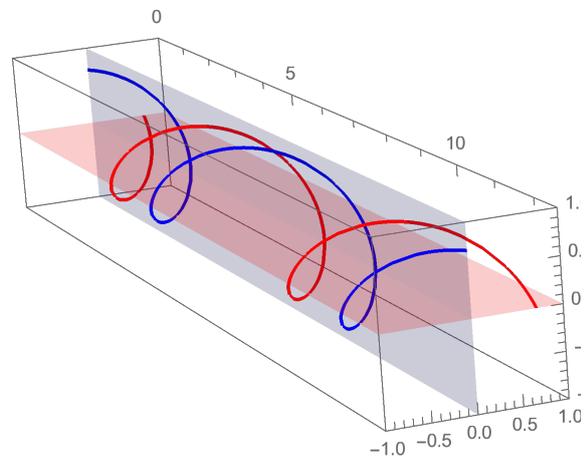
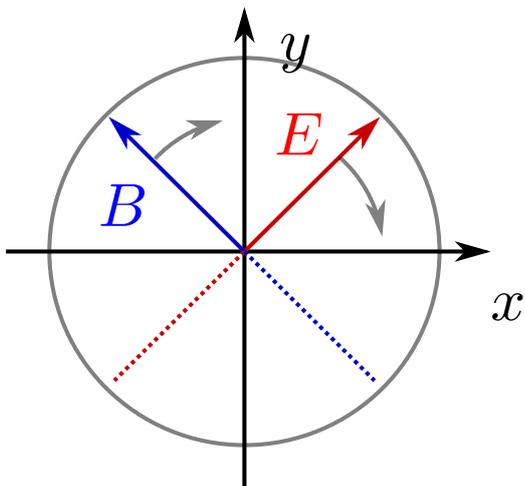
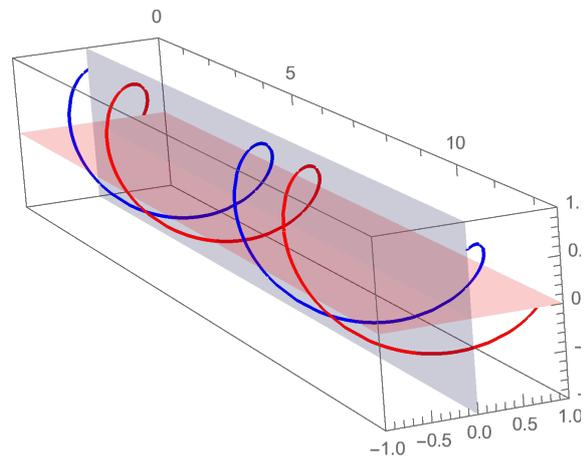
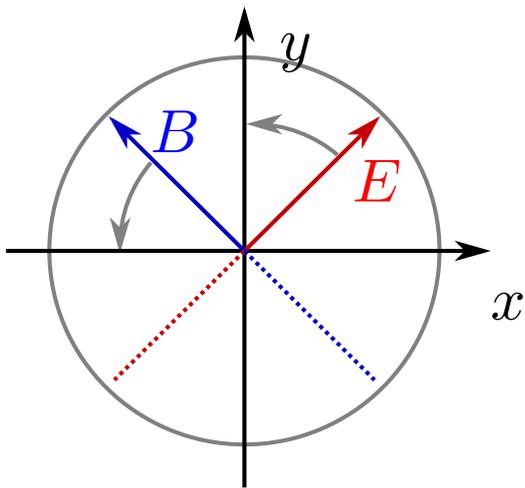


Abbildung 5.4: Wie Abb. 5.3, jedoch für verschiedene zirkular polarisierte Wellen. Der obere Fall ($\delta = +\pi/2$) heißt rechts-zirkular polarisiert und der unteres Fall ($\delta = -\pi/2$) heißt links-zirkular polarisiert (rechte-Hand bzw. linke-Hand Regel mit Daumen in Richtung des Wellenvektors).

plexwertigen Vektoren

$$\mathbf{e}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y), \quad (5.109)$$

so folgt, dass sich die ursprünglichen Basisvektoren als

$$\mathbf{e}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_-), \quad \mathbf{e}_y = \frac{-i}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_+ - \mathbf{e}_-) \quad (5.110)$$

schreiben lassen. Daraus folgt dann

$$E_{0x}\mathbf{e}_x + E_{0y}\mathbf{e}_y = \frac{1}{\sqrt{2}} [(E_{0x} - iE_{0y})\mathbf{e}_+ + (E_{0x} + iE_{0y})\mathbf{e}_-]. \quad (5.111)$$

Definieren wir für die Ausdrücke in runden Klammern

$$(E_{0x} \pm iE_{0y}) = E_{\pm} e^{+i\gamma_{\pm}} \quad (5.112)$$

mit $E_{\pm} = \sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} > 0$ und reeller Phase γ_{\pm} , folgt für den physikalischen Realteil

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Re [E_- e^{+i(kz - \omega t + \gamma_-)} \mathbf{e}_+ + E_+ e^{+i(kz - \omega t + \gamma_+)} \mathbf{e}_-] \\ &= \frac{1}{2} E_- [\cos(kz - \omega t + \gamma_-) \mathbf{e}_x - \sin(kz - \omega t + \gamma_-) \mathbf{e}_y] \\ &\quad + \frac{1}{2} E_+ [\cos(kz - \omega t + \gamma_+) \mathbf{e}_x + \sin(kz - \omega t + \gamma_+) \mathbf{e}_y], \end{aligned} \quad (5.113)$$

die magnetische Induktion folgt dann völlig analog. Das sind gerade zwei gegenläufig zirkular polarisierte Wellen, vgl. (5.106).

5.5.3 Wellenpakete

Da die homogene Wellengleichung

$$\square f(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (5.114)$$

durch beliebige Funktionen

$$f_{\pm}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t) \quad : \quad \omega = c|\mathbf{k}| \quad (5.115)$$

gelöst wird, ist eine beliebige Überlagerung, z.B. in 1d

$$F_{\pm}(z, t) = \int a(k) f_{\pm}(kz \pm \omega t) dk \quad (5.116)$$

mit einer beliebigen Gewichtsfunktion $a(k)$ natürlich auch eine Lösung.

Speziell betrachten wir in 1d (die Verallgemeinerung auf 3d ist einfach) Überlagerungen von ebenen Wellen

$$H_{\pm}(z, t) = \int b(k) e^{i(kz \pm \omega(k)t)} dk, \quad (5.117)$$

mit einer Wichtungsfunktion $b(k)$. Einsetzen in die Wellengleichung

$$0 = \left[\partial_z^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right] H_{\pm}(z, t) = \int b(k) \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) e^{i(kz \pm \omega(k)t)} dk, \quad (5.118)$$

zeigt, dass dabei die lineare Dispersionsrelation $\omega(k) = ck$ nicht zwingend erfüllt sein muss. Wenn die Gewichtsfunktion $b(k)$ scharf um einen Wert k_0 gepeakt ist, ist es sinnvoll, den Exponenten um diesen Wert k_0 herum zu entwickeln

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0) \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} + \dots = \omega_0 + (k - k_0)v_g + \dots \quad (5.119)$$

Hier haben wir die **Gruppengeschwindigkeit**

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} \quad (5.120)$$

definiert. In dispersionsfreien Medien wie z.B. dem Vakuum ist wegen $\omega = ck$ die Gruppengeschwindigkeit gleich der Phasengeschwindigkeit $v_g = c$. Für die Überlagerung der ebenen Wellen ergibt sich gerade

$$\begin{aligned} H_{\pm}(z, t) &\approx \int b(k) e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)} e^{i(k - k_0)(z \pm v_g t)} dk = e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)} \int b(q + k_0) e^{iq(z \pm v_g t)} dq \\ &= e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)} \tilde{H}_{\pm}^{k_0}(z \pm v_g t), \end{aligned} \quad (5.121)$$

wobei wir die Substitution $q = k - k_0$ vorgenommen haben. Dies beschreibt einfach nur eine ebene Welle mit Wellenvektor k_0 in z -Richtung, welche mit einer Funktion $\tilde{H}_{\pm}^{k_0}$ moduliert ist. So eine modulierte Welle nennt man auch **Wellenpaket**. Diese Modulationsfunktion ist konstant für $z \pm v_g t = \text{const}$, d.h. die Modulationsfunktion bewegt sich mit der Gruppengeschwindigkeit v_g

$$\frac{dz}{dt} = \mp v_g. \quad (5.122)$$

Die Gruppengeschwindigkeit beschreibt damit die Bewegung des Wellenpakets, wohingegen die Phasengeschwindigkeit die Ausbreitung der ebenen Wellenfronten beschreibt.

Wir können das mit einer speziellen Wichtungsfunktion, der Gaußfunktion

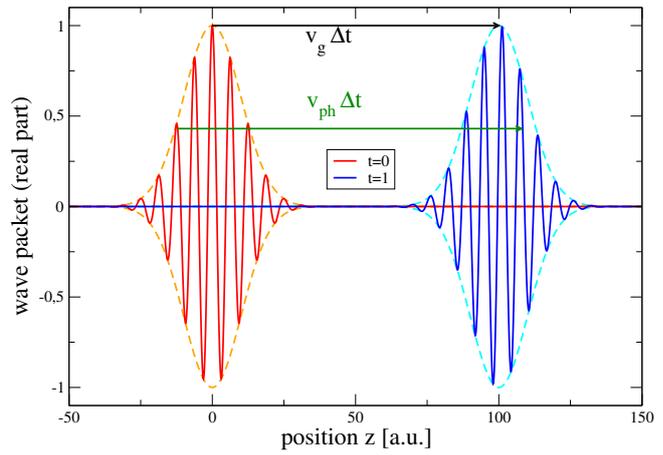
$$b(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma_k^2}} \quad (5.123)$$

etwas genauer untersuchen. Diese hat die Breite σ_k und ist symmetrisch um ihr Maximum bei k_0 . Das Wellenpaket berechnet sich zu (quadratisch ergänzen)

$$\begin{aligned} H_{\pm}(z, t) &\approx \frac{e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)}}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \int e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma_k^2}} e^{i(k-k_0)(z \pm v_g t)} dk \\ &= \frac{e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)}}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \int \exp \left\{ - \left[\frac{k - k_0}{\sqrt{2}\sigma_k} - i \frac{\sigma_k}{\sqrt{2}} (z \pm v_g t) \right]^2 - \frac{\sigma_k^2}{2} (z \pm v_g t)^2 \right\} dk \\ &= \frac{e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)}}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \sqrt{2\pi}\sigma_k e^{-\frac{\sigma_k^2}{2} (z \pm v_g t)^2} = e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)} e^{-\frac{\sigma_k^2}{2} (z \pm v_g t)^2}. \end{aligned} \quad (5.124)$$

Seine Breite ist also durch die inverse Breite der Wichtungsfunktion gegeben. Wieder sehen wir, dass die Modulationsfunktion sich mit der Gruppengeschwindigkeit bewegt, wohingegen die Phase sich mit der Phasengeschwindigkeit ω_0 bewegt, vgl. Abb. 5.5.

Abbildung 5.5: Propagation eines Wellenpaketes (von rot nach blau). Die Phasengeschwindigkeit v_{ph} beschreibt die Geschwindigkeit von Wellenfronten konstanter Phase und die Gruppengeschwindigkeit v_g die Geschwindigkeit der Einhüllenden.



5.5.4 Kugelwellen

Eine andere wichtige Lösungsklasse der allgemeinen Wellengleichung

$$\square \Psi = \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \Psi = 0 \quad (5.125)$$

sind Kugelwellen. Dies sind radialsymmetrische Lösungen der Wellengleichung $\Psi(r, \theta, \phi, t) = \Psi(r, t)$, was den Laplace-Anteil der Wellengleichung etwas vereinfacht

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \right] \rightarrow \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) . \quad (5.126)$$

Die Wellengleichung lautet damit

$$\left[\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right] \Psi(r, t) = 0 . \quad (5.127)$$

Wir können diese aber wieder in eine ganz normale Wellengleichung überführen, indem wir nutzen, dass gilt

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \Psi(r, t) &= \frac{1}{r} \partial_t^2 (r \Psi(r, t)) , \\ \frac{1}{r} \partial_r (r^2 \partial_r) \Psi(r, t) &= r \partial_r^2 \Psi + 2 \partial_r \Psi(r, t) = \partial_r^2 (r \Psi(r, t)) . \end{aligned} \quad (5.128)$$

Damit wird die Wellengleichung zu

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] (r \Psi(r, t)) = 0 . \quad (5.129)$$

Die transformierte Funktion

$$\Phi(r, t) = r \Psi(r, t) \quad (5.130)$$

erfüllt also eine ganz normale eindimensionale Wellengleichung

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Phi(r, t) = 0 . \quad (5.131)$$

Deren Lösungen kennen wir als ebene Wellen, so dass wir eine zweite Klasse von radialsymmetrischen Lösungen der Wellengleichung schreiben können als

$$\Psi(r, t) = \frac{1}{r} [v_+(kr + \omega t) + v_-(kr - \omega t)] , \quad \omega = ck , \quad (5.132)$$

wobei $v_{\pm}(x)$ nur hinreichend oft differenzierbare Funktionen sein müssen und für eine feste Frequenz die Dispersionsrelation erfüllt sein muss. Die Amplitude dieser Wellen nimmt mit dem Radius ab, und Punkte konstanter Phase liegen jetzt auf Kugelflächen. Analog zu den ebenen Wellen spricht man von **Kugelwellen** dann, wenn die Lösungsfunktionen $v_{\pm}(x)$ periodisch sind, z.B.

$$\Psi(r, t) = \frac{1}{r} [A_+ e^{+i(kr+\omega t)} + A_- e^{+i(kr-\omega t)}], \quad \omega = ck. \quad (5.133)$$

Hier wäre der Term mit A_- als auslaufende Kugelwelle und der Term mit A_+ als einlaufende Kugelwelle zu interpretieren.

Setzen wir wieder elektrisches Feld und magnetische Induktion als auslaufende Kugelwellen an

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \frac{e^{i(k'r-\omega't)}}{r}, \quad (5.134)$$

so folgt wieder aus den Maxwell-Gleichungen (in Kugelkoordinaten), dass $k' = k$ und $\omega' = \omega = ck$ gelten muss, und dass weiterhin \mathbf{e}_r , \mathbf{E} , und \mathbf{B} senkrecht aufeinander stehen. Das geht wegen der Winkelabhängigkeit von \mathbf{e}_r aber nur, wenn \mathbf{E}_0 und \mathbf{B}_0 wiederum von den Winkeln θ und ϕ abhängen. Diese Abhängigkeit sollte den radialen Charakter der Kugelwelle nicht stören, d.h. der Winkelanteil des Laplace-Operators sollte komponentenweise keinen zusätzlichen Beitrag liefern

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \partial_{\theta} (\sin \theta \partial_{\theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_{\phi}^2 \right] \mathbf{E}_0(\theta, \phi) = 0 \quad (5.135)$$

und analog für \mathbf{B}_0 . Eine mögliche Lösung, welche auch die Maxwell-Gleichungen respektiert, ist

$$\mathbf{E} = \frac{\alpha}{r \sin \theta} \cos(kr - \omega t) \mathbf{e}_{\theta}, \quad \mathbf{B} = \frac{\alpha}{r \sin \theta} \cos(kr - \omega t) \mathbf{e}_{\phi}, \quad (5.136)$$

wobei α eine Konstante ist und die Dispersionsrelation $\omega = ck$ erfüllt sein muss.

5.6 Lösungen in Materie

Wir betrachten der Einfachheit halber hier nur lineare Medien mit

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mu \mathbf{H} = \mathbf{B}. \quad (5.137)$$

Weiterhin nehmen wir an, dass in dem Medium die makroskopische Stromdichte durch das Ohmsche Gesetz mit der elektrischen Feldstärke verknüpft ist

$$\mathbf{j} = \sigma_c \mathbf{E}, \quad (5.138)$$

wobei σ_c die Leitfähigkeit des Mediums ist. Jetzt kann man für diese vereinfachten Annahmen durch geeignete Kombination der Maxwell-Gleichungen eine Wellengleichung für die elektrische Feldstärke ableiten:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\frac{\mu}{c} \partial_t (\nabla \times \mathbf{H}) = -\frac{\mu \epsilon}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{E} - \frac{\mu}{c} \frac{4\pi}{c} \sigma_c \partial_t \mathbf{E} \\ &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (5.139)$$

Die Divergenz der elektrischen Feldstärke können wir jedoch durch das Coulomb-Gesetz mit der Ladungsdichte in Beziehung setzen, und man erhält die inhomogene Wellengleichung

$$\frac{4\pi}{\epsilon} \nabla \rho = \Delta \mathbf{E} - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{E} - \frac{4\pi\mu\sigma_c}{c^2} \partial_t \mathbf{E}. \quad (5.140)$$

Eine analoge Rechnung für die magnetische Induktion liefert die homogene Wellengleichung

$$0 = \Delta \mathbf{B} - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{B} - \frac{4\pi\mu\sigma_c}{c^2} \partial_t \mathbf{B}. \quad (5.141)$$

Betrachten wir nur die allgemeine Lösung des homogenen Anteils, haben wir zusätzlich zur normalen Wellengleichung einen Term mit einer ersten Zeitableitung, dieser führt zu einer Dämpfung der Welle. Physikalisch korrespondiert diese Dämpfung zu einer Umwandlung von elektromagnetischer Feldenergie in Wärme, welche im Medium dissipiert wird. Man sieht das, wenn man z.B. die Gleichung für das elektrische Feld mit dem Ansatz

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(k)t)} \quad (5.142)$$

mit zunächst unbekannter Dispersionsrelation $\omega(k)$ lösen möchte. Der Ansatz führt auf die Gleichung

$$-k^2 + \frac{4\pi\mu\sigma_c}{c^2} (i\omega) + \frac{\mu\epsilon}{c^2} \omega^2 = 0. \quad (5.143)$$

Auflösen nach ω liefert die neue Dispersionsrelation in Medien

$$\omega_{\pm} = -\frac{2\pi\sigma_c}{\epsilon} i \pm \frac{kc}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{1 - \frac{4\pi^2\mu\sigma_c^2}{\epsilon k^2 c^2}}. \quad (5.144)$$

Wenn wir die Leitfähigkeit vernachlässigen $\sigma_c \rightarrow 0$, bleibt ω rein reell, für kleine Leitfähigkeiten ergibt sich eine Dämpfung

$$\omega_{\pm} \rightarrow \pm \frac{kc}{\sqrt{\mu\epsilon}} - 2\pi i \frac{\sigma_c}{\epsilon}, \quad (5.145)$$

es ergibt sich für $\sigma_c = 0$ eine ganz normale Wellengleichung mit der Phasengeschwindigkeit

$$v_{\text{ph}} = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{n}, \quad (5.146)$$

was den **Brechungsindex** über

$$n = \sqrt{\mu\epsilon} \quad (5.147)$$

definiert. Alternativ können wir Medien mit sehr großer Leitfähigkeit betrachten $\sigma_c \rightarrow \infty$ und finden, dass ω immer imaginär wird

$$\omega_{+} \rightarrow -i \frac{k^2 c^2}{4\pi\mu\sigma_c}, \quad \omega_{-} \rightarrow -i \frac{4\pi\sigma_c}{\epsilon}. \quad (5.148)$$

Setzen wir das in den Ansatz ein, sieht man, dass die Welle im Medium sofort gedämpft wird. Ein analoger Ansatz der Form $\mathbf{E} \propto e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega(k)t)}$ hätte auch die Dämpfung ergeben. Das erklärt, warum gute Leiter (wie z.B. Metalle) nicht transparent sind. Für alle realistischen Werte dazwischen hängt das Verhalten der Welle vom Wellenvektor \mathbf{k} ab, es ergibt sich jedoch eine Dämpfung der Welle im Medium.

5.7 Kovariante Formulierung

Elektromagnetische Wellen breiten sich laut Maxwell-Gleichungen mit Lichtgeschwindigkeit aus, d.h. relativistische Effekte sind für eine umfassende Behandlung der Maxwell-Gleichung wichtig. Das lässt sich auch an folgendem Gedankenexperiment verdeutlichen: Wir betrachten eine Punktladung q , welche am Ursprung des ihr zugeordneten Koordinatensystems K ruht. Ein relativ zur Punktladung ruhender Beobachter am Orte \mathbf{r} würde also das elektrische Feld einer Punktladung messen. Wenn nun der Beobachter mit der konstanten Geschwindigkeit \mathbf{v} den Raum durchquert, würde man naiv einfach \mathbf{r} durch seine zeitabhängige Position ersetzen $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$ und daraus schlussfolgern, dass der bewegte Beobachter einfach ein zeitabhängiges elektrisches Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}(t))$ messen müsste. Wir können jedoch einfach auch den Standpunkt wechseln und in das Koordinatensystem gehen, in welchem der Beobachter am Ursprung ruht. In diesem Koordinatensystem bewegt sich die Punktladung mit Geschwindigkeit $-\mathbf{v}$ und ist am Ort $\mathbf{r}' = -\mathbf{r}_0 - \mathbf{v}t$, was man durch eine Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t)(-\mathbf{v})$ darstellen würde. Nach dem Gesetz von Biot-Savart würde also ein Magnetfeld am Orte des Beobachters zu erwarten sein. Welche Sichtweise ist richtig? Leider verletzen beide Szenarien die Grundannahmen der Elektrostatik bzw. Magnetostatik. Wir müssten die kompletten Maxwell-Gleichungen im Ruhesystem des Beobachters lösen, z.B. in Lorentz-Eichung die Wellengleichungen (5.26) für das skalare Potential Φ und das Vektorpotential \mathbf{A} und dann daraus die Felder bestimmen. Man würde dann sehen, dass sowohl ein elektrisches als auch ein magnetisches Feld auftritt, und dass die relative Geschwindigkeit zwischen Beobachter und Punktladung in die Beschreibung eingeht. Allgemein transformieren sich elektrische und magnetische Felder ineinander unter Lorentz-Transformationen, was besonders klar ersichtlich wird durch eine sogenannte kovariante Darstellung der Maxwell-Gleichungen.

5.7.1 Inertialsysteme und Galilei-Transformation

Ein wesentliches Grundelement der speziellen Relativitätstheorie ist das Studium von Grundgesetzen bei Koordinatentransformationen zwischen zwei Koordinatensystemen K und K' , welche sich gleichförmig (d.h. nicht beschleunigt) bewegen. Solche Koordinatensysteme heißen auch **Inertialsysteme**.

Speziell betrachten wir zwei willkürlich gewählte Koordinatensysteme K und K' , und K' soll sich in K mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegen. Nehmen wir an, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ beide Inertialsysteme um den Vektor \mathbf{R}_0 im System K verschoben sind liegt der Ursprung von K' im Koordinatensystem von K bei

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{v}t. \quad (5.149)$$

Wenn wir Koordinaten vom einen Inertialsystem in das andere umrechnen wollen, müssen wir also diesen Differenzvektor hinzuaddieren $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'$ bzw. die Koordinaten in K' ergeben sich aus den Koordinaten in K über

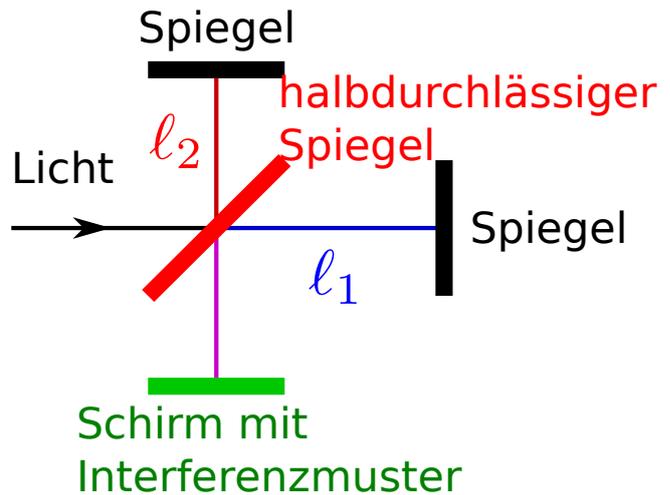
$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R}_0 - \mathbf{v}t. \quad (5.150)$$

Insbesondere ist die Zeit in beiden Koordinatensystemen als gleich angenommen

$$t' = t, \quad (5.151)$$

d.h. in dieser Vorstellung wird sie fundamental anders wahrgenommen als der Raum (absolute Zeit). Selbst wenn in verschiedenen Koordinatensystemen verschiedene Uhrzeiten gelten, hätte man $t' = t + \Delta t$, d.h. die räumlichen und zeitlichen Transformationsgleichungen mischen räumliche und zeitliche Koordinaten nicht. Solche Koordinaten-Transformationen heißen **Galilei-Transformation**.

Abbildung 5.6: Abbildung des Michelson-Experiments ohne Relativbewegung zum Äther. Ein einfallender Lichtstrahl wird von einem halbdurchlässigen Spiegel aufgespalten, die Teilstrahlen (rot und blau) laufen zu separaten Spiegeln (schwarz) die Strecken ℓ_1 bzw. ℓ_2 und werden dann am halbdurchlässigen Spiegel wieder vereint. Auf dem Schirm (grün) ergibt sich ein Interferenzmuster, abhängig von den Laufzeitunterschieden der Teilstrahlen. Die Wege von der Quelle zum halbdurchlässigen Spiegel und von diesem zum Schirm sind für beide Teilstrahlen gleich.



Die Koordinaten können z.B. die Trajektorie eines Massepunktes $\mathbf{r}(t)$ in K bzw. $\mathbf{r}'(t)$ in K' beschreiben. Dann gilt für die zeitlichen Ableitungen

$$\dot{\mathbf{r}}' = \dot{\mathbf{r}} - \mathbf{v}, \quad \ddot{\mathbf{r}}' = \ddot{\mathbf{r}}, \quad (5.152)$$

d.h. zur Geschwindigkeit muss einfach die Relativ-Geschwindigkeit der Koordinatensysteme hinzuaddiert werden. Die Beschleunigung $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}'$ wäre also unter Galilei-Transformationen die gleiche. Entsprechend bezeichnet man das Newton-sche Gesetz

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} \quad (5.153)$$

als Galilei-Invariant, denn es hat in beiden Koordinatensystemen dieselbe Form.

5.7.2 Michelson-Versuch und Lorentz-Transformation

Wie bereits angedeutet, nahm man in der klassischen Physik an, dass sich Lichtwellen auch durch ein Medium, den sogenannten **Äther**, ausbreiten würden. Der Äther wurde als ruhend betrachtet, und es wurde angenommen, dass im Inertialsystem des Äthers das Licht sich mit der Lichtgeschwindigkeit c fortpflanzen würde. Nach dieser Theorie würde ein Beobachter mit Geschwindigkeit \mathbf{v} in Richtung des Lichtstrahls diesem eine reduzierte Geschwindigkeit $c - v$ zuweisen bzw. ein entgegengesetzt bewegter Beobachter die Geschwindigkeit $c + v$. Es gibt in dieser Sichtweise keine theoretische Grenze für die maximale Geschwindigkeit, d.h. man könnte analog zum Überschallknall das Licht im Äther überholen.

Zur Überprüfung dieser Theorie wurde 1881 in Potsdam und 1887 in den USA das sog. Michelson-Morley-Experiment durchgeführt. Es bestand aus einer drehbar gelagerten Apparatur, welche ein Interferometer aus zwei reflektierenden Spiegeln und einem halbdurchlässigen Spiegel war, vgl. Abb. 5.6. Die grundlegende Überlegung war, dass wenn der Äther ein absolut ruhendes Medium ist und die Erde sich mit der Geschwindigkeit $v \approx 30\text{km/s}$ durch dieses Medium bewegt, ein Geschwindigkeits-abhängiger Laufzeitunterschied des Lichtes in longitudinaler und transversaler Richtung zur Erdgeschwindigkeit messbar sein sollte. Dies liegt daran, dass sich die Strecke in transversaler Richtung bei endlichen Relativgeschwindigkeiten \mathbf{v} anders verhält als die Weglänge in longitudinaler Richtung, vgl. Abb. 5.7. Dies ändert das Interferenzmuster auf dem Schirm im Vergleich zum Fall $\mathbf{v} = 0$. Wenn man also die Apparatur dreht, sollte sich das Interferenzmuster abhängig vom Einstellwinkel ändern, da sich ja die longitudinalen und transversalen Anteile der Geschwindigkeit relativ zum Äther ändern. Weder Michelson noch Morley noch sonst jemand nach ihnen hat im Rahmen der Messunsicherheiten eine Änderung der Interferenzmuster nachweisen können (die Messfehler waren 1881 bei Michelson noch

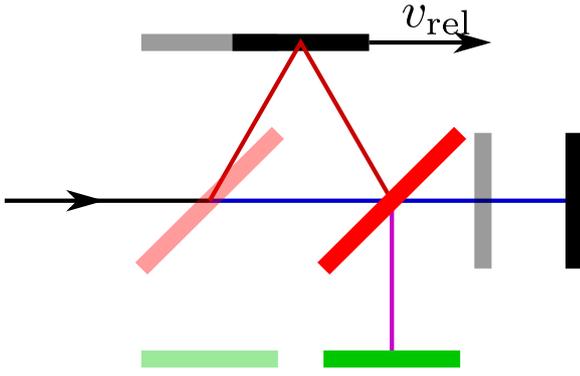


Abbildung 5.7: Strahlengänge im Michelson-Interferometer bei paralleler Ausrichtung zur Relativgeschwindigkeit zum Äther. Wenn sich die Apparatur mit Geschwindigkeit \boldsymbol{v} bewegt (übertriebene Darstellung), ändert sich die Weglänge für den Strahl in transversaler Richtung (rot) anders als die in longitudinaler Richtung (blau), es ergibt sich ein anderes Interferenzmuster als für $\boldsymbol{v} = 0$.

ziemlich groß). Damit war die Äther-Theorie widerlegt, Licht braucht kein Medium um sich auszubreiten. Dies veranlasste Einstein zu folgendem Postulat:

Die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen konstant.

Diese scheinbar einfache Aussage hat tiefgreifende Konsequenzen, z.B. ist sie nicht mit der Galilei-Transformation kompatibel. Die Wellengleichung, welche wir in der Elektrodynamik ableiten (der Einfachheit halber nur in einer räumlichen Dimension)

$$\left[\partial_x^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right] \Phi(x, t) = 0 \quad (5.154)$$

ist auch nicht Galilei-invariant: Aus $x' = x - vt$ und $t' = t$ folgt $\partial_x = \partial_{x'}$ und $\partial_t = \partial_{t'} - v \partial_{x'}$ (Kettenregel) und somit transformiert sich die Wellengleichung auf

$$\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \partial_{x'}^2 + \frac{2v}{c^2} \partial_{x'} \partial_{t'} - \frac{1}{c^2} \partial_{t'}^2 \right] \Phi(x', t') = 0. \quad (5.155)$$

Um eine bessere Transformation zu finden, gehen wir – der Einfachheit halber in einer räumlichen Dimension – von drei Annahmen aus

- Die neue Transformation soll Ort und Zeit mischen, und wir suchen eine lineare Transformation

$$x' = \bar{\alpha}x + \bar{\beta}ct, \quad ct' = \bar{\gamma}x + \bar{\delta}ct. \quad (5.156)$$

Hier sind die dimensionslosen Koeffizienten $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}$ von der Geschwindigkeit v abhängig, und Korrespondenz mit der Galilei-Transformation erfordert, dass die Gleichungen

$$\lim_{v \rightarrow 0} \bar{\alpha} = 1 = \lim_{v \rightarrow 0} \bar{\delta}, \quad \lim_{v \rightarrow 0} \bar{\beta} = 0 = \lim_{v \rightarrow 0} \bar{\gamma} \quad (5.157)$$

gelten müssen.

- Weiterhin soll die Transformation die Wellengleichung invariant lassen – aufbauend auf Einsteins Postulat der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

$$\partial_x^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 = \partial_{x'}^2 - \frac{1}{c^2} \partial_{t'}^2. \quad (5.158)$$

- Der Ursprung des Koordinatensystems K' soll sich in K mit der Geschwindigkeit v bewegen, d.h. wir haben für $x' = 0$

$$0 = \bar{\alpha}vt + \bar{\beta}t, \quad (5.159)$$

was es ermöglicht, einen Parameter zu eliminieren.

Um diese Bedingungen umzusetzen, nutzen wir die Kettenregel

$$\partial_x = \bar{\alpha}\partial_{x'} + \frac{\bar{\gamma}}{c}\partial_{t'}, \quad \partial_t = \bar{\beta}c\partial_{x'} + \bar{\delta}\partial_{t'}. \quad (5.160)$$

Einsetzen in die Wellengleichung liefert, dass die Koeffizienten folgende Gleichungen erfüllen müssen

$$\bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2 = 1, \quad \bar{\alpha}\bar{\gamma} - \bar{\beta}\bar{\delta} = 0, \quad \bar{\gamma}^2 - \bar{\delta}^2 = -1. \quad (5.161)$$

Es gibt mehrere Lösungen dieser Gleichung und (5.159), jedoch erfüllt nur eine davon die Korrespondenz mit der Galilei-Transformation

$$\bar{\alpha} = \bar{\delta} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \bar{\gamma} = \bar{\beta} = -\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (5.162)$$

Die Erweiterung auf drei Raumdimensionen besteht dann einfach darin, das Koordinatensystem so zu legen, dass die transformierte Achse in Richtung der Relativgeschwindigkeit liegt, also in x -Richtung, und die transversalen Komponenten nicht zu transformieren, denn dies lässt die Wellengleichung ebenfalls invariant.

Zusammenfassend ergibt sich die **Lorentz-Transformation** für Relativgeschwindigkeiten $\mathbf{v} = ve_x$

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma ct - \beta\gamma x, & \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & \beta &= \frac{v}{c}, \\ x' &= \gamma x - \beta\gamma ct, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \end{aligned} \quad (5.163)$$

mit dem Lorentz-Kontraktionsfaktor $\gamma > 1$ und der relativen Geschwindigkeit zwischen den Inertialsystemen $-1 \leq \beta \leq 1$. Dies wird als Matrix geschrieben

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (5.164)$$

Die Fälle für Relativgeschwindigkeiten in andere Richtungen sind direkt zu erschließen: Die transversalen Koordinaten transformieren sich nicht, nur die longitudinale Koordinate und die Zeit transformieren sich unter Lorentz-Transformationen ineinander. Alternativ kann man die allgemeine Lorentz-Transformation durch Kombination von Drehungen und der oben angegebenen Transformation ableiten: Dann dreht man einfach das Koordinatensystem so, dass die Relativ-Bewegung in x -Richtung erfolgt, wendet dann die Lorentz-Transformation an, und zuletzt dreht man das Koordinatensystem wieder zurück. Für kleine Geschwindigkeiten im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit $v \ll c$ fällt die Lorentz-Transformation auf die Galilei-Transformation zurück, jedoch sieht man auch, dass die γ -Faktoren bei $v = c$ divergieren. Offensichtlich ist die Determinante der Transformationsmatrix gerade Eins, so dass die Lorentz-Transformation analog zu Drehungen zu behandeln ist. Der Unterschied ist aber, dass die Matrix nicht orthogonal ist, weswegen in diesem verallgemeinerten **Minkowski-Raum**, welcher Raum und Zeit gleichwertig behandelt, ein anderes Skalarprodukt benutzt wird. Oft benutzt man zur Visualisierung der Lorentz-Transformation auch ein **Minkowski-Diagramm**, vgl. Abb. 5.8. Zuletzt sei noch angemerkt, dass die Lorentz-Transformationen eine Gruppe bilden, d.h. durch Verkettung zweier Lorentz-Transformationen (Matrix-Matrix-Multiplikation) erhält man eine weitere, die Transformationen $K \rightarrow K'$ und $K' \rightarrow K''$ werden damit zu $K \rightarrow K''$.

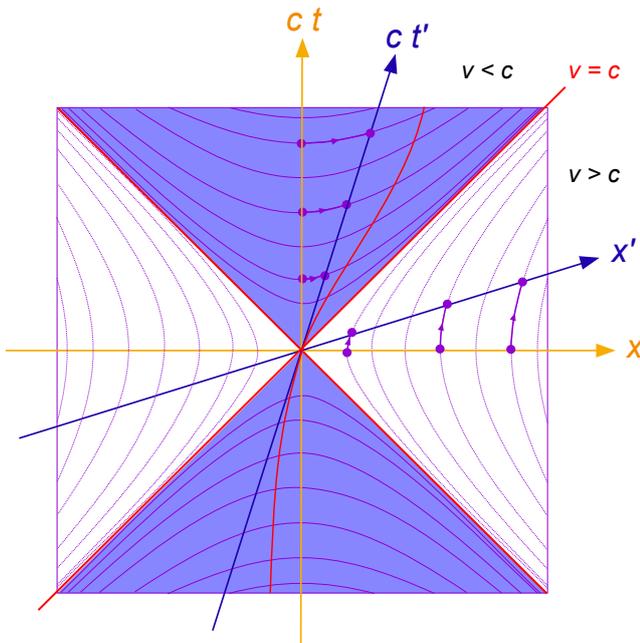


Abbildung 5.8: Darstellung eines Minkowski-Diagramms für $y = z = 0$. Ein Punkt im Diagramm entspricht einem Ereignis in der Raumzeit. Da die maximal erreichbare Geschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit ist, trennt der Lichtkegel (rot) die Raumzeit in zwei Bereiche, und nur für zeitartige Vierervektoren ($c^2t^2 > x^2 + y^2 + z^2$) können zwei Ereignisse kausal miteinander verbunden sein. Die gedrehten Achsen (blau) stellen den Effekt einer Lorentz-Transformation dar. Die rote Kurve entspricht der Weltlinie eines bewegten Objektes. Quelle: angepasst aus Wikipedia.

5.7.3 Beispiele: Längenkontraktion und Zeitdilatation

Wir betrachten einen starren Stab, der in K in Ruhe ist und längs zur x -Achse liegt mit Länge $\ell = x_2 - x_1$. Ein bewegter Beobachter misst nun zum gleichen Zeitpunkt $t' = t'_1 = t'_2$ die Orte x'_1 und x'_2 , d.h. Anfang und Ende des Stabes. Die korrespondierenden Zeiten im System K sind nicht gleich $t_1 \neq t_2$. Die zwei Ereignisse (Messung des Anfangs und des Endes vom Stab) korrespondieren zu zwei Transformationsgleichungen $i \in \{1, 2\}$

$$ct'_i = \gamma ct_i - \beta \gamma x_i, \quad x'_i = \gamma x_i - \beta \gamma ct_i, \quad (5.165)$$

und man erhält nach Elimination

$$x'_2 - x'_1 = \sqrt{1 - \beta^2}(x_2 - x_1) < x_2 - x_1, \quad (5.166)$$

d.h. der Stab erscheint dem gleichförmig bewegten Beobachter um den Faktor $\sqrt{1 - \beta^2} = 1/\gamma$ verkürzt, was als **relativistische Längenkontraktion** bekannt ist.

Ein anderes Beispiel ist die **relativistische Zeit-Dilatation**. Hier betrachtet man zwei im System K nacheinander folgende Ereignisse, z.B. das Aussenden von Lichtpulsen bei $t_1 < t_2$ vom gleichen Orte $x_1 = x_2$. Ein gegenüber K bewegter Beobachter erfasst diese Signale zu verschiedenen Zeiten (und Orten, Evaluation der Transformationsgleichungen ergibt $x'_2 - x'_1 = -\beta \gamma c(t_2 - t_1)$), so dass sich für die Differenz der beiden Zeiten im bewegten Koordinatensystem K' ergibt

$$c(t'_2 - t'_1) = \gamma c(t_2 - t_1) > c(t_2 - t_1). \quad (5.167)$$

Die Abfolge der Ereignisse 1 und 2 im Bezugssystem K erscheint also im System K' verlangsamt, man spricht daher auch von relativistischer Zeitdilatation. Dies kann direkt beobachtet werden an π -Mesonen, welche durch kosmische Protonen in der oberen Atmosphäre entstehen können (in ca. 30 km Höhe). Diese zerfallen jedoch in ihrem Ruhesystem weiter in ein Myon und ein Neutrino, dieser Prozess hat eine Halbwertszeit von $\delta t \approx 2 \cdot 10^{-6}$ s. Selbst wenn die Mesonen mit Lichtgeschwindigkeit unterwegs wären, wäre daher nach Galilei-Transformation nach ca. 600m Flugstrecke nur noch die Hälfte der π -Mesonen vorhanden. Da die Mesonen sich jedoch mit $\beta \approx 0.9998$ relativistisch bewegen, erscheint die Zeit zwischen Ihrer Erzeugung und ihrem Zerfall jeweils durch den relativistischen γ -Faktor gedehnt, und man erhält einen Faktor von

$\gamma \approx 50$. Das bedeutet, dass erst nach ca. 30 km die Hälfte der Mesonen zerfallen sind und es erklärt, warum die Mesonen auf der Erdoberfläche detektiert werden können. Natürlich können diese Fragestellungen auch umgekehrt werden, da die Inertialsysteme gleichberechtigt sind. So erscheint dem Meson die Strecke vom Ort seiner Erzeugung bis zur Erdoberfläche um den Faktor 50 verkürzt, im Resultat ist es ihm auch möglich die Erdoberfläche in seiner Lebensspanne zu erreichen.

5.7.4 Vierervektoren

Mathematisch hat die Lorentz-Transformation die Eigenschaften einer Drehung, denn ihre Determinante ist Eins. Sie lässt jedoch nicht ein normales Skalarprodukt invariant, sondern ein indefinites, welches wir näher beleuchten wollen. Der Konvention folgend, nutzen wir die **Einsteinsche Summenkonvention**: Über identische – oben und unten geschriebene – Indizes wird automatisch summiert. Wir fassen die Zeit und die Ortskoordinaten zu einem Vierervektor zusammen, dessen Komponenten in der Regel mit griechischen Indizes, z.B. $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$ bezeichnet werden.

Es gibt **kontravariante Vierervektoren**, gekennzeichnet durch hochgestellte Indizes, wie z.B. den kontravarianten Orts-Vierervektor

$$x^\mu = \begin{cases} ct & : \mu = 0 \\ x & : \mu = 1 \\ y & : \mu = 2 \\ z & : \mu = 3 \end{cases} \quad (5.168)$$

und **kovariante Vierervektoren**, gekennzeichnet durch tiefgestellte Indizes, wie den kovarianten Orts-Vierervektor

$$x_\mu = \begin{cases} ct & : \mu = 0 \\ -x & : \mu = 1 \\ -y & : \mu = 2 \\ -z & : \mu = 3 \end{cases} \quad (5.169)$$

Kovariante und kontravariante Vierervektoren werden durch Anwendung des metrischen Tensors ineinander überführt

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu, \quad x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu. \quad (5.170)$$

Als Matrix schreibt sich der **metrische Tensor** als

$$\eta = (\eta_{\mu\nu}) = (\eta^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (5.171)$$

und es gilt $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$. Hier gibt es verschiedene Konventionen in der Literatur, z.B. $\eta \rightarrow -\eta$ und oft wird die Zeit auch als vierte Komponente der Vierervektoren geschrieben. Andere Formulierungen der Speziellen Relativitätstheorie nutzen die imaginäre Einheit, um das unterschiedliche Vorzeichen der Raum- und Zeitkoordinaten im Skalarprodukt des Minkowski-Raumes zu generieren. Man definiert im Minkowski-Raum ein **indefinites Skalarprodukt** (Summenkonvention beachten)

$$\underline{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{y}} = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^\mu y_\mu = x_\mu y^\mu. \quad (5.172)$$

Im Unterschied zum normalen Skalarprodukt induziert dieses keine Norm, d.h. wir können $x_\mu x^\mu < 0$ haben. Ein Vierervektor x^μ wird mit einem Ereignis in der Raumzeit assoziiert, und man sieht, dass das Produkt eines kovarianten und eines kontravarianten Raumzeit-Vierervektors invariant unter Lorentz-Transformationen ist

$$x_\mu x^\mu = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (5.173)$$

Eine Lorentz-Transformation lässt sich dann für kontravariante Vierervektoren schreiben als

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu. \quad (5.174)$$

wobei Λ gerade die Lorentz-Transformationsmatrix in (5.164) ist. Für die Transformation kovarianter Vierervektoren benutzen wir den metrischen Tensor

$$x'_\sigma = \eta_{\sigma\mu} \Lambda^\mu_\nu \eta^{\nu\kappa} x_\kappa \equiv \Lambda_\sigma^\kappa x_\kappa. \quad (5.175)$$

Analog zu Drehungen, welche das Skalarprodukt im euklidischen Raum invariant lassen, ist das indefinite Skalarprodukt zwischen kovarianten und kontravarianten Vierervektoren auch invariant zu Lorentz-Transformationen

$$\underline{\mathbf{x}'} \cdot \underline{\mathbf{y}'} = \eta_{\mu\nu} x'^\mu y'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\kappa x^\sigma y^\kappa = \Lambda^\mu_\sigma \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\kappa x^\sigma y^\kappa = \eta_{\sigma\kappa} x^\sigma y^\kappa = \underline{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{y}}. \quad (5.176)$$

Dies kommt, weil innerhalb der speziellen Relativitätstheorie für Lorentz-Transformationen gilt

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\kappa = \eta_{\sigma\kappa}. \quad (5.177)$$

In der Tat finden wir

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.178)$$

Wenn man also einen Vierervektor gefunden hat, ist sein Skalarprodukt unter Lorentz-Transformationen eine Invariante. Wir geben hier nur bekannte Lösungen an, für tiefergehende Behandlungen sei auf Vorlesungen zur Relativitätstheorie verwiesen.

Um eine Vierergeschwindigkeit einzuführen, könnte man probieren, den Raumzeit-Vierervektor nach der Zeit zu differenzieren. Jedoch wäre das Resultat kein Vierervektor mehr, denn die Zeit ändert sich ja unter Lorentz-Transformationen, so dass $(\partial_t x^\mu)(\partial_t x_\mu)$ z.B. keine Invariante mehr ist. Um diese Zeitdilatation zu kompensieren, definiert man die sogenannte **Eigenzeit**

$$d\tau = \sqrt{\frac{dx_\mu dx^\mu}{c^2}} = \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}} = dt \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (5.179)$$

wobei $\beta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{c^2}$. Anschaulich ist die Eigenzeit $d\tau$ die Zeit, welche im bewegten System, welches sich relativ zum Laborsystem (mit Zeitinkrement dt) mit Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegt, gemessen wird. Die kontravariante Vierergeschwindigkeit wird definiert als $v^\mu = dx^\mu/d\tau = \gamma dx^\mu/dt$, man erhält

$$v^\mu = \begin{cases} \gamma c & : \mu = 0 \\ \gamma v_x & : \mu = 1 \\ \gamma v_y & : \mu = 2 \\ \gamma v_z & : \mu = 3 \end{cases}, \quad (5.180)$$

wobei $\gamma = [1 - \mathbf{v}^2/c^2]^{-1/2}$, und $v_i = dx_i/dt$, die kovariante Form erhält man durch Indexziehen $v_\mu = \eta_{\mu\nu}v^\nu$. Die dazu gehörige Lorentz-Invariante ist

$$v_\mu v^\mu = c^2, \quad (5.181)$$

was nur die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in jedem Inertialsystem ausdrückt. Wenn man die Geschwindigkeit vom Koordinatensystem K in das Koordinatensystem K' umrechnen möchte, wendet man entsprechend die Lorentz-Transformation auf den Vierervektor der Geschwindigkeiten an. Dies kann man z.B. nutzen um das Additionstheorem der Geschwindigkeiten abzuleiten.

Der kontravariante Vierer-Impuls eines Teilchens mit der Ruhemasse m_0 wird eingeführt als $p^\mu = m_0 v^\mu$

$$p^\mu = \begin{cases} \gamma m_0 c & : \mu = 0 \\ \gamma m_0 v_x & : \mu = 1 \\ \gamma m_0 v_y & : \mu = 2 \\ \gamma m_0 v_z & : \mu = 3 \end{cases} \equiv \begin{cases} \frac{E}{c} & : \mu = 0 \\ p_x & : \mu = 1 \\ p_y & : \mu = 2 \\ p_z & : \mu = 3 \end{cases}, \quad (5.182)$$

und die kovariante Version wird wieder durch den metrischen Tensor bestimmt $p_\mu = \eta_{\mu\nu}p^\nu$, welcher effektiv nur das Vorzeichen der drei räumlichen Komponenten ändert. Hier haben wir die effektive Masse $m = \gamma m_0$ eingeführt und dann die konventionelle Definition des Impulses $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ eingesetzt. Dass die 0-Komponente als Gesamtenergie $E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 + T$, zusammengesetzt aus Ruheenergie $m_0 c^2$ und kinetischer Energie T , interpretiert wird, ist ein zentrales Resultat der speziellen Relativitätstheorie, welches wir hier nur angeben. Man kann es erhalten aus der Betrachtung der Arbeit, welche nötig ist, ein Teilchen auf die Geschwindigkeit \mathbf{v} zu beschleunigen. Das Skalarprodukt zwischen kovarianten und kontravarianten Viererimpuls ist eine Lorentz-Invariante, d.h.

$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = m_0^2 c^2, \quad (5.183)$$

wobei die rechte Seite folgt wenn man den Grenzfall verschwindenden Dreierimpulses betrachtet, so dass $E_0 = m_0 c^2$ die Ruheenergie und m_0 die Ruhemasse des Teilchens darstellt. Umstellen nach der Gesamtenergie liefert die **relativistische Energie-Impuls-Beziehung**

$$E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = m_0^2 c^4 + c^2 \gamma^2 m_0^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}. \quad (5.184)$$

Man sieht, dass die Energie divergiert für $v \rightarrow c$, da die γ -Faktoren divergieren. Ein Teilchen mit endlicher Ruhemasse m_0 kann daher nicht auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigt werden. Umgekehrt kann man für kleine Geschwindigkeiten die Ruheenergie abziehen und erhält

$$E - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left[\sqrt{1 + \beta^2 \gamma^2} - 1 \right] = m_0 c^2 \left[1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \mathcal{O}\{\beta^4\} - 1 \right] = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \mathcal{O}\{\beta^4\}, \quad (5.185)$$

was die bekannte nichtrelativistische kinetische Energie reproduziert.

5.7.5 Kovariante Notation der Elektrodynamik

Die einfache aber effektive Idee ist, sämtliche Größen durch Vierervektoren auszudrücken. Lorentz-Skalare bilden dann automatisch Invarianten über Lorentz-Transformationen. Vierervektoren können ganz normal mittels der Lorentz-Transformation in verschiedene Koordinatensysteme überführt werden.

Wir definieren zunächst die kovariante **Vierer-Ableitung** aus der Ableitung nach dem kontravarianten Vierer-Ort

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \begin{cases} \frac{1}{c}\partial_t & : \mu = 0 \\ \partial_x & : \mu = 1 \\ \partial_y & : \mu = 2 \\ \partial_z & : \mu = 3 \end{cases} . \quad (5.186)$$

Die kontravariante Ableitung erhält man wieder durch Index-Ziehen $\partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu$. Offensichtlich gilt

$$\partial_\mu\partial^\mu = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta = -\square . \quad (5.187)$$

Die Wellengleichung im Vakuum ist immer die gleiche, unabhängig vom Inertialsystem, damit ist also auch die Lichtgeschwindigkeit in jedem Inertialsystem konstant. Offensichtlich ist auch $\partial_\mu x^\mu = +4$ eine Invariante.

Für einen bewegten Beobachter transformieren sich Ladungs- und Stromdichten ineinander. Die kontravariante **Vierer-Stromdichte** erhält man also durch Zusammenfassen von Ladungsdichte und Stromdichte

$$j^\mu = \begin{cases} c\rho & : \mu = 0 \\ j_x & : \mu = 1 \\ j_y & : \mu = 2 \\ j_z & : \mu = 3 \end{cases} \quad (5.188)$$

Dann kodiert die Lorentz-Invariante $\partial_\mu j^\mu$ gerade die **Kontinuitätsgleichung**

$$0 = \partial_\mu j^\mu . \quad (5.189)$$

Das kontravariante **Vierer-Potential** wird definiert durch

$$A^\mu = \begin{cases} \Phi & : \mu = 0 \\ A_x & : \mu = 1 \\ A_y & : \mu = 2 \\ A_z & : \mu = 3 \end{cases} . \quad (5.190)$$

Die Lorentz-Invariante $\partial_\mu A^\mu$ kodiert dann gerade die **Lorenz-Eichung**

$$\partial_\mu A^\mu = 0 . \quad (5.191)$$

Diese gilt also, wenn einmal etabliert, in jedem Inertialsystem. In dieser Eichung entkoppeln ja die Gleichungen für das skalare Potential Φ und das Vektorpotential \mathbf{A} , vgl. (5.26). Wir schreiben diese Gleichungen jetzt Lorentz-kovarianter Notation kompakt

$$\partial_\nu\partial^\nu A^\mu = \frac{4\pi}{c}j^\mu , \quad (5.192)$$

wobei der Differentialoperator $\partial_\nu\partial^\nu = -\square$ auf alle Komponenten μ separat wirkt (Summenkonvention beachten). Damit haben wir im Prinzip schon die Maxwell-Gleichungen kovariant notiert, allerdings nur für eine spezielle Wahl der Lorenz-Eichung. Die Felder sind jedoch dadurch schon eindeutig bestimmt.

Ausgehend von den Potentialen erhalten wir diese über die Relation

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} . \quad (5.193)$$

Definieren wir einen **antisymmetrischen Feldstärketensor**

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (5.194)$$

so folgt, dass dieser Tensor die elektrischen und magnetischen Felder enthält, z.B. finden wir für die 12-Komponente und die 03-Komponente (Kontravarianz von ∂^μ beachten)

$$\begin{aligned} F^{12} &= \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 = -\partial_x A_y + \partial_y A_x = -B_z, \\ F^{03} &= \partial^0 A^3 - \partial^3 A^0 = +\frac{1}{c}\partial_t A_z + \partial_z \Phi = -E_z. \end{aligned} \quad (5.195)$$

Allgemein wird der kontravariante Feldstärketensor zu

$$(F^{\text{kontra}}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ +E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ +E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ +E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.196)$$

Der entsprechende kovariante Tensor ergibt sich durch Index-Ziehen zu $F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\kappa}F^{\sigma\kappa}$, bei ihm wechselt das Vorzeichen der elektrischen Feldstärke. An der Definition des Feldstärketensors (5.194) sieht man auch sofort die Eichinvarianz unter Transformationen der Form $A^\alpha \rightarrow A^\alpha + \partial^\alpha \Lambda$. Da dieser Tensor 2. Stufe aus kontravarianten Tensoren 1. Stufe in (5.194) zusammengesetzt ist, können wir direkt sein Verhalten unter Lorentz-Transformationen berechnen, d.h. für einen gleichförmig bewegten Beobachter transformieren sich elektrische und magnetische Felder ineinander. Die **Maxwell-Gleichungen in kovarianter Formulierung** sind mit diesen Definitionen leicht hinzuschreiben, insbesondere finden wir

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c}j^\beta, \quad \partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} = 0. \quad (5.197)$$

Die erste dieser Gleichungen kodiert die vier inhomogenen Maxwell-Gleichungen $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ und $\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$. Sie ist sofort ersichtlich bei Coulomb-Eichung, jedoch ist der Feldstärketensor invariant gegenüber Eichtransformationen. Die zweite Gleichung kodiert die vier homogenen Gleichungen $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ und $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{B} = 0$ (Gleichungen mit zyklischen Vertauschungen der Indizes sind redundant und alle Indizes müssen verschieden sein). Sie folgt schon aus der Antisymmetrie des Feldstärketensors, und durch Schreiben der Felder als Ableitungen von Potentialen waren die homogenen Maxwellgleichungen ja sowieso schon erfüllt.

Der Vorteil einer kovarianten Darstellung liegt darin, dass einerseits die mikroskopischen Gleichungen einfacher und symmetrischer werden und andererseits spiegelt sie die Kovarianz der Gleichungen gegenüber Lorentz-Transformationen wieder, diese ist in der ursprünglichen Form der Gleichungen nicht klar ersichtlich. Wir können das ausnutzen, indem wir z.B. die Lösung für die Potentiale in einem Bezugssystem ausrechnen (wo z.B. aufgrund einer ruhenden Ladungsverteilung die Elektrostatik anwendbar ist) und diese dann in ein bewegtes Bezugssystem transformieren.

Wir definieren kurz und ohne Ableitung auch den **Energie-Impuls-Tensor**

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[F^{\mu\lambda}\eta_{\lambda\sigma}F^{\sigma\nu} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\kappa\sigma}F^{\sigma\kappa} \right]. \quad (5.198)$$

Dieser ist symmetrisch $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, und die entsprechenden kovarianten Formen des Feldstärketensors können durch Index-Ziehen mit dem metrischen Tensor erzeugt werden, z.B. $F_{\kappa\sigma} = \eta_{\kappa\mu}\eta_{\sigma\nu}F^{\mu\nu}$. Für den Kraftdichte-Vierervektor gilt dann

$$f^\nu = \partial_\mu T^{\mu\nu}. \quad (5.199)$$

Die explizite Form des Energie-Impuls-Tensors ist

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \omega & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & -T_{11} & -T_{12} & -T_{13} \\ S_y/c & -T_{21} & -T_{22} & -T_{23} \\ S_z/c & -T_{31} & -T_{32} & -T_{33} \end{pmatrix}, \quad (5.200)$$

wobei ω die Energiedichte (5.52) des elektromagnetischen Feldes, \mathbf{S} der Poynting-Vektor (5.51), und T_{ij} der Maxwell'sche Spannungstensor (5.67) – jeweils mit $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ und $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ – sind. Er fasst also Energiedichte und Impulsflussdichte sowie die entsprechenden Randbedingungen des Maxwell'schen Spannungstensors zusammen.

Die Lorentz-Kraft lässt sich mit der Eigenzeit $d\tau = \gamma^{-1}dt$ schreiben als

$$m_0 \frac{dv^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} v_\nu, \quad (5.201)$$

d.h. wir erhalten sie aus dem Feldstärketensor und der kovarianten Vierergeschwindigkeit. Einsetzen liefert für $\mu = 0$ die Relation

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_0 c^2) = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}, \quad (5.202)$$

was bedeutet, dass die Leistung, welche die kinetische Energie des Teilchens ändert, gerade durch das elektrische Feld erbracht wird, vgl. Abschnitt 5.4.1. Für $\mu \in \{1, 2, 3\}$ erhalten wir gerade

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_0 \mathbf{v}) = q \mathbf{E} + \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (5.203)$$

wobei die rechte Seite gerade die bekannte Lorentz-Kraft liefert. Die Kovarianz der Gleichung impliziert, dass diese auch relativistisch richtig ist. Jedoch muss die linke Seite neu interpretiert werden, hier steht jetzt die Zeitableitung des Vierer-Impulses, d.h. die Zunahme der effektiven Masse muss berücksichtigt werden.

5.7.6 Transformation der Felder

Eine Möglichkeit, das Transformationsverhalten der Felder zu berechnen wäre über die Transformation der Potentiale. Im bewegten Koordinatensystem erhalten wir einfach für das kontravariante Viererpotential

$$A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu. \quad (5.204)$$

Schreiben wir die Komponenten explizit, bedeutet dies einfach wenn sich z.B. K' in K mit $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$ bewegt

$$\begin{pmatrix} \Phi' \\ A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}. \quad (5.205)$$

Der Vierervektor A^μ hängt natürlich noch von den Koordinaten in K ab, diese müssen auch durch die Koordinaten in K' ausgedrückt werden, so dass dann über

$$F'^{\mu\nu} = \partial'^\mu A'^\nu - \partial'^\nu A'^\mu \quad (5.206)$$

schließlich die Felder in K' ausgerechnet werden können.

Wir können aber das Transformationsverhalten der Felder auch direkt ableiten aus

$$\begin{aligned} F'^{\mu\nu} &= \partial'^{\mu} A'^{\nu} - \partial'^{\nu} A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\sigma} \partial^{\sigma} \Lambda^{\nu}_{\kappa} A^{\kappa} - \Lambda^{\nu}_{\sigma} \partial^{\sigma} \Lambda^{\mu}_{\kappa} A^{\kappa} = \Lambda^{\mu}_{\sigma} \Lambda^{\nu}_{\kappa} (\partial^{\sigma} A^{\kappa} - \partial^{\kappa} A^{\sigma}) \\ &= \Lambda^{\mu}_{\sigma} \Lambda^{\nu}_{\kappa} F^{\sigma\kappa}. \end{aligned} \quad (5.207)$$

Das ist einfach nur eine Matrix-Multiplikation mit der Lorentz-Transformation von links und von rechts an den Feldstärketensor, z.B. für $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ erhält man daraus die Transformation der Felder über

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & -E'_x & -E'_y & -E'_z \\ +E'_x & 0 & -B'_z & +B'_y \\ +E'_y & +B'_z & 0 & -B'_x \\ +E'_z & -B'_y & +B'_x & 0 \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ +E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ +E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ +E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.208)$$

Auswerten der Matrix-Matrix-Multiplikation liefert die Beziehungen

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \gamma E_y - \beta\gamma B_z, & E'_z &= \gamma E_z + \beta\gamma B_y, \\ B'_x &= B_x, & B'_y &= \gamma B_y + \beta\gamma E_z, & B'_z &= \gamma B_z - \beta\gamma E_y, \end{aligned} \quad (5.209)$$

d.h. jetzt transformieren sich die transversalen Komponenten vom elektrischen und magnetischen Feld ineinander, wohingegen die longitudinalen Komponenten invariant bleiben. Wenn $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ gegeben sind, beschreibt diese Transformation das Verhalten der Felder. Um letztlich zu erfahren, welche Felder ein bewegter Beobachter messen würde, müssen aber noch die Orts- und Zeitkoordinaten ineinander transformiert werden, denn der bewegte Beobachter wird die Felder $\mathbf{E}'(\mathbf{r}', t')$ und $\mathbf{B}'(\mathbf{r}', t')$ messen.

5.7.7 Beispiel: Gleichförmig bewegte Ladungsverteilung

Wir kehren zu unserer Motivation am Anfang zurück und betrachten die stationäre und räumlich begrenzte Ladungsverteilung $\rho_0(x, y, z)$.

Im Ruhesystem dieser Ladungsverteilung gilt für die kontravariante Viererstromdichte

$$j'^{\mu} = \begin{cases} c\rho_0(x', y', z') & : \mu = 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (5.210)$$

In diesem Koordinatensystem ist die Lösung der Maxwell-Gleichungen einfach, wir erhalten z.B. für die Potentiale aus der Lösung für die Poisson-Gleichung

$$\Phi'(\mathbf{r}', t') = \int \frac{\rho_0(\bar{\mathbf{r}}')}{|\mathbf{r}' - \bar{\mathbf{r}}'|} d^3\bar{\mathbf{r}}', \quad \mathbf{A}'(\mathbf{r}', t') = \mathbf{0}. \quad (5.211)$$

Hier ist wegen der Zeitunabhängigkeit vom skalaren Potential die Lorenz-Eichung erfüllt, und da sie eine Lorentz-Invariante ist, gilt dies auch in anderen Inertialsystemen. Die Felder in diesem Koordinatensystem berechnen sich zu

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}', t') = \int \frac{\rho_0(\bar{\mathbf{r}}')\bar{\mathbf{r}}'}{|\mathbf{r}' - \bar{\mathbf{r}}'|^3} d^3\bar{\mathbf{r}}', \quad \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t') = \mathbf{0}. \quad (5.212)$$

Im Laborsystem bewegt sich die Ladungsverteilung mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$. Wir erhalten die Ladungsdichte im Laborsystem und die Stromdichte in x -Richtung durch Anwendung der inversen Lorentz-Transformation ($\beta \rightarrow -\beta$) auf die Vierer-Stromdichte

$$\begin{pmatrix} c\rho \\ j_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma \\ +\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\rho_0(x', y', z') \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.213)$$

und durch Ersetzen der mitbewegten Koordinaten durch die Labor-Koordinaten mit Hilfe der ursprünglichen Lorentz-Transformation

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}. \quad (5.214)$$

Es ergibt sich mit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \gamma\rho_0(\gamma(x - vt), y, z), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}\rho(\mathbf{r}, t). \quad (5.215)$$

Die Ladungsverteilung erscheint im Laborsystem gestaucht in Richtung der Relativgeschwindigkeit – eine Konsequenz der Lorentz-Kontraktion. Gleichzeitig erscheint der γ -Vorfaktor, da die Gesamtladung eine Lorentz-Invariante ist, was mit einer einfachen Variablentransformation zu zeigen ist

$$\int \rho_0(x', y', z') d^3r' = \gamma \int \rho_0(\gamma(x - vt), y, z) d^3r. \quad (5.216)$$

Wir berechnen die Potentiale im Laborsystem durch Anwendung der inversen Lorentz-Transformation auf das Vierer-Potential

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ A_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma \\ +\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi' \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.217)$$

und nach Elimination der Koordinaten von K' ergibt sich

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \gamma \int \frac{\rho_0(\bar{\mathbf{r}}')}{\sqrt{(\gamma x - \beta\gamma ct - \bar{x}')^2 + (y - \bar{y}')^2 + (z - \bar{z}')^2}} d^3\bar{r}', \quad A_x(\mathbf{r}, t) = \beta\Phi(\mathbf{r}, t), \quad (5.218)$$

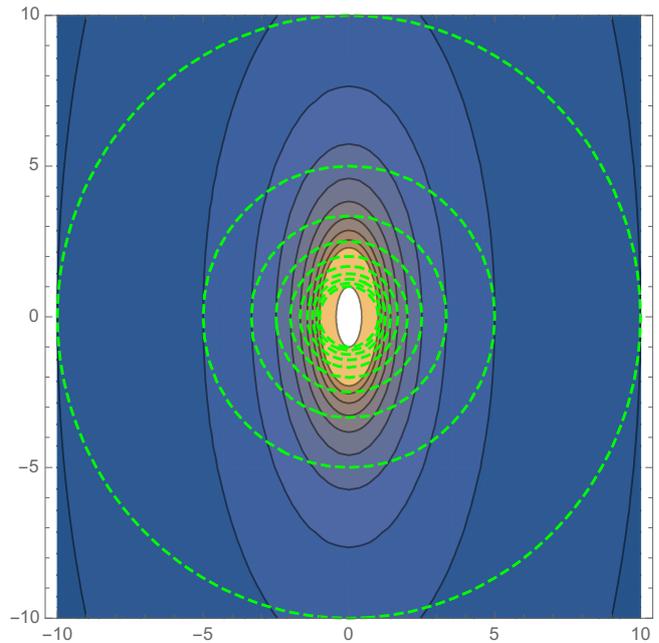
und die anderen Komponenten des Vierer-Potentials verschwinden. Für eine Punktladung wird dies natürlich besonders einfach. Für eine homogene radialsymmetrische Ladungsverteilung ist das skalare Potential Φ im Laborsystem in Abb. 5.9 dargestellt. Man sieht, dass die Äquipotentialflächen durch die Lorentzkontraktion gestaucht sind. Wir hatten ja die Potentiale in Lorenz-Eichung aufgestellt, diese Eichung ist invariant gegenüber Lorentz-Transformationen, so dass sie auch im Laborsystem gilt (was man oben direkt nachprüfen kann). Also müssen im Labor-System die inhomogenen Wellengleichungen

$$\square\Phi(\mathbf{r}, t) = -4\pi\rho(\mathbf{r}, t), \quad \square\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (5.219)$$

erfüllt sein. Wir zeigen das zunächst für das skalare Potential

$$\begin{aligned} \square\Phi(\mathbf{r}, t) &= \gamma \int \left[\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right] \frac{\rho_0(\bar{\mathbf{r}}')}{\sqrt{(\gamma x - \beta\gamma ct - \bar{x}')^2 + (y - \bar{y}')^2 + (z - \bar{z}')^2}} d^3\bar{r}' \\ &= \gamma \int \left[\partial_{x'}^2 + \partial_{y'}^2 + \partial_{z'}^2 - \frac{1}{c^2} \partial_{t'}^2 \right] \frac{\rho_0(\bar{\mathbf{r}}')}{\sqrt{(x' - \bar{x}')^2 + (y' - \bar{y}')^2 + (z' - \bar{z}')^2}} d^3\bar{r}' \\ &= -4\pi\gamma\rho_0(x', y', z') = -4\pi\gamma\rho_0(\gamma x - \beta\gamma ct, y, z), \end{aligned} \quad (5.220)$$

Abbildung 5.9: Konturplot des skalaren Potentials einer radialsymmetrischen homogenen Ladungsverteilung, welche sich mit $v\mathbf{e}_x$ im Laborsystem (von links nach rechts) bewegt. Die weiße Fläche in der Mitte zeigt die Ladungsverteilung im Laborsystem, die gestrichelten Linien zeigen den Vergleich mit dem Potential der ruhenden Ladungsverteilung. Parameter $ct = 0$, $\beta = 0.9$, Konturlinien in Schritten von $0.1a.u.$. Mathematica-Kommandos: ContourPlot, Show.



wobei wir die Invarianz des Quabla-Operators unter Lorentz-Transformationen, die Unabhängigkeit von t' und die 3d-Darstellung der δ -Funktion ausgenutzt haben. Wegen $A_x = \beta\Phi$ und $j_x = v\rho$ folgt die inhomogene Wellengleichung für die Komponenten des Vektorpotentials aus der oben gezeigten. Aus den Potentialen können wir jetzt die Felder im Laborsystem berechnen, dies kann entweder durch (5.218) geschehen oder aber durch direktes Auflösen von (5.209) nach \mathbf{E} und \mathbf{B} und ausdrücken von \mathbf{r}' und t' durch \mathbf{r} und t , das Resultat wäre das Gleiche. Hätten wir versucht, die inhomogenen Wellengleichungen im Laborsystem zu lösen, wäre dies deutlich schwieriger gewesen.

5.7.8 Beispiel: Doppler-Effekt

Wir können ebene Wellen auch mit dem Vierer-Wellenvektor beschreiben

$$(k^\mu) = \begin{pmatrix} \omega/c \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}, \quad (5.221)$$

wobei $\omega = \pm kc$. Offensichtlich gilt $k_\mu k^\mu = 0$ in jedem Inertialsystem. Das Vektorpotential einer ebenen Welle lässt sich dann schreiben als

$$\mathbf{A} = \Re \mathbf{A}_0 e^{-ix_\mu k^\mu} = \Re \mathbf{A}_0 e^{+i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (5.222)$$

Ein Signal, welches von einer bewegten Quelle (K') ausgesandt wird, welche sich mit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ im System des Beobachters (K) bewegt, erscheint diesem also frequenzverschoben, man erhält aus

$$\omega' = \gamma\omega - \beta\gamma ck_x = \gamma[\omega - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}] = \gamma\left[\omega - v\frac{\omega}{c} \cos(\theta)\right] \quad (5.223)$$

wobei θ der in K beobachtete Winkel zwischen \mathbf{v} und \mathbf{k} ist, durch Umstellen

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos(\theta)}. \quad (5.224)$$

Im Gegensatz dazu hängt der akustische Dopplereffekt von den Relativ-Geschwindigkeiten Sender-Medium und Empfänger-Medium ab und nicht nur von der Relativgeschwindigkeit Sender-Empfänger.

Kapitel 6

Strahlung

6.1 Heuristische Einführung in die Funktionentheorie

Die Funktionentheorie behandelt komplexwertige Funktionen einer komplexwertigen Variablen (Abbildungen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$). Dabei gibt es fundamentale Unterschiede zu reellen Funktionen, welche viele Zusammenhänge extrem vereinfachen. Im Folgenden werden wir für eine komplexwertige Funktion $f(z)$ immer die Zerlegung

$$\begin{aligned} z &= x + iy & : & \{x, y \in \mathbb{R}\} \\ f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) & : & \{u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}\} \end{aligned} \quad (6.1)$$

annehmen, d.h. x und y bezeichnen Real- bzw. Imaginärteil der komplexen Variable z und u und v stehen für Real- bzw. Imaginärteil der Funktion $f(z)$.

6.1.1 Differenzieren in \mathbb{C}

Die Differenzierbarkeit komplexwertiger Funktionen wird analog zum Reellen definiert. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass es bei dem Limes

$$f'(z) := \lim_{z' \rightarrow z} \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} \quad (6.2)$$

im Komplexen unendlich viele verschiedene Wege der Annäherung von $z' \rightarrow z$ gibt, während es im Reellen nur zwei solcher Wege, nämlich den rechts- und linksseitigen Limes gibt. Analog zum Reellen definiert man also die Ableitung einer komplexen Funktion $f(z)$ über den Limes des Differenzenquotienten, wenn der Limes in (6.2)

- a.) existiert und
- b.) wegunabhängig ist.

Die Funktion $f(z)$ heißt dann in z *komplex differenzierbar*. Falls $f(z)$ in einer U_ε -Umgebung von z_0 komplex differenzierbar ist, dann nennt man f eine **holomorphe Funktion** in z_0 .

Aus der Forderung der Wegunabhängigkeit folgt einerseits

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Andererseits muss aber auch gelten

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) + iv(x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{i\Delta y} \\
 &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y} \\
 &= -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y},
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

denn $f(z)$ ist ja nach unserer Annahme komplex differenzierbar. Vergleicht man die Real- und Imaginärteile von Gleichungen (6.3) und (6.4), erhält man die **Cauchy-Riemann Differentialgleichungen**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{6.5}$$

auf welchen die gesamte Funktionentheorie basiert. Real- und Imaginärteile holomorpher Funktionen hängen also zusammen.

Zur komplexen Differenzierbarkeit gilt folgender Satz:

Die Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ist in z_0 genau dann komplex differenzierbar, wenn:

1. Realteil $u(x_0, y_0)$ und Imaginärteil $v(x_0, y_0)$ in (x_0, y_0) total differenzierbar sind und
2. Die Cauchy-Riemannschen DGL ($\partial_x u = \partial_y v$, $\partial_y u = -\partial_x v$) in (x_0, y_0) erfüllt sind.

Dann ist die Ableitung gegeben durch $f'(z_0) = (\partial_x u)(x_0, y_0) + i(\partial_x v)(x_0, y_0) = (\partial_y v)(x_0, y_0) - i(\partial_y u)(x_0, y_0)$.

Viele Funktionen, die uns aus dem Reellen schon bekannt sind, lassen sich über die Potenzreihenentwicklung nach ganz \mathbb{C} fortsetzen, z.B.

- die Sinusfunktion (in ganz \mathbb{C} holomorph)

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{6.6}$$

- die Cosinusfunktion (in ganz \mathbb{C} holomorph)

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \tag{6.7}$$

- die Exponentialfunktion (in ganz \mathbb{C} holomorph)

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \tag{6.8}$$

$$\cos(z) + i \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = \exp(iz) \tag{6.9}$$

Letztere Beziehung reduziert sich für $z \in \mathbb{R}$ auf die bekannte Euler'sche Formel.

Wir wollen noch einige Eigenschaften der komplexen Ableitung zusammenfassen:

1. durch die analoge Definition zur reellen Ableitung gelten auch in \mathbb{C} die Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel

2. Real- und Imaginärteil holomorpher Funktionen erfüllen die Laplacegleichung: $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 = \partial_x^2 v + \partial_y^2 v$, das ist eine direkte Folge von (6.5). Wenn man daher eine holomorphe Funktion auf dem Rand eines Gebietes $G \subset \mathbb{C}$ kennt, ist sie für alle $x \in G$ festgelegt.
3. man zeigt leicht: alle Polynome in z sind in \mathbb{C} holomorph
4. Es bestehen fundamentale Unterschiede zum \mathbb{R}^2 . So ist zum Beispiel die Funktion $f(z) = z^*z = x^2 + y^2$ zwar total differenzierbar in \mathbb{R}^2 , aber nicht holomorph, weil (6.5) nicht erfüllt ist.

6.1.2 Anwendung: Lösung der zweidimensionalen Laplacegleichung

In zwei Dimensionen können holomorphe Funktionen genutzt werden um die Laplace-Gleichung zu lösen. Sei z.B. auf dem Kreis mit Radius R das Potential $\Phi(\phi)$ als Funktion des Winkels ϕ am Rand, d.h. für $r = R$ durch die Funktion $g(\phi)$ vorgegeben (Dirichlet Randbedingungen). Wir suchen diejenige holomorphe Funktion $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, für welche gilt

$$\Re f(R \cos \phi + iR \sin \phi) = u(R \cos \phi, R \sin \phi) = g(\phi). \quad (6.10)$$

Diese Funktion löst wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen die Laplacegleichung und erfüllt die gestellte Randbedingung. Da alle Polynome in \mathbb{C} holomorph sind, liegt es nahe, eine Potenzreihe anzusetzen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (6.11)$$

Für die Randbedingung bedeutet dies

$$g(\phi) = \Re \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n e^{+in\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{2} [a_n e^{+in\phi} + a_n^* e^{-in\phi}]. \quad (6.12)$$

Die Entwicklungskoeffizienten können wir dann sofort aus der Orthonormalität der Funktionen bestimmen

$$a_{n>0} = \frac{2}{R^n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\phi) e^{-in\phi} d\phi, \quad \frac{1}{2}(a_0 + a_0^*) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\phi) d\phi. \quad (6.13)$$

Die gesuchte Funktion, welche sowohl die Laplace-Gleichung löst als auch die Randbedingung erfüllt, ist dann also

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} [a_n (x + iy)^n + a_n^* (x - iy)^n], \quad (6.14)$$

was sich in der Tat leicht nachprüfen lässt.

6.1.3 Integrieren in \mathbb{C}

Wie im Reellen wird das Integral eines Weges über die Riemann'sche Summe definiert, für die praktische Berechnung eines Integrals greift man jedoch auf die Parametrisierung des Integrationsweges c durch eine Kurve $c(t) : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \rightarrow c \subset \mathbb{C}$ zurück:

$$\int_c f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[c(t)] \dot{c}(t) dt. \quad (6.15)$$

Damit sind komplexe auf reelle Integrale zurückgeführt.

Im **Fundamentalbeispiel der Funktionentheorie** betrachtet man das geschlossene Integral im mathematischen Drehsinn entlang eines Kreises mit dem Radius R und dem Mittelpunkt z_0 über die Funktion $f(z) = (z - z_0)^n : n \in \mathbb{Z}$. Die Parametrisierung des Weges lautet $z(t) = z_0 + Re^{it} : t = 0 \dots 2\pi$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \oint_{S_R(z_0)} f(z) dz &= i \int_0^{2\pi} R^{n+1} e^{i(n+1)t} dt \\ &= \begin{cases} \frac{R^{n+1}}{n+1} e^{i(n+1)t} \Big|_0^{2\pi} & : n \neq -1 \\ 2\pi i & : n = -1 \end{cases} \\ \oint_{S_R(z_0)} (z - z_0)^n dz &= \begin{cases} 2\pi i & : n = -1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned} \quad (6.16)$$

Für $z \neq -1$ ergibt sich das verschwindende Integral aus der Periodizität der Exponentialfunktion, siehe (6.8). Auf dieses Fundamentalbeispiel lassen sich viele Sätze der Funktionentheorie zurückführen.

Auch im Komplexen hat das Integral ähnliche Eigenschaften wie im Reellen:

- Da Kurvenintegrale über Parametrisierungen auf reelle Integrale zurückgeführt werden, ist klar, dass das Integral linear ist.
- Aus demselben Grunde folgt, daß sich das Vorzeichen eines Integrals umkehrt, wenn der Pfad in umgekehrter Richtung durchlaufen wird.

Die Analogie zu Kurvenintegralen im \mathbb{R}^3 (z.B. $W = \int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$) führt auf die Frage, wann komplexe Integrale wegunabhängig sind.

6.1.4 Die Laurent-Reihe

Sei $f(z)$ im Kreisring $K(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq r < |z - z_0| < R \leq \infty\}$ holomorph. Dann setze für alle ρ mit $r < \rho < R$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{S_\rho(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (6.17)$$

Dann gilt:

- Die a_k hängen nicht von ρ ab
- Für alle $z \in K(z_0, r, R)$ ist f gegeben durch

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (6.18)$$

Die obige Entwicklung nennt man auch **Laurent-Reihe**. Im Gegensatz zur Taylor-Reihe treten auch Terme mit Polstellen auf (a_k mit $k < 0$). Aus obiger Definition der Koeffizienten folgt weiterhin, daß die Laurent-Entwicklung eindeutig ist.

Wenn sich $f(z)$ also bei $z = z_0$ in eine Taylor-Reihe entwickeln lässt, dann ist diese Taylor-Reihe gerade die Laurent-Entwicklung (mit verschwindenden Koeffizienten $a_k \forall k < 0$)! Man kann durch Einsetzen zeigen, daß die Berechnung der Entwicklungskoeffizienten a_k selbstkonsistent ist.

Die Laurent-Entwicklung wird oft benutzt, um isolierte Singularitäten – das sind Singularitäten, in deren U_ε -Umgebung keine weitere Singularität liegt – zu klassifizieren. Beispielsweise ist die Funktion $f(z) = \sqrt{z}$ auf der gesamten negativen reellen Achse nicht holomorph und hat daher keine isolierten Singularitäten.

Man sagt, $f(z)$ hat an $z = z_0$ eine(n):

- **hebbare Singularität**, wenn der Limes $\lim_{z \rightarrow z_0} =: f(z_0)$ existiert und wegunabhängig ist. In der Laurent-Reihe verschwinden dann alle Koeffizienten $a_{k < 0}$. Beispielsweise hat $\sin(z)/z$ bei $z = 0$ eine hebbare Singularität.
- **Pol** der Ordnung m , wenn in der Laurent-Reihe von $f(z)$ um z_0 der erste nichtverschwindende Koeffizient a_{-m} ist: $a_{-m} \neq 0$, $a_{k < -m} = 0$. Zum Beispiel hat $1/(z - i)^3$ einen Pol dritter Ordnung bei $z = i$.
- **essentielle Singularität**, wenn es in der Laurent-Reihe von $f(z)$ keinen ersten nichtverschwindenden Koeffizienten gibt, z.B. $\exp(1/z)$ bei $z = 0$.

6.1.5 Cauchy's Integralsatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes, einfach zusammenhängendes (keine Löcher) Gebiet. Sei f in G holomorph und c eine ganz in G verlaufende geschlossene Kurve. Dann gilt:

$$\oint_c f(z) dz = 0. \quad (6.19)$$

Aus dem verschwindenden Integral über geschlossene Kurven folgt natürlich auch die Wegunabhängigkeit. Wir wollen den Beweis des Integralsatzes skizzieren. Dazu spalten wir zunächst in Real- und Imaginärteil auf:

$$\oint_c f(z) dz = \oint_c [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + i \oint_c [u(x, y) dy + v(x, y) dx]. \quad (6.20)$$

Auf beide Integrale kann der Integralsatz von Stokes angewandt werden, wir betrachten dann einfach eine Fläche in der xy -Ebene

$$\oint_{\partial A} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial A} [F_x(x, y) dx + F_y(x, y) dy] = \iint_A \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dx dy, \quad (6.21)$$

wobei auf der rechten Seite die z -Komponente der Rotation des Vektorfeldes $(F_x, F_y, 0)^T$ steht. Identifiziert man in (6.20) im ersten Integral $F_x = u(x, y)$, $F_y = -v(x, y)$ und im zweiten Integral $F_x = v(x, y)$, $F_y = u(x, y)$, erhält man

$$\oint_c f(z) dz = \iint_{A(c)} dx dy \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + i \iint_{A(c)} dx dy \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (6.22)$$

Die Terme in den runden Klammern verschwinden aber für holomorphe Funktionen $f(z)$, denn sie beinhalten nichts anderes als die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen (6.5).

Der Integralsatz von Cauchy lässt sich verwenden zur Berechnung vieler Kurvenintegrale. Betrachten wir zum Beispiel die Funktion $f(z) = (z - z_0)^{-1}$. Diese ist für alle $z \neq z_0$ holomorph, an $z = z_0$ hat sie jedoch eine Polstelle. Falls also z_0 nicht vom Integrationsweg c umschlossen wird, gilt: $\oint_c (z - z_0)^{-1} dz = 0$. Falls aber z_0 innerhalb von c liegt, muss die Polstelle durch einen veränderten Integrationsweg c' geeignet (wie in Abbildung 6.1) herausgeschnitten werden, damit f in dem von c' berandeten Gebiet holomorph ist.

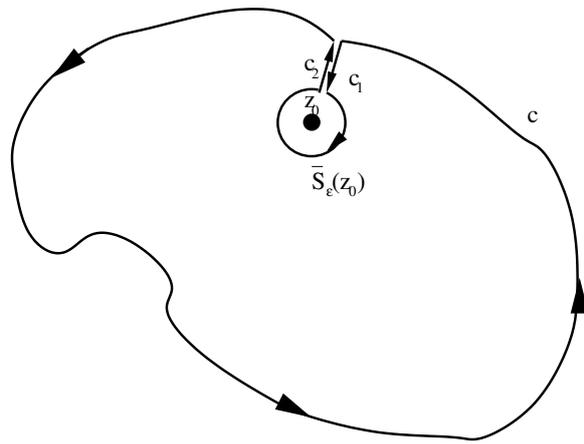


Abbildung 6.1: Geeignetes Herausschneiden einer Singularität bei $z = z_0$. Die Integralbeiträge entlang des Schnittes heben sich weg, und durch das Ausschneiden der Polstelle bei z_0 ist die Funktion im berandeten Gebiet holomorph.

Das von der modifizierten Kurve $c' = c + c_1 + \bar{S}_\varepsilon(z_0) + c_2$ berandete Gebiet enthält keine Polstelle von f mehr. Im Limes eines geschlossenen Weges c und eines geschlossenen Kreises $\bar{S}_\varepsilon(z_0)$ heben sich die Integrale über c_1 und c_2 gegenseitig auf, da $f(z)$ stetig ist und diese Wege mit umgekehrten Vorzeichen durchlaufen werden. Da der Kreis $\bar{S}_\varepsilon(z_0)$ jedoch mit negativer Orientierung durchlaufen wird, erhält man mit (6.16) für das gesamte Integral

$$\oint_{c'} f(z) dz = 0 = \int_c f(z) dz + \int_{\bar{S}_\varepsilon(z_0)} f(z) dz = \int_c f(z) dz - 2\pi i. \quad (6.23)$$

Damit folgt also für beliebige Integrationswege c :

$$\oint_c \frac{1}{z - z_0} dz = \begin{cases} 0 & : z_0 \notin A(c) \\ 2\pi i & : z_0 \in A(c) \end{cases}. \quad (6.24)$$

6.1.6 Der Residuensatz

Sei die Laurent-Entwicklung der Funktion $f(z)$ um die Stelle z_0 bekannt. Dann nennt man den Entwicklungskoeffizienten a_{-1} das **Residuum** von f an z_0 , d.h.

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{S_\rho(z_0)} f(z) dz. \quad (6.25)$$

Offensichtlich gilt für das Fundamentalbeispiel mit $f(z) = (z - z_0)^{-1}$ gerade $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = 1$. Aus dem Integralsatz von Cauchy folgt auch, dass das Residuum an Stellen, wo $f(z)$ holomorph ist, verschwindet.

Der **Residuensatz** ist eines der wichtigsten Werkzeuge in der Mathematik.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein von endlich vielen – stückweise glatten – geschlossenen Kurven berandetes Gebiet. Sei weiterhin f auf ∂G holomorph und in G bis auf endlich viele isolierte Singularitäten $\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n\}$ – die alle in G liegen – holomorph. Dann gilt:

$$\oint_{\partial G} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z). \quad (6.26)$$

Das Gebiet G wird hierbei im mathematischen Drehsinn umlaufen, sonst ergibt sich ein negatives Vorzeichen auf der rechten Seite.

Auch hier wollen wir den Beweis skizzieren, zu dem die Laurent-Entwicklung und der Integralsatz von Cauchy benutzt werden.

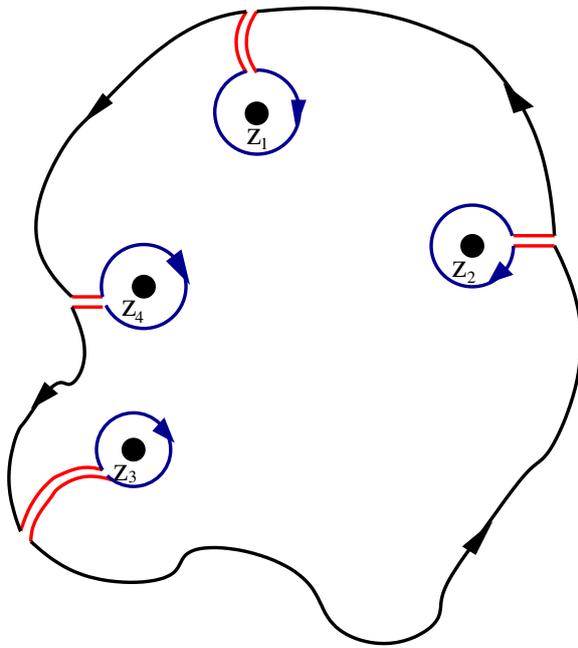


Abbildung 6.2: Wie in nebenstehender Figur schneiden wir in G die Polstellen durch Kreise mit dem Radius ρ_k aus: $\oint_{\partial G} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{S_{\rho_k}(z_k)} f(z)dz$. Das sonst auftretende Vorzeichen haben wir in obiger Gleichung schon kompensiert, indem wir die Kreise $S_{\rho_k}(z_k)$ um die Singularitäten – nicht wie im Bild mit negativer – sondern mit positiver Orientierung durchlaufen. Die Beiträge entlang der roten Konturen heben sich weg.

Die ρ_k müssen dabei so gewählt werden, dass die Laurent-Entwicklung von f um z_k auf dem durch $S_{\rho_k}(z_k)$ beschriebenen Kreis konvergiert. Nun setzen wir an jeder Singularität für $f(z)$ die Laurent-Entwicklung um die jeweilige Singularität ein

$$\begin{aligned} \oint_{\partial G} f(z)dz &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \oint_{S_{\rho_k}(z_k)} (z - z_k)^l dz = \sum_{k=1}^n \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l 2\pi i \delta_{l,-1} \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z), \end{aligned} \quad (6.27)$$

wobei wir wieder das Fundamentalbeispiel der Funktionentheorie aus (6.16) benutzt haben.

Mit dem Residuensatz können also auch Kurvenintegrale berechnet werden, welche mehrere Singularitäten umschließen. Sehr oft tauchen Polstellen bei solchen Berechnungen auf und die in (6.25) gegebene Formel ist dafür eher unpraktisch, da ein Integral parametrisiert werden muss. Wir wollen daher ein Verfahren ableiten, Residuen an Polstellen n -ter Ordnung effizient zu berechnen.

Habe also die Funktion $f(z)$ an $z = z_0$ eine Polstelle m -ter Ordnung, dann lässt sich f darstellen als

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + \dots \quad (6.28)$$

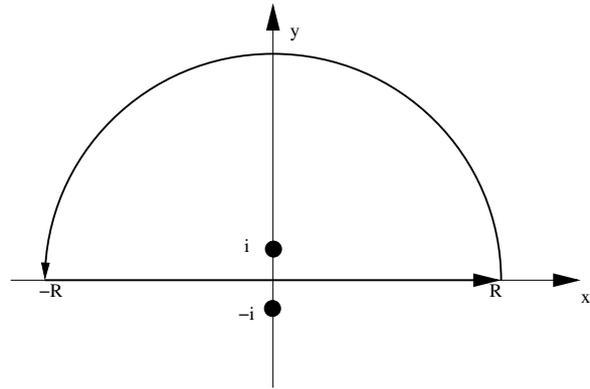
Uns interessiert jedoch nur der Koeffizient a_{-1} , daher multiplizieren wir zunächst obige Gleichung mit $(z - z_0)^m$ und leiten dann $(m - 1)$ -mal nach z ab

$$\begin{aligned} (z - z_0)^m f(z) &= a_{-m} + \dots + a_{-2}(z - z_0)^{m-2} + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + a_0(z - z_0)^m + \dots \\ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z - z_0)^m f(z) &= (m - 1)!a_{-1} + \frac{m!}{1!}a_0(z - z_0) + \dots \end{aligned} \quad (6.29)$$

Wenn wir nun noch zusätzlich auf beiden Seiten der Gleichung den Limes $z \rightarrow z_0$ vollziehen, verschwinden alle unerwünschten Terme und wir erhalten eine Formel zur schnellen Berechnung von Residuen an Polstellen m -ter Ordnung

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z). \quad (6.30)$$

Abbildung 6.3: Schließen eines Integrals über die obere Halbebene. Damit die obere Kontur nichts beiträgt, muss der Integrand im Unendlichen schnell genug abfallen.



Besonders einfach wird die Berechnung für einen Pol erster Ordnung

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (6.31)$$

6.1.7 Beispiele

Der Nutzen des Residuensatzes besteht darin, Integrale aus dem Reellen geeignet in die komplexe Ebene fortzusetzen und dann in geschlossene Konturen zu übertragen. Dies ermöglicht die effiziente Berechnung vieler schwieriger Integrale, wie an folgenden Beispielen demonstriert werden soll

1. Das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} \quad (6.32)$$

hat die Lösung π , da die Stammfunktion von $f(x)$ der \arctan ist. Ohne dieses Wissen lässt sich die Lösung jedoch mit dem Residuensatz leicht ermitteln. Die analytische Fortsetzung von $f(x)$ auf ganz \mathbb{C} ist gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{(z - i)(z + i)}, \quad (6.33)$$

es liegen zwei Polstellen jeweils 1. Ordnung bei $z = \pm i$ vor. Betrachtet man das geschlossene Integral entlang reellen Achse – vervollständigt durch einen Halbkreis in der oberen Halbebene wie in Abbildung 6.3, liegt jedoch nur eine Polstelle ($z = +i$) innerhalb des Integrationsweges. Im Limes $\lim_{R \rightarrow \infty}$ jedoch trägt der obere Halbkreis nichts bei, da $f(z)$ im Unendlichen wie R^{-2} verschwindet, die Länge des Halbkreises jedoch nur linear in R anwächst. Daher folgt

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \oint_c \frac{1}{(z - i)(z + i)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{(z - i)(z + i)} = \frac{2\pi i}{2i} = \pi. \quad (6.34)$$

2. Das Integral über die Parametrisierung eines Kegelschnittes (Ellipse)

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + \frac{\varepsilon}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})} \quad : \quad 0 \leq \varepsilon < 1 \quad (6.35)$$

lässt sich durch die Substitution $z(\varphi) = e^{i\varphi}$ auf ein geschlossenes Integral entlang des Einheitskreises $S_1(0)$ um den Ursprung zurückführen

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{i} \oint_{S_1(0)} \frac{dz}{z + \frac{\varepsilon z}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)} = \frac{2}{\varepsilon i} \oint_{S_1(0)} \frac{dz}{z^2 + \frac{2}{\varepsilon}z + 1} \\ &= \frac{2}{\varepsilon i} \oint_{S_1(0)} \frac{dz}{(z - z_1)(z - z_2)}, \end{aligned} \quad (6.36)$$

$$\begin{aligned} \text{wobei} \quad z_1 &= -\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - 1} & : & \text{innerhalb } S_1(0) \\ z_2 &= -\frac{1}{\varepsilon} - \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - 1} & : & \text{außerhalb } S_1(0) \end{aligned} \quad (6.37)$$

Mit dem Residuensatz folgt also

$$I = \frac{2}{\varepsilon i} 2\pi i \frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{2\pi}{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}. \quad (6.38)$$

3. Das Integral

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{dz}{(z + ia)^2(z - ia)^2} \quad : a \in \mathbb{R} \quad (6.39)$$

kann wieder durch einen Halbkreis in der komplexen Ebene geschlossen werden, analog zu Abbildung 6.3. Der Integrand ist offensichtlich eine gerade Funktion von a , daher nehmen wir o.B.d.A. für die Rechnung an $a > 0$. Der Integrand verschwindet offensichtlich schnell genug im Unendlichen – daher muss der Beitrag des Halbkreises nicht betrachtet zu werden. Da diesmal jedoch eine Polstelle zweiter Ordnung bei $z = +ia$ vorliegt, ist die Berechnung des Residuums etwas komplizierter

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow ia} \frac{d}{dz} (z - ia)^2 f(z) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow ia} \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z + ia)^2} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow ia} \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z + ia)^2} \\ &= 2\pi i \frac{-1}{(2ia)^3} = \frac{\pi}{4a^3} \rightarrow \frac{\pi}{4|a|^3}, \end{aligned} \quad (6.40)$$

wobei der letzte Schritt aus Symmetrie-Überlegungen folgt.

4. Mit derselben Kontur kann das Integral

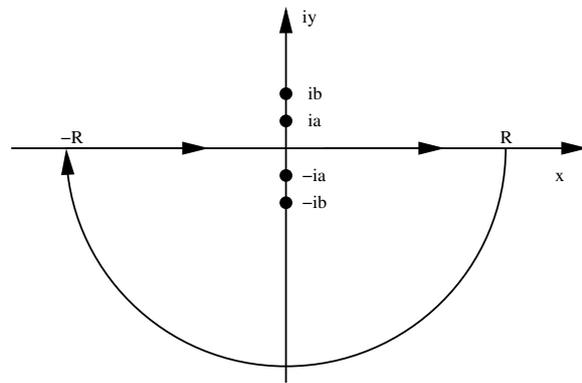
$$I = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(kx) dx}{x^2 + a^2} = \Re \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ikz} dz}{z^2 + a^2} = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ikz} dz}{(z + ia)(z - ia)} \quad (6.41)$$

gelöst werden, welches z.B. bei Fouriertransformationen auftaucht. Im letzten Schritt haben wir eben benutzt, daß das Integral über den ungeraden Imaginärteil von e^{ikz} verschwindet. Diesmal liegen wie in Abbildung 6.3 zwei Polstellen erster Ordnung bei $z = \pm ia$ vor. Beim Halbkreisintegral ist jedoch zu beachten, dass es für $a > 0$ und $k > 0$ in der oberen Halbebene geschlossen werden sollte, weil in der unteren Halbebene ($y < 0$) die Exponentialfunktion ($\exp(ikz) = \exp(ikx) \exp(-ky)$) nicht beschränkt ist und somit das Halbkreisintegral nicht verschwinden würde. Damit erhält man

$$I = 2\pi i \left. \frac{e^{ikz}}{z + ia} \right|_{z=ia} = \frac{\pi}{a} e^{-ka} \rightarrow \frac{\pi}{|a|} e^{-|ka|}, \quad (6.42)$$

wobei die letzte Ersetzung aus Symmetrie-Überlegungen folgt.

Abbildung 6.4: Das Schließen der Kontur ist für $k > 0$ und $a > 0$, $b > 0$ zwingend in der unteren Halbebene erforderlich, da der Beitrag des Halbkreisintegrals in der oberen komplexen Ebene nicht verschwinden würde.



5. Die Fouriertransformierte

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikz}}{(z - ia)(z - ib)(z + ia)(z + ib)} dz \quad (6.43)$$

(mit $a, b \in \mathbb{R}$) kann wie folgt mit dem Residuensatz berechnet werden. Wir nehmen zunächst an: $a, b, k > 0$, da das Integral sowieso eine gerade Funktion dieser Variablen ist. Bei der Wahl der Integrationskurve ist Vorsicht geboten, da $\exp(-ikz) = \exp(-ikx) \exp(+ky)$ für $k > 0$ nur für z mit negativem Imaginärteil ($y < 0$) beschränkt ist. Damit das Integral über den Halbkreis im Unendlichen verschwindet, muß das Fourierintegral also für $k > 0$ zwingend in der unteren komplexen Ebene geschlossen werden wie in Abb. 6.4. Innerhalb dieser Kurve liegen die beiden Polstellen erster Ordnung bei $z = -ia$ und $z = -ib$, und wir erhalten mit (6.30)

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(z) &= \lim_{z \rightarrow -ia} \frac{e^{-ikz}}{(z^2 + b^2)(z - ia)} = \frac{-e^{-ka}}{2ia(b^2 - a^2)}, \\ \operatorname{Res} f(z) &= \lim_{z \rightarrow -ib} \frac{e^{-ikz}}{(z^2 + a^2)(z - ib)} = \frac{+e^{-kb}}{2ib(b^2 - a^2)}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Da die Kontur mit umgekehrten Vorzeichen durchlaufen wird, erhält man also nach dem Residuensatz ein Vorzeichen

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{\pi}{(b^2 - a^2)} \left(\frac{e^{-ka}}{a} - \frac{e^{-kb}}{b} \right) \\ &\rightarrow \frac{\pi}{(b^2 - a^2)} \left(\frac{e^{-|ka|}}{|a|} - \frac{e^{-|kb|}}{|b|} \right). \end{aligned} \quad (6.45)$$

Da der Imaginärteil von $F(k)$ verschwindet, ist die Funktion gerade in k , in a , und in b . Aus Symmetriegründen können wir also die allgemeine Lösung finden durch die Ersetzungen $k \rightarrow |k|$, $a \rightarrow |a|$, und $b \rightarrow |b|$. Analog hätte man für $b \rightarrow a$ entweder mit einem Pol 2. Ordnung rechnen können oder man vollzieht den Limes am Ergebnis.

6. Hauptwertintegrale tauchen in verschiedensten Bereichen der Physik auf. Der Cauchy-Hauptwert (\mathcal{P} für "principal value") ist ein Weg, endliche Lösungen zu eigentlich divergierenden Integralen zu bekommen, z.B. ($a > 0$)

$$0 = \mathcal{P} \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x}. \quad (6.46)$$

Wir können dieses Integral in Beiträge über die negative und positive reelle Achse aufspalten, und jeder dieser Beiträge ist divergent. Aus Symmetriegründen folgt jedoch, dass

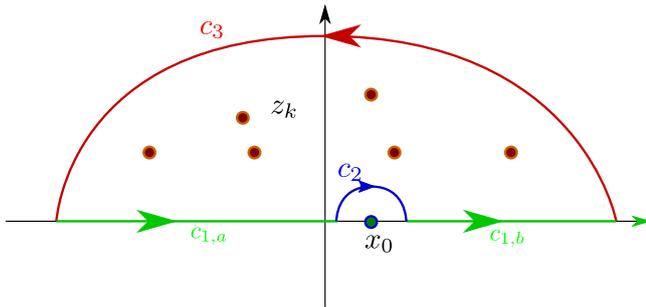


Abbildung 6.5: Der Residuensatz kann benutzt werden um Hauptwertintegrale mit einem isolierten Pol auf der reellen Achse zu berechnen. Die grünen Konturen $c_{1,a}$ und $c_{1,b}$ liefern das Hauptwertintegral, eine geschlossene Kontur wird geformt durch Hinzufügen der Halbkreise um den Pol c_2 (blau) und in der oberen komplexen Halbebene c_3 (rot). Durch Berechnung des Integrals entlang c_2 kann der Residuensatz angewandt werden.

die divergierenden Beiträge sich bei endlicher Annäherung an den Ursprung gegenseitig wegheben würden, daher weist man dem Integral den Hauptwert 0 zu. Etwas formaler wird dies folgendermaßen definiert:

Sei die Funktion $g(x)$ definiert im Intervall $[a, b]$, mit Ausnahme des Punktes c mit $a < c < b$. Dann ist der **Cauchy-Hauptwert** des Integrals definiert als

$$\mathcal{P} \int_a^b g(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_a^{c-\epsilon} g(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b g(x) dx \right]. \quad (6.47)$$

Falls $g(x)$ eine hebbare Singularität bei $x = c$ hat, fällt der Hauptwert auf den normalen Wert des Integrals zurück. Ein häufig auftretender Fall ist die Zerlegung

$$g(x) = \frac{f(x)}{x - x_0} \quad : \quad f(x) \text{ holomorph } \forall x \in \mathbb{R}, \quad (6.48)$$

d.h. $f(x)$ hat keine weiteren Pole auf der reellen Achse, in der komplexen Ebene dürfen aber weitere Pole liegen. Weiterhin nehmen wir an, dass $a \rightarrow -\infty$ und $b \rightarrow +\infty$. Wenn weiterhin die Funktion $f(z)$ hinreichend schnell im Unendlichen abfällt, können wir den Residuensatz benutzen um Hauptwertintegrale zu berechnen, vgl. Abb. 6.5. Eine geschlossene Kontur wird erzeugt durch Hinzufügen von zwei Halbkreisen

$$\mathcal{P} \int \frac{f(x)}{x - x_0} dx + \int_{c_2} \frac{f(z)}{z - x_0} dz + \int_{c_3} \frac{f(z)}{z - x_0} dz = 2\pi i \sum_{k: \Im(z_k) > 0} \text{Res}_{z=z_k} \frac{f(z)}{z - x_0}. \quad (6.49)$$

Wenn $f(x)$ hinreichend schnell abfällt in der oberen Halbebene, können wir den entsprechenden Beitrag vernachlässigen $\int_{c_3} \frac{f(z)}{z - x_0} dz = 0$. Den Beitrag der Kontur um den Pol auf der reellen Achse hingegen müssen wir explizit ausrechnen, d.h. wir parametrisieren $z = x_0 + Re^{+i\phi}$

$$\int_{c_2} \frac{f(z)}{z - x_0} dz = \lim_{R \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \frac{f(x_0 + Re^{+i\phi})}{Re^{+i\phi}} iRe^{+i\phi} d\phi = -\pi i f(x_0), \quad (6.50)$$

wobei wir angenommen haben dass die Funktion $f(x)$ holomorph bei x_0 ist. Der Hauptwert ergibt sich dann zu

$$\mathcal{P} \int \frac{f(x)}{x - x_0} dx = \pi i f(x_0) + 2\pi i \sum_{k: \Im(z_k) > 0} \text{Res}_{z=z_k} \frac{f(z)}{z - x_0}. \quad (6.51)$$

Effektiv trägt der Pol auf der reellen Achse also wie ein halbes Residuum bei. Alternativ hätte man die Kontur c_2 auch in die untere Halbebene legen können, der Beitrag wäre dann

$+\pi i f(x_0)$. In diesem Fall hätte man aber auch das Residuum vom Pol auf der reellen Achse mit berücksichtigen müssen, so dass sich im Endresultat wieder (6.51) ergeben würde.

Es folgt z.B. für das Integral mit der hebbaren Singularität ($a > 0$)

$$I = \int \frac{\sin(ax)}{x} dx = -i\mathcal{P} \int \frac{e^{+iax}}{x} dx = -i[\pi i] = \pi. \quad (6.52)$$

Hier haben wir das Integral der hebbaren Singularität in ein Hauptwertintegral umgewandelt, wo aus Symmetrie-Gründen $\mathcal{P} \int \frac{\cos(ax)}{x} dx = 0$ gilt.

Ein anderes Beispiel ist

$$I = \mathcal{P} \int \frac{\Gamma \delta^2}{(\omega - \epsilon)^2 + \delta^2} \frac{1}{\omega - \Omega} d\omega \quad (6.53)$$

mit $\epsilon, \Omega \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$. Der Integrand hat zwei Pole 1. Ordnung in der komplexen Ebene $z_{1,2} = \epsilon \pm i\delta$ und einen Pol erster Ordnung auf der reellen Achse bei $z_0 = \Omega$. Das Hauptwert-Integral berechnet sich zu

$$\begin{aligned} I &= \pi i \frac{\Gamma \delta^2}{(\Omega - \epsilon)^2 + \delta^2} + 2\pi i \frac{\Gamma \delta^2}{(z - \epsilon + i\delta)(z - \Omega)} \Big|_{z=\epsilon+i\delta} \\ &= i \frac{\pi \Gamma \delta^2}{(\Omega - \epsilon)^2 + \delta^2} + \frac{\pi \Gamma \delta}{\epsilon - \Omega + i\delta} = \frac{(\epsilon - \Omega) \pi \Gamma \delta}{(\epsilon - \Omega)^2 + \delta^2}. \end{aligned} \quad (6.54)$$

6.2 Retardierte Potentiale

Um z.B. Wellengleichungen für die Potentiale in Lorenz-Eichung (5.26) lösen zu können, betrachten wir zunächst die allgemeine Wellengleichung der Form

$$\left\{ \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right\} \Psi(\mathbf{r}, t) = -4\pi f(\mathbf{r}, t). \quad (6.55)$$

Hier ist $\Psi(\mathbf{r}, t)$ die gesuchte Funktion, z.B. das skalare Potential, und $f(\mathbf{r}, t)$ die Quelle, z.B. die Ladungsdichte. Wir nehmen ausdrücklich nicht an, dass sich das Problem durch Lorentz-Transformationen vereinfachen lässt, stellen nur die Randbedingung, dass die Lösungen der Wellengleichung kausal sein müssen, d.h. dass die Wirkung nach der Ursache erfolgen muss.

Wir definieren die Gleichung für die Greensche Funktion über

$$\left\{ \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right\} G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad (6.56)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist jedoch translationsinvariant, daher kann die Green'sche Funktion nur von der Differenz der Raum- und Zeitargumente abhängen

$$G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'). \quad (6.57)$$

Haben wir diese erstmal gefunden, erhalten wir die Lösung durch ein Integral über die Quelle

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int d^3 r' dt' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') f(\mathbf{r}', t'). \quad (6.58)$$

Die Gleichung (6.56) sagt nichts über die Richtung der Zeit aus, es wird also Lösungen geben welche sich akausal entwickeln. Die Kausalität ist also als Randbedingung an die Green'sche Funktion zu verstehen, welche verschwinden muss für diese akausalen Lösungen.

Ein Standard-Verfahren zur Lösung von translations-invarianten linearen partiellen Differentialgleichungen ist die Behandlung mittels Fourier-Transformation

$$g(\mathbf{k}, \omega) = \int G(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d^3 r dt. \quad (6.59)$$

Die inverse Transformation (es können andere Konventionen gewählt werden, diese sind dann aber strikt beizubehalten) ist dann gegeben durch

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int g(\mathbf{k}, \omega) e^{+i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d^3 k d\omega. \quad (6.60)$$

Speziell ergibt sich für die vier-dimensionale δ -Funktion

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{+i[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \omega(t - t')]} d^3 k d\omega. \quad (6.61)$$

Wir setzen die Fourier-Transformation einfach auf beiden Seiten der Bestimmungsgleichung (6.56) ein

$$\begin{aligned} \int g(\mathbf{k}, \omega) \square e^{+i[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \omega(t - t')]} d^3 k d\omega &= \int g(\mathbf{k}, \omega) \left[\frac{1}{c^2} \omega^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \right] e^{+i[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \omega(t - t')]} d^3 k d\omega \\ &= -4\pi \int e^{+i[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \omega(t - t')]} d^3 k d\omega. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Dies kann nur dann für alle $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ und $t - t'$ erfüllt sein, wenn die Integranden gleich sind

$$\left[\frac{1}{c^2} \omega^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \right] g(\mathbf{k}, \omega) = -4\pi. \quad (6.63)$$

Diese Vorgehensweise ist generisch, durch Anwendung von Fourier-Transformation werden translationsinvariante Differentialgleichungen zu algebraischen Gleichungen. Diese werden dann im Fourier-Raum gelöst und danach erhält man die Lösung durch Rücktransformation. Im Fourier-Raum ist die Lösung für die Greensche Funktion einfach

$$g(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}. \quad (6.64)$$

Die Greensche Funktion erhält man also über die inverse Fourier-Transformation (wir ersetzen $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ und $t \rightarrow t - t'$ später)

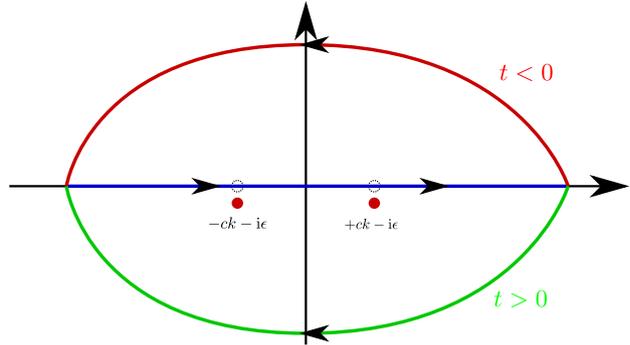
$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi^3} \int \frac{c^2}{k^2 c^2 - \omega^2} e^{+i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t]} d^3 k d\omega. \quad (6.65)$$

Wir betrachten zunächst das zeitliche Integral

$$I(k, t) = \int \frac{e^{-i\omega t} c^2}{c^2 k^2 - \omega^2} d\omega = - \int \frac{e^{-i\omega t} c^2}{(\omega - ck)(\omega + ck)}. \quad (6.66)$$

Hier hat man die Situation, dass zwei Pole $\omega^* = \pm ck$ direkt auf der reellen Achse liegen. Um abzuschätzen, ob das Integral überhaupt konvergiert, kann man untersuchen dass sowohl Real- und Imaginärteil positive und negative Beiträge liefern, die divergenten Beiträge heben sich letztlich weg, so dass der rein mathematisch definierte Hauptwert endlich ist $\tilde{I}(k, t) = \mathcal{P} \int \frac{e^{-i\omega t} c^2}{c^2 k^2 - \omega^2} d\omega = \pi \frac{c}{k} \text{sgn}(t) \sin(\pi k c t)$. Um das Integral (6.66) mit dem Residuensatz berechnen zu können, müssen wir die Kontur für $t > 0$ in der unteren Halbebene schließen, für

Abbildung 6.6: Skizze der Integrationskontur in (6.66) in der komplexen Ebene. Für positive Zeiten muss in der unteren Halbebene geschlossen werden, für negative Zeiten in der oberen. Um die Kausalität zu respektieren, werden die Pole leicht von der reellen Achse verschoben, so dass sie für positive Zeiten beitragen (sie liegen innerhalb der Kontur), für negative Zeiten jedoch nicht (sie liegen außerhalb der Kontur). Mit dieser Konstruktion verschwindet die Greensche Funktion automatisch für negative Zeiten.



$t < 0$ jedoch in der oberen – sonst können wir den Beitrag des unendlich großen Halbkreisintegrals nicht vernachlässigen. An diesem Punkt können wir die **Kausalität** als physikalische Randbedingung an die Greensche Funktion einführen: Für $t < 0$ muss die Greensche Funktion verschwinden, denn ein Quellterm darf nur die Lösung in der Zukunft beeinflussen und nicht in der Vergangenheit, nur für $t > 0$ darf etwas Endliches übrig bleiben. Diese Randbedingung wird formal dadurch erfüllt, dass die beiden Pole von der reellen Achse verschoben werden, man ersetzt (mit $\epsilon > 0$) einfach $\omega \rightarrow \omega + i\epsilon$ im Zähler und verschiebt damit die Pole in die untere Halbebene

$$I(k, t) = \int \frac{-e^{-i\omega t} c^2}{(\omega - ck + i\epsilon)(\omega + ck + i\epsilon)} d\omega, \quad (6.67)$$

vgl. Fig. 6.6 Diese Konstruktion definiert die retardierte Greensche Funktion. Die umgekehrte Konstruktion führt auf die avancierte Greensche Funktion, welche jedoch für uns physikalisch sinnlose Resultate liefert. Bei anderen Fourier-Konventionen muss man evtl. die Kontur in der oberen Halbebene schließen, wichtig ist, dass für $t < 0$ die Pole außerhalb der Kontur liegen müssen.

Für $t < 0$ folgt also aus dem Residuensatz, dass die Greensche Funktion verschwindet

$$I(k, t < 0) = 0 \quad \implies \quad G(\mathbf{r}, t < 0) = 0. \quad (6.68)$$

Damit kann die Wirkung einer Quelle immer nur die Lösung der Wellengleichung in der Zukunft beeinflussen.

Für $t > 0$ tragen zwei Pole bei, man erhält unter Berücksichtigung des Vorzeichens durch die Orientierung im Uhrzeigersinn und (6.31)

$$\begin{aligned} I(k, t) &= \Theta(t) 2\pi i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\operatorname{Res}_{\omega = +ck - i\epsilon} \frac{e^{-i\omega t} c^2}{(\omega - ck + i\epsilon)(\omega + ck + i\epsilon)} + \operatorname{Res}_{\omega = -ck - i\epsilon} \frac{e^{-i\omega t} c^2}{(\omega - ck + i\epsilon)(\omega + ck + i\epsilon)} \right] \\ &= 2\pi i \Theta(t) c^2 \left[\frac{e^{-ickt}}{2ck} - \frac{e^{+ickt}}{2ck} \right] = +2\pi \Theta(t) \frac{c}{k} \sin(ckt). \end{aligned} \quad (6.69)$$

Die retardierte Greensche Funktion kann jetzt weiter ausgerechnet werden

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi^3} \int e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} I(k, t) d^3k = \frac{1}{2\pi^2} \Theta(t) \int_0^\infty dk k^2 \int_{-1}^{+1} dx \int_0^{2\pi} d\phi \frac{c}{k} \sin(ckt) e^{+ikr x} \\ &= \frac{1}{\pi} \Theta(t) \int_0^\infty dk \int_{-1}^{+1} dx ck \sin(ckt) e^{+ikr x}. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Das verbleibende Winkelintegral wird explizit ausgerechnet

$$\int_{-1}^{+1} e^{ikrx} dx = 2 \frac{\sin(kr)}{kr}, \quad (6.71)$$

so dass die Greensche Funktion am Ende sich zu

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, t) &= \frac{2}{\pi} \Theta(t) \frac{c}{r} \int_0^\infty \sin(ckt) \sin(kr) dk = \frac{1}{\pi} \Theta(t) \frac{c}{r} \int \sin(ckt) \sin(kr) dk \\ &= \frac{1}{\pi} \Theta(t) \frac{c}{r} \frac{(-1)}{4} \int [e^{+ickt} - e^{-ickt}] [e^{+ikr} - e^{-ikr}] dk \\ &= \frac{-1}{4\pi} \Theta(t) \frac{c}{r} (2\pi)(2) [\delta(r+ct) - \delta(r-ct)] \\ &= \Theta(t) \frac{c}{r} \delta(r-ct) = \frac{c}{r} \delta(r-ct) = \frac{1}{r} \delta\left(\frac{r}{c} - t\right), \end{aligned} \quad (6.72)$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass die erste δ -Funktion nicht beitragen kann wegen $\Theta(t)$ und dass die $\Theta(t)$ Funktion weggelassen werden darf wegen der zweiten δ -Funktion. Aus der Invarianz gegenüber Translationen folgern wir also **retardierte Greensche Funktion** der Wellengleichung unter der Randbedingung der Kausalität.

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (6.73)$$

Dies verallgemeinert die Greensche Funktion der Poisson-Gleichung (1.144). Findet zur Zeit $t = t'$ am Orte \mathbf{r}' eine Störung statt, so erreicht diese Störung den Ort $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ erst nach der Zeit $t - t' = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$, die elektromagnetische Wirkung breitet sich also mit Lichtgeschwindigkeit aus. Die allgemeine Lösung ergibt sich also zu

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' dt' \frac{f(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right). \quad (6.74)$$

Speziell erhalten wir für das skalare Potential

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6.75)$$

und für das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (6.76)$$

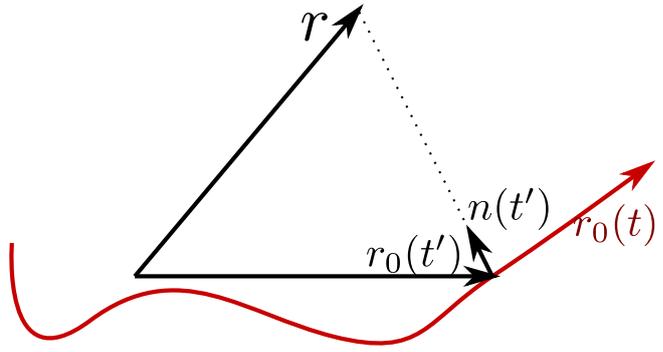
Entsprechend heißen diese Potentiale **retardierte Potentiale**, sie verallgemeinern (1.62) und (4.57) ohne Retardierung. Hier gibt die Zeitabhängigkeit der Quellen

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \quad (6.77)$$

an, dass das an der Stelle \mathbf{r} zur Zeit t beobachtete Feld von der Quelle am Ort \mathbf{r}' zur früheren Zeit $t' < t$ verursacht wurde. Insbesondere kann keine Störung eine kausale Folge haben, welche sich schneller als Lichtgeschwindigkeit ausbreitet.

Hätten wir die avancierte Greensche Funktion berechnet – formal durch Verschieben der Pole in die andere Richtung – wäre im Zeitargument $t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$, die Zeit würde umgekehrt ablaufen. Wir haben also das Kausalitätsprinzip als Randbedingung für die Greensche Funktion benutzt, um die retardierten Potentiale zu erhalten.

Abbildung 6.7: Aufpunkt \mathbf{r} und Normalenvektor $\mathbf{n}(t')$ von der bewegten Punktladung $\mathbf{r}_0(t')$ zum Aufpunkt.



6.3 Potentiale einer beschleunigten Punktladung

Um das durch eine beschleunigt bewegte Punktladung mit der Trajektorie $\mathbf{r}_0(t)$ erzeugte Feld zu berechnen, betrachten wir im Laborsystem

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e\delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)], \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = e\mathbf{v}(t)\delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)]. \quad (6.78)$$

Die Lorentz-Kontraktion ist wegen der Punktförmigkeit der Ladungsverteilung nicht sichtbar. Einsetzen dieses Spezialfalles liefert für das retardierte Potential

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = e \int d^3r' \frac{\delta\left[\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)\right]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (6.79)$$

d.h. das am Aufpunkt \mathbf{r} zur Zeit t gemessene Potential wird von der Quelle am Orte \mathbf{r}' zum früheren Zeitpunkt erzeugt. Durch die komplizierte Abhängigkeit der δ -Funktion von \mathbf{r}' ist diese Integral schwierig auszuführen. Wir führen daher die zeitliche Integration wieder ein, um die räumliche Integration ausführen zu können

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, t) &= e \int dt' \int d^3r' \frac{\delta[\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t')]\delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= e \int dt' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} \delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}{c}\right). \end{aligned} \quad (6.80)$$

Mit der Substitution

$$\begin{aligned} u &= t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}{c} = t' - t + \frac{\sqrt{[x - x_0(t')]^2 + [y - y_0(t')]^2 + [z - z_0(t')]^2}}{c}, \\ \frac{du}{dt'} &= 1 - \frac{(x - x_0(t'))\frac{dx_0}{dt'} + (y - y_0(t'))\frac{dy_0}{dt'} + (z - z_0(t'))\frac{dz_0}{dt'}}{c\sqrt{[x - x_0(t')]^2 + [y - y_0(t')]^2 + [z - z_0(t')]^2}} = 1 - \frac{1}{c}\mathbf{n}(t') \cdot \mathbf{v}_0(t') \end{aligned} \quad (6.81)$$

lässt sich dies weiter vereinfachen. Hier ist $\mathbf{n}(t') = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}$ der zeitabhängige Einheitsvektor von der Ladung e , welcher vom Ort der Ladung $\mathbf{r}_0(t')$ zum Aufpunkt \mathbf{r} zeigt, vgl. Abb. 6.7. Für das Potential ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, t) &= e \int du \frac{dt'}{du} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(u)|} \delta(u) = e \int du \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(u)|} \frac{\delta(u)}{1 - \frac{1}{c}\mathbf{n}(u) \cdot \mathbf{v}(u)} \\ &= \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')| \left[1 - \frac{1}{c}\mathbf{n}(t') \cdot \mathbf{v}(t')\right]} \Bigg|_{t'=t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}{c}}. \end{aligned} \quad (6.82)$$

Im letzten Schritt haben wir nur die Bedingung für $u = 0$ eingesetzt. Die Gleichung ist aber implizit in t' und muss im Allgemeinen numerisch gelöst werden. Die Rechnung für das Vektorpotential ist analog

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\frac{e}{c} \mathbf{v}(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')| \left[1 - \frac{1}{c} \mathbf{n}(t') \cdot \mathbf{v}(t') \right]} \Bigg|_{t'=t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|}{c}}. \quad (6.83)$$

Diese retardierten Potentiale heißen **Liénard-Wiechert-Potentiale**. Sie sind exakte Lösungen der Wellengleichung für eine auf einer beliebigen Trajektorie bewegte Punktladung. Man sieht zunächst, dass das bekannte Resultat für eine ruhende Punktladung reproduziert wird. Für eine bewegte Punktladung mit vorgegebener Trajektorie ist jedoch zu beachten, dass auf der rechten Seite zunächst die Zeit t' gelöst werden muss, was bis auf wenige Spezialfälle numerisch erfolgen muss.

Ein solcher Spezialfall ist z.B. der einer gleichförmig bewegten Punktladung mit der Trajektorie $\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{e}_x vt$, beschrieben durch die Ladungsdichte im Laborsystem

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{e}_x vt). \quad (6.84)$$

Hier können wir die resultierende Bestimmungsgleichung

$$t' = t - \frac{1}{c} \sqrt{(x - vt')^2 + y^2 + z^2} \quad (6.85)$$

nach t' auflösen

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2} \pm \frac{1}{c} \sqrt{(x - vt)^2 + (y^2 + z^2) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (6.86)$$

wobei wir nur die physikalische (retardierte) Lösung der Gleichung nehmen (mit $-$ Vorzeichen), und diese Lösung dann in die Potentiale (6.82) und (6.83) einsetzen. Man erhält bei dieser Übung letztlich das gleiche Potential, als wenn man in (5.218) die Ladungsverteilung einer Punktladung einsetzt, also $\rho_0(\mathbf{r}') \rightarrow e\delta(\mathbf{r}')$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{\gamma e}{\sqrt{(\gamma x - \beta \gamma ct)^2 + y^2 + z^2}}, \quad A_x(\mathbf{r}, t) = \beta \Phi(\mathbf{r}, t), \quad (6.87)$$

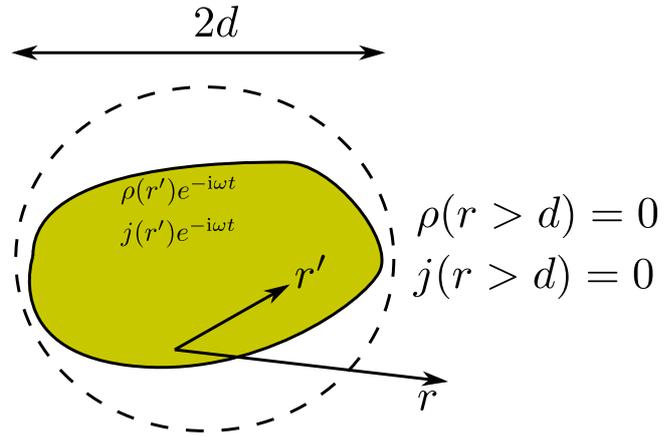
dies klappt aber nur unter Ausnutzung der impliziten Lösung für die retardierte Zeit t' und erfordert noch einige Umformungen.

Die retardierten Potentiale erlauben die Berechnung der elektrischen Feldstärke und der magnetischen Induktion (hier nicht explizit, vgl. z.B. Fließbach). Daraus kann dann der Poynting-Vektor \mathbf{S} und somit über

$$\frac{dP}{d\Omega} = R^2 \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}, \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')| \quad (6.88)$$

die abgestrahlte Leistungsdichte pro Raumwinkel berechnet werden, hierbei ist R der Abstand zwischen Aufpunkt und dem Ort der beschleunigten Punktladung zur retardierten Zeit und \mathbf{n} der entsprechende Normalenvektor, vgl. Abb. 6.7. Dies ermöglicht die Berechnung einer Richtcharakteristik, z.B. wird die Abstrahlung einer beschleunigten Ladung in Vorwärtsrichtung modifiziert. Je nachdem, ob die Beschleunigung parallel zur Geschwindigkeit ist (z.B. Linearbeschleuniger) oder senkrecht zur ihr (Ringbeschleuniger), ergeben sich völlig andere Strahlungsverluste.

Abbildung 6.8: Periodisch oszillierende Quellen (gelb) senden Strahlung aus, welche außerhalb der Quellen (getrichelter Kreis) über das Vektorpotential vereinfacht berechnet werden kann.



6.4 Strahlung zeitlich oszillierender Quellen

Die mikroskopischen Maxwell-Gleichungen (5.14)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{E} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \end{aligned} \quad (6.89)$$

sind linear in den Variablen \mathbf{E} und \mathbf{B} und den Quellen ρ und \mathbf{j} und enthalten nur reelle Konstanten. Aufgrund der Linearität können wir sowohl die Felder als auch die Quellen auch formal als komplexwertige Größen ansetzen, welche durch die reellen Konstanten nicht mischen. Haben wir eine komplexwertige Lösung $\mathbf{E}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}$ gefunden, liefert uns deren Realteil

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \mathbf{E}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \Re \mathbf{B}, \quad (6.90)$$

dann die Lösung der physikalischen Maxwell-Gleichung, bestimmt durch den Realteil der Quellen (der Imaginärteil liefert uns eine andere Lösung, konsistent mit dem Imaginärteil der Quellterme). Es genügt uns hier, nur Quellen zu betrachten, welche mit einer bestimmten vorgegebenen Frequenz ω schwingen

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \Re \rho(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \Re \mathbf{j}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \quad (6.91)$$

der allgemeine Fall kann dann letztlich durch Überlagerung vieler Frequenzen konstruiert werden. Da am Ende erst der Realteil gebildet wird, können hier die räumlichen Anteile $\rho(\mathbf{r})$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ komplexwertig sein. Für alle observablen Größen muss am Ende dann der Realteil evaluiert werden. Sei d die charakteristische Ausdehnung der Quelle, vgl. Abb. 6.8, d.h. die Quellen (Ladungsverteilungen und Ströme) sollen außerhalb einer Kugel mit Radius d verschwinden.

Einsetzen der Stromdichte in das retardierte Vektorpotential (6.76) liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c}\Re \int d^3r' \int dt' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \\ &= \frac{1}{c}\Re \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')e^{+i\omega/c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{-i\omega t} = \Re \mathbf{A}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (6.92)$$

so dass der Vergleich letztlich für die komplexwertige räumliche Komponente wegen $\omega = ck$ liefert

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')e^{+ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (6.93)$$

Das retardierte Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ schwingt also mit der Frequenz der Quelle, wenn keine weiteren Randbedingungen zu berücksichtigen sind. Aus dem Vektorpotential erhalten wir die zeitabhängige magnetische Induktion

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \Re \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}. \quad (6.94)$$

Da zusätzlich die Maxwellgleichungen respektiert werden müssen, insbesondere

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (6.95)$$

können wir aus dem Vektorpotential nicht nur die magnetische Induktion $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, sondern auch die elektrische Feldstärke erhalten. Insbesondere verschwindet die Stromdichte außerhalb des Quellbereiches $\mathbf{j}(r > d) = 0$, und wir erhalten außerhalb

$$\partial_t \mathbf{E} = c \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})) e^{-i\omega t} \quad : \quad r > d. \quad (6.96)$$

Integrieren wir diese Gleichung in der Zeit, ergibt sich

$$\mathbf{E} = \frac{i}{k} [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}))] e^{-i\omega t} \quad : \quad r > d, \quad (6.97)$$

bzw. $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \mathbf{E}$. Die Vorgabe der Stromdichte bestimmt also Vektorpotential und damit elektrische Feldstärke und magnetische Induktion.

Die Wellenlänge der Strahlung ist gegeben durch

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi}{k}. \quad (6.98)$$

In der **Strahlungs-Nahzone** $r, r' \ll \lambda$ können wir den Phasenfaktor vernachlässigen

$$e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = e^{i2\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\lambda} \approx 1, \quad (6.99)$$

und es ergibt sich aus (6.93) genau dasselbe Vektorpotential wie schon in der Magnetostatik

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (6.100)$$

Die Retardierungs-Effekte kommen also in der Nahzone (auch statische Zone genannt) überhaupt nicht zum Tragen.

In der **Strahlungs-Fernzone** können wir annehmen

$$d \ll r. \quad (6.101)$$

Weiterhin machen wir die **Langwellennäherung**, dass die Stromverteilung klein gegenüber der Wellenlänge sei

$$d \ll \lambda, \quad (6.102)$$

was zusammen weitere Vereinfachungen im Vektorpotential erlaubt. Zunächst ergibt sich

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{r}} \approx r \left(1 - \frac{1}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' + \mathcal{O}\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right), \quad (6.103)$$

wobei $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ der Normalenvektor zum Aufpunkt ist. Dies im Exponenten eingesetzt ergibt

$$e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \approx e^{ikr} e^{-ik\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'} \approx e^{ikr} (1 - ik\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}' + \dots). \quad (6.104)$$

Wir können die obige Entwicklung aber auch im Nenner benutzen (oder die Zerlegung in Legendre-Polynome aus der Elektrostatik)

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{r} \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}' \right), \quad (6.105)$$

oder zusammengesetzt

$$\frac{e^{+ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \approx \frac{e^{ikr}}{r} \left[1 + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}') \left(\frac{1}{r} - ik \right) + \dots \right]. \quad (6.106)$$

Für den räumlichen Anteil des Vektorpotentials (6.93) ergibt sich damit näherungsweise

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{c} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \frac{1}{c} \left(\frac{1}{r} - ik \right) \frac{e^{ikr}}{r} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') (\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}') d^3r'. \quad (6.107)$$

Der erste Term entspricht elektrischer Dipolstrahlung, der zweite elektrischer Quadrupol- und magnetischer Dipolstrahlung. Man sieht schon am führenden Dipolterm, dass sich das Vektorpotential wie eine auslaufende Kugelwelle, multipliziert mit einem winkelabhängigen Koeffizienten, verhält.

6.5 Dipolstrahlung

Dass der führende Term im Vektorpotential sich direkt mit einem zeitabhängigen Dipolmoment in Verbindung bringen lässt, folgt aus der Kontinuitätsgleichung $-\dot{\omega}\rho(\mathbf{r}) + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$

$$\int d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \int d^3r (\mathbf{j} \cdot \nabla) \mathbf{r} = - \int d^3r \mathbf{r} (\nabla \cdot \mathbf{j}) = -i\omega \int d^3r \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) = -i\omega \mathbf{p}. \quad (6.108)$$

Das **statische Dipolmoment** \mathbf{p} folgt aus dem räumlichen Anteil der Ladungsdichte

$$\mathbf{p} = \int d^3r \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}), \quad \mathbf{p}(t) = \int d^3r \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t) = \Re \mathbf{p} e^{-i\omega t}. \quad (6.109)$$

Mit der Dispersionsrelation $\omega = ck$ können wir nun für das Vektorpotential einfach schreiben

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx -ik \mathbf{p} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (6.110)$$

d.h. die Amplitude der auslaufenden Kugelwelle wird durch das Dipolmoment bestimmt. Durch die radiale Symmetrie in der Ortsabhängigkeit folgt im Fernfeld $\lambda \ll r$

$$\partial_r \frac{e^{ikr}}{r} \approx ik \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (6.111)$$

so dass die Ableitung einfach durch Multiplikation mit ik ersetzt werden kann bzw. allgemeiner $\nabla \rightarrow ik\mathbf{e}_r$. Dies verkleinert den Gültigkeitsbereich, denn bisher hatten wir nur $r, \lambda \gg d$, jetzt betrachten wir $d \ll \lambda \ll r$. Es folgt daher im Fernfeld für den räumlichen Anteil der magnetischen Induktion

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx k^2 (\mathbf{e}_r \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (6.112)$$

und für die elektrische Feldstärke

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \approx -k^2 \mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_r \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (6.113)$$

Man sieht, dass diese senkrecht zueinander und auch auf dem radialen Einheitsvektor stehen. Außerdem gelten diese Ausdrücke nur im Fernfeld $r \gg \lambda \gg d$.

Für die Energiestromdichte erhält man aus dem zeitlich gemittelten Poynting-Vektor (mikroskopisch gilt $\mathbf{B} = \mathbf{H}$)

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{c}{4\pi} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle [\Re \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}] \times [\Re \mathbf{B}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}] \rangle, \quad (6.114)$$

dass sie – wie bei einer auslaufenden Kugelwelle zu erwarten – in radiale Richtung nach außen zeigt, es wird also Energie abgestrahlt. Wären wir z.B. von der avancierten Greenschen Funktion ausgegangen, wäre dies gerade umgekehrt. Allgemein gilt für den Mittelwert zweier mit der gleichen Frequenz oszillierender Größen $a(t) = \Re a_0 e^{-i\omega t}$ und $b(t) = \Re b_0 e^{-i\omega t}$

$$\begin{aligned} \langle a(t)b(t) \rangle &= \frac{1}{4} \langle (a_0 e^{-i\omega t} + a_0^* e^{+i\omega t}) (b_0 e^{-i\omega t} + b_0^* e^{+i\omega t}) \rangle \\ &= \frac{1}{4} (a_0 b_0^* + a_0^* b_0) = \frac{1}{2} \Re(a_0 b_0^*). \end{aligned} \quad (6.115)$$

Die in den Raumwinkel $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ abgestrahlte mittlere Leistung berechnet sich dann zu

$$dP = (\langle \mathbf{S} \rangle \cdot \mathbf{e}_r) r^2 d\Omega. \quad (6.116)$$

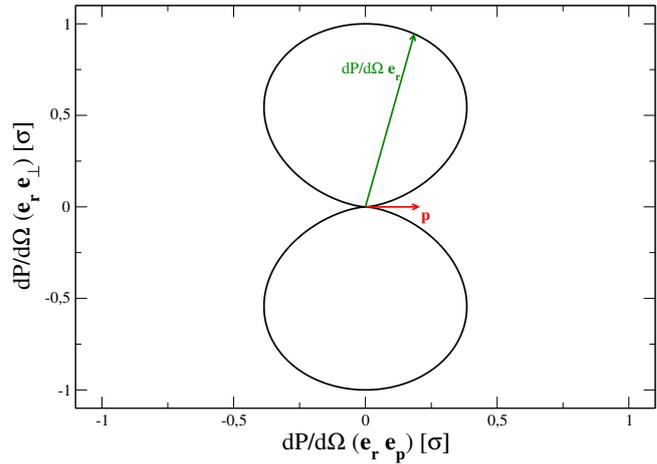
Für die mittlere Strahlungsleistung pro Raumwinkel ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{cr^2}{4\pi} \mathbf{e}_r \cdot \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{cr^2}{8\pi} \mathbf{e}_r \cdot \Re(\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}^*(\mathbf{r})) \\ &= \frac{ck^4}{8\pi} \mathbf{e}_r \cdot [((\mathbf{e}_r \times \mathbf{p}) \times \mathbf{e}_r) \times (\mathbf{e}_r \times \mathbf{p}^*)] \\ &= \frac{\omega^4}{8\pi c^3} ((\mathbf{e}_r \times \mathbf{p}) \times \mathbf{e}_r) \cdot ((\mathbf{e}_r \times \mathbf{p}^*) \times \mathbf{e}_r) \\ &= \frac{\omega^4}{8\pi c^3} (\mathbf{e}_r \times \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{p}^*) = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} |\mathbf{e}_r \times \mathbf{p}|^2. \end{aligned} \quad (6.117)$$

Hier haben wir im ersten Schritt ausgenutzt, dass wir im Kreuzprodukt die Mittelung in jedem einzelnen Term wie oben vollziehen können, ein weiterer Schritt ergab sich aus zyklischen Vertauschungen des entsprechenden Spatproduktes, und weiterhin haben wir das Skalarprodukt der doppelten Kreuzprodukte explizit unter Ausnutzung von $\sum_i \epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$ vereinfacht. Die gemittelte Strahlungsleistung ist somit im Fernfeld unabhängig von r , d.h. der aufintegrierte Energiefluss ist konstant, so dass die Energie bis ins Unendliche transportiert, d.h. abgestrahlt wird. Würden die Felder schneller abfallen, wie z.B. bei einer gleichförmig bewegten Punktladung mit $1/r^2$, hätte man im Fernfeld einen verschwindenden Energiefluss. Eine gleichförmig bewegte Punktladung strahlt nicht. Es ist zu beachten, dass das Dipolmoment hier als komplexwertige Größe zu verstehen ist, was die Strahlungscharakteristik komplizierter macht. Wenn jedoch alle Komponenten von \mathbf{p} dieselbe Phase haben

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} |p_1| \\ |p_2| \\ |p_3| \end{pmatrix} e^{i\delta} = \mathbf{p}_r e^{i\delta}, \quad (6.118)$$

Abbildung 6.9: Strahlungscharakteristik eines oszillierenden Dipolmomentes (rot), in Einheiten von $\sigma = \frac{\omega^4 |\mathbf{p}_r|^2}{8\pi c^3}$. Die Länge des Vektors auf der Kurve gibt die Stärke der Abstrahlung in die jeweilige Richtung an, d.h. sie ist am stärksten in Richtungen senkrecht zum Dipolmoment. Die Richtcharakteristik ist rotations-symmetrisch um \mathbf{p} .



folgt letztlich die **Strahlungscharakteristik eines oszillierenden Dipols**

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} |\mathbf{p}_r|^2 \sin^2 \theta, \quad (6.119)$$

wobei θ der Winkel zwischen \mathbf{p}_r und \mathbf{e}_r ist, definiert durch $\mathbf{p}_r \cdot \mathbf{e}_r = |\mathbf{p}_r| \cos \theta$. Graphisch kann man die Richtcharakteristik der Abstrahlung darstellen, indem man $dP/d\Omega \mathbf{e}_r$ in der $\mathbf{e}_p - \mathbf{e}_\perp$ -Ebene darstellt, vgl. Abb. 6.9. Die Abstrahlung ist also maximal in Richtungen senkrecht zum Dipolmoment und verschwindet in paralleler Richtung. Die gesamte abgestrahlte Leistung ergibt sich durch die Integration über den Raumwinkel

$$P = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} |\mathbf{p}_r|^2 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{\omega^4}{3c^3} |\mathbf{p}_r|^2, \quad (6.120)$$

die quadratische Abhängigkeit vom Dipolmoment und quartische Abhängigkeit von der Frequenz wird auch als **Dipolformel** bezeichnet.

Als Beispiel betrachten wir eine oszillierende Punktladung

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \cos(\omega t)). \quad (6.121)$$

Das zeitabhängige Dipolmoment wird zu

$$\mathbf{p}(t) = \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t) d^3r = q\mathbf{r}_0 \cos(\omega t) = \Re q\mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}, \quad (6.122)$$

so dass das statische Dipolmoment $\mathbf{p} = q\mathbf{r}_0$ folgt – es ist offensichtlich reell. Die gesamte abgestrahlte Leistung wird dann zu

$$P = \frac{\omega^4 q^2 \mathbf{r}_0^2}{3c^3}. \quad (6.123)$$

Etwas anders sieht es aus, wenn sich die Punktladung auf einer Kreisbahn mit Radius R bewegt, z.B. in der xy -Ebene

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q\delta\left(\mathbf{r} - R \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}\right). \quad (6.124)$$

Das zeitabhängige Dipolmoment wird

$$\mathbf{p}(t) = qR \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = qR \Re \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\omega t}, \quad (6.125)$$

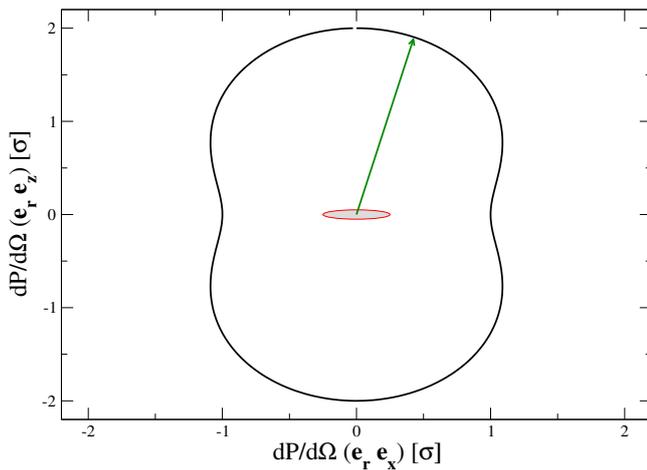


Abbildung 6.10: Strahlungscharakteristik in der xz -Ebene einer auf einem Kreis in der xy -Ebene (grau) rotierenden Punktladung, in Einheiten von $\sigma = \frac{\omega^4 R^2 q^2}{8\pi c^3}$. Sie kann auch als Überlagerung zweier Dipole entlang der x und y Achsen verstanden werden. Die Richtcharakteristik ist rotationssymmetrisch um \mathbf{e}_z .

so das das statische Dipolmoment komplex wird

$$\mathbf{p} = qR \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.126)$$

Damit können wir die Richtcharakteristik nach (6.117) berechnen

$$|\mathbf{e}_r \times \mathbf{p}|^2 = \left| qR \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ 1 & i & 0 \end{vmatrix} \right|^2 = q^2 R^2 [2 - \sin^2 \theta]. \quad (6.127)$$

Einsetzen liefert

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^4 R^2 q^2}{8\pi c^3} [2 - \sin^2 \theta], \quad (6.128)$$

wobei θ jetzt der Winkel zur z -Achse ist, vgl. Abb. 6.10. Winkelintegration liefert letztlich die gesamte Leistung

$$P = \frac{2}{3} \frac{\omega^4 R^2 q^2}{c^3}. \quad (6.129)$$

Dies entspricht gerade der doppelten Strahlungsleistung für einen Dipol, was man sich auch überlegen kann weil die kreisförmige Bewegung in der xy -Ebene auch durch Überlagerung zweier Dipole entlang der x und y -Achsen generiert werden kann.

6.6 Bohrsches Atommodell

Im Bohrschen Atommodell umkreist ein Elektron den Atomkern auf klassischen Kreisbahnen, wobei die einzige Randbedingung ist, dass der Drehimpuls quantisiert ist. Das Modell ist nach heutigem Wissen natürlich nicht korrekt, wir nehmen es aber als Modell an und berechnen den Energieverlust durch die Dipolstrahlung, welche daraus folgen würde. Da schon ein Proton viel schwerer ist als das Elektron (ca ein Faktor 2000) behandeln wir das Proton als stationär (vgl. Mechanik Kepler-Problem). Auf einer stationären Kreisbahn mit Radius r müssen sich die Beträge der Fliehkraft F_{ZF} (Zentrifugalkraft) und der Coulomb-Kraft F_C kompensieren

$$F_{ZF} = \frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{r^2} = F_C. \quad (6.130)$$

Zusätzlich haben wir die Randbedingung, dass der Drehimpuls quantisiert sein soll, d.h.

$$|\mathbf{L}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = m_e r v = \hbar n \quad : \quad n \in \{1, 2, 3, \dots\} \quad (6.131)$$

Wir können diese beiden Gleichungen nach der Bahngeschwindigkeit v und dem Radius r auflösen

$$r_n = \frac{(\hbar n)^2}{m_e e^2}, \quad v_n = \frac{e^2}{\hbar n}. \quad (6.132)$$

Für den kleinsten Radius $n = 1$ ergibt sich gerade der **Bohrsche Radius** $r_1 = a_B = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \approx 0.5 \cdot 10^{-10}$ m und eine Bahngeschwindigkeit von $v_1 = \frac{e^2}{\hbar} = \frac{e^2}{\hbar c} c = \alpha c$ mit der **Feinstrukturkonstante** $\alpha \approx 1/137$. Für die Winkelgeschwindigkeit erhält man für $n = 1$ entsprechend

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{\alpha c}{a_B} \approx 4 \cdot 10^{16} \text{s}^{-1}. \quad (6.133)$$

Diesen Wert können wir in die Strahlungsformel für eine Punktladung auf einer Kreisbahn (6.129) einsetzen

$$P = \frac{2}{3} \frac{\omega^4 a_B^2 e^2}{c^3}. \quad (6.134)$$

Diese Leistung würde das Elektron im Bohrschen Atommodell kontinuierlich abstrahlen, dadurch würde es Energie verlieren und unweigerlich in den Atomkern stürzen. Das Bohrsche Atommodell ist daher nicht mit der Elektrodynamik kompatibel. Dieses klassische Modell erlaubt es aber, die Lebensdauer der angeregten Zustände grob abzuschätzen. Aus der Summe der kinetischen und potentiellen Energien erhalten wir die Gesamtenergie

$$E_n = \frac{1}{2} m_e v_n^2 - \frac{e^2}{r_n} = -\frac{1}{2n^2} \frac{e^4}{\hbar^2} = -\frac{1}{2n^2} \frac{e^2}{a_B}, \quad (6.135)$$

d.h. um die Energie $\Delta E_{12} \approx \frac{e^2}{a_B}$ zwischen dem 1. angeregten Zustand und dem Grundzustand abzustrahlen, wäre die Zeit

$$\Delta t \approx \frac{\Delta E_{12}}{P} \approx 10^{-10} \text{s} \quad (6.136)$$

nötig, d.h. im klassischen Bohrschen Atommodell sind die angeregten Zustände auch extrem kurzlebig. Eine quantenmechanische Abschätzung liefert um den Faktor 100 größere Werte für die Lebensdauer angeregter Zustände.

6.7 Schwingkreis

Wir betrachten eine idealisierte Spule und einen idealisierten Plattenkondensator, welche parallel miteinander gekoppelt sind, vgl. Abb. 6.11. Um die einzelnen Bauelemente zu verstehen, rekapitulieren wir die entsprechenden Kenngrößen aus der Elektrostatik und Magnetostatik. Dann koppeln wir die Bauelemente miteinander und versuchen das Verhalten des Schwingkreises phänomenologisch zu verstehen. Die Schwingung in einem Schwingkreis ist eine oszillierende Ladungsverteilung, welche Dipolstrahlung aussendet. Umgekehrt kann ein Schwingkreis auch durch Strahlung angeregt werden (Antenne).

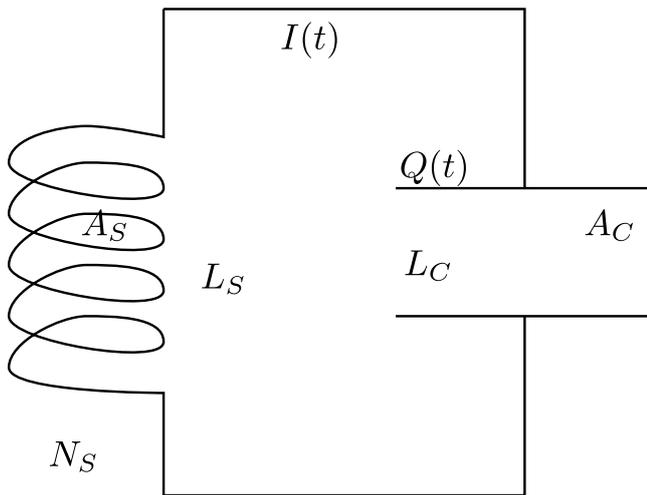


Abbildung 6.11: Abbildung eines ungedämpften Schwingkreises. Die Kenngröße für den Kondensator ist die Kapazität C , die für die Spule ist die Induktivität L .

Idealisierter Plattenkondensator

Wir rekapitulieren nochmal den Plattenkondensator mit Fläche A_C und Plattenabstand L_C . Das elektrische Feld im Plattenkondensator können wir aus den Gleichungen der Elektrostatik bestimmen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (6.137)$$

Vernachlässigen wir das Feld außerhalb des Kondensators und nehmen innerhalb ein konstantes Feld \mathbf{E} an, ergibt sich aus der Integration über ein Gaußsches Kästchen, welches eine Kondensatorplatte beinhaltet, die Relation

$$EA_C = 4\pi Q, \quad (6.138)$$

wobei A_C die Kondensatorfläche ist und Q die Ladung auf der positiv geladenen Platte. Die Potentialdifferenz – oder Spannung – ergibt sich aus dem Integral der Feldstärke, also

$$U = EL_C = 4\pi Q \frac{L_C}{A_C} = \frac{1}{C} Q, \quad (6.139)$$

wobei wir die Kapazität $C = \frac{1}{4\pi} \frac{A_C}{L_C}$ als Kenngröße des Kondensators eingeführt haben, vgl. Gleichung (1.105).

Idealisierte Spule

Jetzt betrachten wir eine idealisierte Spule mit N_S Windungen, Querschnittsfläche A_S und Länge L_S . Im Inneren der Spule nehmen wir ein konstantes Feld an, außen soll das Feld verschwinden, dann bekommen wir aus den Gleichungen der Magnetostatik

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (6.140)$$

durch Legen einer geeigneten Stokes-Schleife durch die Spule die Relation

$$L_S B = \frac{4\pi}{c} I N_S, \quad (6.141)$$

wobei I die Stromstärke durch die Spule ist, vgl. Gleichung (4.67). Der magnetische Fluss Φ_S durch die Spule ergibt sich dann für ein konstantes Feld durch Multiplikation von B mit der Querschnittsfläche

$$\Phi_S = A_S \frac{4\pi}{c} \frac{N_S}{L_S} I, \quad (6.142)$$

woran man sieht, dass für eine gegebene Spule die Stromstärke I direkt proportional zum magnetischen Fluss Φ_S ist. Man definiert dann die **Induktivität** L als Kenngröße der Spule über

$$I = \frac{N_S}{cL} \Phi_S, \quad L = \frac{N_S}{c} \frac{\Phi_S}{I} = 4\pi A_S \frac{N_S^2}{L_S c^2}. \quad (6.143)$$

Phänomenologische ungedämpfte Behandlung

Wenn nun die beiden Bauelemente gekoppelt werden, kann ja weder Elektrostatik noch Magnetostatik gelten und wir müssten eigentlich eine allgemeine Beschreibung mit den Maxwellgleichungen finden. Phänomenologisch können wir jedoch die Relationen einfach zeitabhängig machen, was auch als quasistatische Näherung bezeichnet wird

$$Q(t) \approx CU(t), \quad I(t) \approx \frac{N_S}{cL} \Phi_S(t). \quad (6.144)$$

Aus dem Faraday-Gesetz

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B} = 0 \quad (6.145)$$

ergibt sich dessen integrale Form (5.5)

$$\oint_{\partial F} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \partial_t \iint_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}. \quad (6.146)$$

Die linke Seite entspricht gerade der Spannung über der Spule, die rechte Seite gerade N_S mal der Änderung des magnetischen Flusses – da die Fläche F gerade N_S Windungen hat

$$U(t) = -\frac{N_S}{c} \partial_t \Phi_S(t). \quad (6.147)$$

Wegen der Parallelschaltung entspricht diese Spannung auch der vom Kondensator, und dessen Ladungsänderung $\dot{Q} = I(t)$ muss gerade dem Strom durch die Spule entsprechen (Kontinuitätsgleichung). Damit ergibt sich aus $I(t) \approx \frac{N_S}{cL} \Phi_S(t)$

$$U(t) = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2 Q}{dt^2} = -LC \frac{d^2 U}{dt^2}. \quad (6.148)$$

Die Lösung dieser DGL ist einfach eine Schwingung $U(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi)$ mit der **Schwingkreisfrequenz**

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (6.149)$$

Wegen $Q = CU$ hätten wir natürlich auch die Differenzialgleichung

$$\ddot{Q}(t) + \frac{1}{LC} Q(t) = 0 \quad (6.150)$$

betrachten können, mit einem zusätzlichen Widerstand im Stromkreis hätten wir die Gleichung

$$\ddot{Q}(t) + \frac{R}{L} \dot{Q}(t) + \frac{1}{LC} Q(t) = 0, \quad (6.151)$$

so dass sich eine gedämpfte Schwingung ergeben würde.

Um diese phänomenologischen Resultate abzuleiten, haben wir – über die Streufelder hinaus – einfach vernachlässigt, dass im Kondensator auch ein Magnetfeld entsteht

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B} \approx 0. \quad (6.152)$$

Wegen der Darstellung des elektrischen Feldes durch die Potentiale ist dies analog zur Vernachlässigung des Vektorpotentials im Kondensator

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} \approx \nabla\Phi, \quad (6.153)$$

was wiederum erfordert, dass

$$\frac{1}{c} |\partial_t \mathbf{A}| \ll |\mathbf{E}|. \quad (6.154)$$

Für die Spule haben wir angenommen, dass

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \approx \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (6.155)$$

was gilt wenn

$$|\partial_t \mathbf{E}| \ll |\mathbf{j}|, |\nabla \times \mathbf{B}|. \quad (6.156)$$

Man kann zeigen, dass diese Bedingungen erfüllt sind, wenn

$$\frac{\omega \ell}{c} \ll 1 \quad (6.157)$$

gilt, wobei ℓ eine charakteristische Längenskala des Systems ist. Da $\omega \ell$ gerade die maximale Geschwindigkeit der Ladungsträger im Schwingkreis ist, kann die quasistatische Näherung auch als nichtrelativistische Näherung verstanden werden, die Retardierung in den Potentialen wird dann einfach vernachlässigt und somit auch die Rückwirkung der Abstrahlung auf den Schwingkreis. Der Einfachheit halber nehmen wir an

$$A_C = \ell^2, \quad L_C = \ell, \quad A_S = \pi \ell^2, \quad L_S = \ell, \quad (6.158)$$

für die Schwingkreis-Frequenz bekommen wir damit

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \ell}} \frac{c}{N_S}, \quad (6.159)$$

so dass Einsetzen in die Bedingung liefert

$$\frac{\omega \ell}{c} = \frac{\ell}{\sqrt{LC} c} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{N_S} \ll 1, \quad (6.160)$$

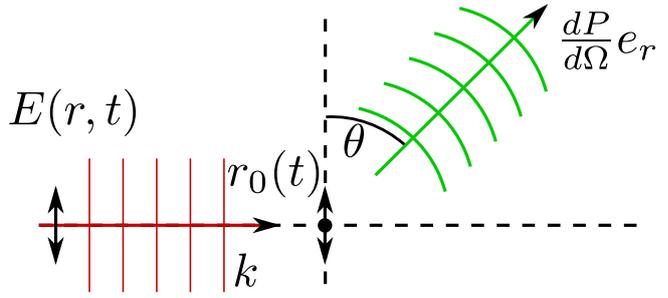
was für große N_S , also viele Spulenwindungen, immer erfüllt werden kann.

6.8 Streuung von Licht

Wir betrachten eine elektromagnetische Welle, welche mit den Elektronen in einem Medium wechselwirkt. Die Felder der einfallenden elektromagnetischen Welle seien gegeben durch

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (6.161)$$

Abbildung 6.12: Eine einfallende ebene Welle (rot) regt mit ihrem elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ erzwungene Schwingungen $\mathbf{r}_0(t)$ in einem gebundenen Elektron an, was zur Emission von Kugelwellen der gleichen Frequenz mit der Dipol-Charakteristik führt (grün).



vgl. Abschnitt 5.5.1. Dann ist in nichtrelativistischer Näherung $v \ll c$ die Bewegungsgleichung des Elektrons am Orte $\mathbf{r}_0(t)$ gegeben durch

$$m_e \ddot{\mathbf{r}}_0(t) + m_e \Gamma \dot{\mathbf{r}}_0(t) + m_e \omega_0^2 \mathbf{r}_0(t) = -e \Re \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0(t) - \omega t)] + \dots \quad (6.162)$$

Hier geht die nichtrelativistische Näherung einerseits durch die Abwesenheit von γ -Faktoren in der Beschleunigung ein, insbesondere aber durch die Abwesenheit des Magnetfeldes, denn dieses wird in der Lorentzkraft auf der rechten Seite mit v/c unterdrückt. Der erste Term der linken Seite beschreibt die Beschleunigung des gebundenen Elektrons. Der zweite Term ist ein phänomenologischer Dämpfungsterm, welcher z.B. durch Abstrahlungsverluste oder auch durch Stöße des Elektrons mit anderen Teilchen motiviert werden kann. Der dritte Term ist die klassische Rückstellkraft in einem harmonischen Oszillatormodell, z.B. können wir aus dem Bohrschen Atommodell annehmen, dass $\omega_0 = m_e e^4 / \hbar^4$ für in Atomen gebundenen Elektronen. Wir machen wieder die Langwellen-Näherung $\lambda \gg |\mathbf{r}_0(t)|$, so dass wir nähern können

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0(t)} \approx 1, \quad (6.163)$$

d.h., unter dieser Näherung vereinfacht sich die Bewegungsgleichung des Elektrons zu der eines getriebenen harmonischen Oszillators (vgl. Mechanik)

$$m_e \ddot{\mathbf{r}}_0 + m_e \Gamma \dot{\mathbf{r}}_0 + m_e \omega_0^2 \mathbf{r}_0 = -e \Re \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (6.164)$$

Die Lösung einer solchen inhomogenen Differentialgleichung ist gegeben durch die Summe aus der Lösung des homogenen Systems und einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems. Da jedoch die Lösung des homogenen Systems durch die Dämpfung mit der Zeit abklingt, betrachten wir im Langzeitlimit nur die spezielle Lösung des inhomogenen Systems, also die erzwungene Schwingung. Wir setzen also an

$$\mathbf{r}_0(t) = \Re \mathbf{a} e^{-i\omega t} \quad (6.165)$$

mit komplexwertiger Größe \mathbf{a} , was auf die Gleichung

$$(-\omega^2 - i\Gamma\omega + \omega_0^2) \mathbf{a} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}_0 \quad (6.166)$$

führt. Das zeitabhängige Dipolmoment des Elektrons wird damit zu

$$\mathbf{p}(t) = -e \mathbf{r}_0(t) = -e \Re \mathbf{a} e^{-i\omega t} = +\Re \frac{e^2/m_e}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (6.167)$$

Die einfallende ebene Welle regt das Elektron zu erzwungenen Schwingungen an, dessen Strahlung als Kugelwelle mit der Dipol-Richtcharakteristik abgestrahlt wird, vgl. Abb. 6.12. Zum einen sieht man hier schon, dass das induzierte zeitabhängige Dipolmoment für sehr große Frequenzen ω verschwinden wird, in diesem Fall ist das Elektron zu träge um der schnellen

Schwingung zu folgen. Das bedeutet aber auch, dass die dielektrische Suszeptibilität in Wirklichkeit für zeitabhängige Felder frequenzabhängig sein muss. Wir sehen also, dass das statische Dipolmoment

$$\mathbf{p} = \frac{e^2/m_e}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} \mathbf{E}_0 = \alpha_e(\omega) \mathbf{E}_0 \quad (6.168)$$

proportional zum Feld der einfallenden Welle ist. Der Proportionalitätsfaktor $\alpha_e(\omega)$ ist zudem frequenzabhängig und heißt **elektrische Polarisierbarkeit**.

Wenn das statische Dipolmoment mit einer Phase schwingt, z.B. schwingt das Elektron für eine linear polarisierte einfallende Welle nur in einer Richtung, können wir die vereinfachte Dipolformel (6.119) benutzen und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{\omega^4}{8\pi c^3} |\mathbf{p}|^2 \sin^2 \theta = \frac{e^4}{m_e^2 8\pi c^3} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} |\mathbf{E}_0|^2 \sin^2 \theta \\ &= \frac{c}{8\pi} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} |\mathbf{E}_0|^2 \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (6.169)$$

wobei θ der Winkel zwischen dem induzierten Dipolmoment und \mathbf{e}_r ist oder \mathbf{E} und \mathbf{e}_r ist. Diese Art der Streuung ändert nicht die Frequenz des abgestrahlten Lichtes.

Dann schwingt das gebundene Elektron in der Schwingungsrichtung des elektrischen Feldes, die ausgesandte Strahlung hat die Charakteristik einer auslaufenden Kugelwelle, elektrisches Feld und magnetische Induktion stehen senkrecht aufeinander

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \approx k^2 (\mathbf{e}_r \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx -k^2 \mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_r \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (6.170)$$

Anhand dieser Charakteristik kann man sehen, dass die Felder (im Fernfeld) senkrecht zu \mathbf{e}_r stehen. Die Richtcharakteristik $dP/d\Omega$ liefert uns aber nur die Richtung des gestreuten Lichtes, sie ist immer noch proportional zu $|\mathbf{E}_0|^2$ und damit zur Intensität der einfallenden Welle. Um diese Abhängigkeit zu eliminieren und damit eine Eigenschaft des Streuzentrums zu erhalten, betrachtet man den **differentiellen Wirkungsquerschnitt**

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dN_{\text{out}}/(dtd\Omega)}{dN_{\text{in}}/(dtdF)}, \quad (6.171)$$

definiert durch das Verhältnis der in den Raumwinkel $d\Omega$ pro Zeit dt gestreuten Teilchen dN_{out} zu den pro Fläche dF und Zeiteinheit dt einfallenden Teilchen dN_{in} . Allerdings betrachtet man in der Elektrodynamik keine Teilchen, sondern einfach die abgestrahlte Leistung, also vergleicht man statt Teilchen Energien

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\frac{dP}{d\Omega}}{\langle |\mathbf{S}_{\text{in}}| \rangle}, \quad (6.172)$$

wobei \mathbf{S}_{in} der Poynting-Vektor der einfallenden Welle ist, also in unserem Falle mit (5.101)

$$\langle |\mathbf{S}_{\text{in}}| \rangle = \frac{c}{8\pi} |\mathbf{E}_0|^2. \quad (6.173)$$

Es verbleibt für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \sin^2 \theta, \quad (6.174)$$

bzw. für den **totalen Wirkungsquerschnitt der Lichtstreuung**

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}. \quad (6.175)$$

Diese Größe gibt an, wie stark einfallendes Licht der Frequenz ω durch das gebundene Elektron gestreut wird. Sie verschwindet für kleine Frequenzen wie ω^4 , hat bei $\omega = \omega_0$ ein Maximum und geht für $\omega \rightarrow \infty$ gegen einen konstanten Wert. Man unterscheidet entsprechend die Regime

- **Rayleighstreuung:**

Für $\omega, \Gamma \ll \omega_0$ folgt, dass der totale Wirkungsquerschnitt mit der 4. Potenz der Frequenz skaliert

$$\sigma \approx \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{\omega_0^4} \equiv \sigma_{\text{Th}} \frac{\omega^4}{\omega_0^4}. \quad (6.176)$$

Dies führt zu bekannten Alltagsphänomenen, z.B. gilt für sichtbares Licht in Luft $\omega/\omega_0 \approx 0.1$. Schlüsselst man dies weiter auf, kann man die Streuquerschnitte von rotem und blauem Licht miteinander vergleichen

$$\frac{\sigma_{\text{blau}}}{\sigma_{\text{rot}}} \approx \frac{\omega_{\text{blau}}^4}{\omega_{\text{rot}}^4} = \frac{\lambda_{\text{rot}}^4}{\lambda_{\text{blau}}^4} \approx 10, \quad (6.177)$$

legt man $\lambda_{\text{rot}} \approx 700$ nm und $\lambda_{\text{blau}} \approx 400$ nm zugrunde. Die blauen Anteile im Sonnenlicht werden also durch die Elektronen in der Luft deutlich stärker gestreut als die roten, daher erscheint uns tagsüber der Himmel als blau, dies ist gestreutes Sonnenlicht. Beim Sonnenuntergang schauen wir dagegen direkt in die Sonne, hier wird der blaue Anteil durch die Streuung stärker reduziert, denn durch den schrägen Einfallswinkel ist die Strecke durch die Atmosphäre länger, so dass die Sonne rot erscheint.

- **Resonanz:**

Für $\omega = \omega_0$ hat der Wirkungsquerschnitt ein Maximum

$$\sigma = \sigma_{\text{Th}} \frac{\omega_0^2}{\Gamma^2}. \quad (6.178)$$

Da das gestreute Licht in unserem Modell dieselbe Frequenz wie die einfallende Welle hat, könnte es gleich durch ein anderes gleichartig gebundenes Elektron wieder gestreut werden, in diesem Fall spricht man auch von Resonanzfluoreszenz. Für einzelne Atome ist jedoch auch der Impulsübertrag auf das Atom zu berücksichtigen, welcher die Wellenlänge des emittierten Lichtes so verändert, dass eine erneute Absorption unwahrscheinlich ist. Nehmen jedoch mehrere Atome, z.B. in einem Kristallgitter, diesen Impuls auf, wird dieser Prozess möglich und führt zum Mößbauer-Effekt.

- **Thomsonstreuung:**

Für unendliche große Frequenzen geht der Wirkungsquerschnitt gegen

$$\sigma_{\text{Th}} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2, \quad (6.179)$$

was sich im Rahmen des Modells verstehen lässt, da das Elektron der Schwingung der einfallenden Welle immer weniger folgen kann, schließlich gilt für große Frequenzen $|\mathbf{r}_0| \propto \omega^{-2}$, die gesamte abgestrahlte Leistung skaliert wie $|\mathbf{p}|^2 \omega^4$, so dass sich ein endlicher Wert ergibt. Allerdings ist für solch hohe Frequenzen unser Modell nicht mehr gültig, da die Langwellen-Näherung nicht mehr gilt. Eine relativistische Rechnung der Quantenelektrodynamik liefert, dass für sehr hohe Frequenzen der Wirkungsquerschnitt verschwindet.

6.9 Formfaktor

Es gibt jedoch auch außer der Frequenzabhängigkeit noch andere interessante Streu-Effekte. Zum Beispiel gibt es bei mehreren identischen Streuzentren eine Interferenz des gestreuten Lichtes. Da sich diese an verschiedenen Orten befinden, schwingen sie gerade mit der Phase des elektrischen Feldes an ihrem Ort \mathbf{r}_j (die Auslenkung wäre dann gegeben durch $\Delta\mathbf{r}_j$)

$$\mathbf{p}_j(t) \propto \mathbf{E}(\mathbf{r}_j, t), \quad (6.180)$$

so dass das statische Dipolmoment den Phasenfaktor $\mathbf{p} \propto e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j}$ erhält. Ein zusätzlicher Phasenfaktor $e^{-ik\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{r}_j} \approx e^{-ik\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{r}_j}$ ergibt sich dann aus den Wegdifferenzen der verschiedenen Streuzentren zum Beobachtungspunkt. Für N identische Streuzentren kann man dies für den Wirkungsquerschnitt zusammenfassen

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_N = \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_1 \left| \sum_{j=1}^N e^{i(\mathbf{k}-k\mathbf{e}_r)\cdot\mathbf{r}_j} \right|^2 = \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_1 |F(\mathbf{k} - k\mathbf{e}_r)|^2 \quad (6.181)$$

wobei der **Formfaktor**

$$F(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^N e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_j} = \int \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3r \quad (6.182)$$

gerade die Fourier-Transformierte der Teilchendichte der Streuzentren ist. Auswertung des Wirkungsquerschnittes der Lichtstreuung erlaubt also Rückschlüsse auf die räumliche Verteilung.

6.9.1 Röntgenstrukturanalyse

Insbesondere lässt sich in der Festkörperphysik damit die Kristallstruktur eines Gitters bestimmen (vgl. VL Festkörperphysik). Für einen Kristall mit den Abmessungen aN_i und in einem einfach kubischen Gitter mit der Gitterkonstante a z.B. wird der Formfaktor zu

$$F(\mathbf{q}) = \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \sum_{k=0}^{N_z-1} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_{ijk}}, \quad \mathbf{r}_{ijk} = a(i\mathbf{e}_x + j\mathbf{e}_y + k\mathbf{e}_z). \quad (6.183)$$

Die Summen faktorisieren, und man erhält z.B. aus der geometrischen Reihe

$$\sum_{j=0}^{N_y-1} e^{iaj\mathbf{q}\cdot\mathbf{e}_y} = \frac{1 - e^{iN_y a q_y}}{1 - e^{ia q_y}} = \frac{\sin(N_y a q_y/2)}{\sin(a q_y/2)} e^{i(N_y-1) a q_y/2}. \quad (6.184)$$

Einsetzen in den Formfaktor liefert mit $N = N_x N_y N_z$

$$|F(\mathbf{q})|^2 = N^2 \frac{\sin^2(N_x a q_x/2)}{N_x^2 \sin^2(a q_x/2)} \cdot \frac{\sin^2(N_y a q_y/2)}{N_y^2 \sin^2(a q_y/2)} \cdot \frac{\sin^2(N_z a q_z/2)}{N_z \sin^2(a q_z/2)}. \quad (6.185)$$

Für sehr große $N_x, N_y, N_z \gg 1$ überleben nur die Beiträge mit

$$q_i a = 2\pi n_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad (6.186)$$

d.h. das Licht wird nur in bestimmte ausgezeichnete Richtungen gestreut. Aus $\mathbf{q} = \mathbf{k} - k\mathbf{e}_r$ erhalten wir letztlich die Bedingung

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{q}{2k} = \frac{\lambda}{2a} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}, \quad (6.187)$$

wobei θ der Winkel zwischen \mathbf{k} und \mathbf{e}_r ist, also zwischen der einfallenden Welle und der gestreuten Welle. Wegen $\sin(x) \leq 1$ kann diese sog. Bragg-Bedingung nur für einige wenige n_i erfüllt werden, insbesondere benötigt man genügend kleine Wellenlängen $\lambda < 2a$, um nicht nur ungestreutes Licht mit $\theta = 0$ zu erhalten. Im Experiment kann mit monochromatischem Röntgenlicht aus der Lage der Maxima und deren Abstand dann auf den Kristalltyp und die Gitterkonstante a geschlossen werden.

6.9.2 Kohärente und Inkohärente Streuung

Für allgemeine Positionen \mathbf{r}_j der Streuzentren ergibt sich für den Formfaktor

$$|F(\mathbf{q})|^2 = \sum_{i,j} e^{+i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)} = N + 2 \sum_{i<j} \cos[\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)]. \quad (6.188)$$

Auch wenn die Streuzentren statistisch verteilt sind, kann man noch grundlegende Aussagen über das Streuverhalten treffen. Seien die Streuzentren \mathbf{r}_j z.B. alle in einer Kugel mit $|\mathbf{r}_j| \leq R$ verteilt. Für $R \ll \lambda$ gilt $\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j) \ll 1$ und der Formfaktor skaliert wie N^2 . Im entgegengesetzten Fall $R \gg \lambda$ ergeben sich lauter verschiedene Phasen, welche sich bei homogen und zufällig verteilten Atomen in einem Gas größtenteils wegmitteln, man hat dann also nur den Diagonalbeitrag und somit skaliert der Formfaktor wie N . Je nachdem, ob die Streuzentren nah beieinander sind oder nicht, ergibt sich also eine deutliche Verstärkung des Streuquerschnittes

$$|F(\mathbf{q})|^2 \propto \begin{cases} N^2 & : R \ll \lambda & \text{(kohärente Streuung)} \\ N & : R \gg \lambda & \text{(inkohärente Streuung)} \end{cases} \quad (6.189)$$

Wenn Wasserdampf in der Luft zu Nebel kondensiert, kann man diese Verstärkung beobachten. Für Wasserdampf in der Luft gilt inkohärente Streuung $R \gg \lambda$, deswegen ist mit Wasserdampf gesättigte Luft durchsichtig. Wenn die Wassermoleküle zu kleinen Tröpfchen kondensieren, ändert sich die gemittelte Dichte des Wassers in der Luft nicht, jedoch liegen die Streuzentren innerhalb der Tröpfchen jetzt eng beieinander, so dass $R \ll \lambda$ gilt. Für Tröpfchen mit 10^6 Wassermolekülen erhöht sich damit der Streuquerschnitt um einen entsprechenden Faktor, es bildet sich dabei undurchsichtiger Nebel.

Kapitel 7

Optik

7.1 Kausale Verknüpfungsgleichungen

Elektrodynamik beschreibt zu einem großen Teil die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen, welche wir bisher meist im Vakuum behandelt haben. In der Optik behandeln wir die Ausbreitung ebendieser Wellen aber auch in Materie und an Grenzflächen. Bisher hatten wir in Materie zeitunabhängige Verknüpfungsgleichungen zwischen der dielektrischen Verschiebung und der elektrischen Feldstärke und der magnetischen Induktion und Feldstärke angenommen

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (7.1)$$

Mikroskopisch begründet wurde dies mit der Ausrichtung von Dipolmomenten in einem externen Feld, und für statische oder zeitlich sehr langsam variierende Felder kann man dies auch so machen. Jedoch hatten wir schon gesehen, dass für sehr große Frequenzen das induzierte Dipolmoment verschwindet, hier kann das gebundene Elektron der Schwingung der einfallenden Welle nicht mehr folgen. Allgemein kann man sich vorstellen, dass ein induziertes Dipolmoment auch auf die Anregung der Welle hin erst verzögert aufgebaut werden sollte, genau wie wir es in der Green'schen Funktion der Wellengleichung gefunden haben. Die zeitgleichen Verknüpfungsgleichungen oben können also so gar nicht stimmen.

Anders als bisher betrachten wir jetzt nicht mehr nur monochromatische Anregungen, sondern allgemeine Zeitabhängigkeiten. Diese können wir jedoch aus den betrachteten Fällen oszillierender Ladungsverteilungen erschließen. Allgemeine Zeitabhängigkeiten von Ladungsverteilungen und Strömen können wir durch Fourier-Transformationen ausdrücken, z.B. für die Ladungsverteilung

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \rho(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (7.2)$$

Hier bezeichnet

$$\rho(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \rho(\mathbf{r}, t) e^{+i\omega t} dt \quad (7.3)$$

die zeitliche Fourier-Transformierte der Ladungsdichte (da wir vorher immer nur eine Frequenz betrachtet haben, hatten wir einfach die Frequenzabhängigkeit weggelassen). Damit wird auch klar, dass $\rho(\mathbf{r}, \omega)$ komplexwertig sein kann. Für solche Superpositionen können wir auch die Maxwellgleichungen lösen, und aufgrund der Linearität derselben ergibt sich, dass wir, wenn wir sämtliche Felder auch mit den gleichen Fourier-Konventionen transformieren, z.B.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (7.4)$$

die Zeitableitungen in den Maxwellgleichungen eliminieren. Aus

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= 4\pi\rho(\mathbf{r}, t), & \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0, & \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (7.5)$$

wird dann

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) &= 4\pi\rho(\mathbf{r}, \omega), & \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) - i\frac{\omega}{c}\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) &= 0, & \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) + i\frac{\omega}{c}\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega), \end{aligned} \quad (7.6)$$

so dass hiermit die Zeitabhängigkeiten eliminiert sind. Insbesondere hatten wir für ein einzelnes statisches Dipolmoment (6.168) gefunden

$$\mathbf{p} = \alpha_e(\omega)\mathbf{E}, \quad (7.7)$$

wobei \mathbf{E} das Feld der einfallenden Welle war. Eine Dipoldichte wird daraus durch Multiplikation mit der Teilchendichte, so dass wir eine frequenzabhängige dielektrische Funktion erhalten

$$\epsilon(\omega) = 1 + 4\pi\chi_e(\omega) = 1 + 4\pi n_e \alpha_e(\omega). \quad (7.8)$$

Im statischen Fall ging das induzierte Dipolmoment über eine Dipoldichte in die dielektrische Suszeptibilität ein und dann somit in die Dielektrizitätskonstante. Machen wir dieselben Linearitäts- und Isotropie- und Homogenitätsannahmen wie im statischen Fall und nehmen wir an, dass ähnliche Modelle auch für eine zeitabhängige Magnetisierung existieren, hat man jetzt die **Verknüpfungsgleichungen im Frequenzraum**

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mu(\omega)\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega). \quad (7.9)$$

Die Frequenzabhängigkeit zeigt uns, dass die Dielektrizitätskonstante selbst unter diesen vereinfachenden Annahmen gar keine Konstante ist. Entsprechend heißt $\epsilon(\omega)$ **dielektrische Funktion**. Wir behandeln hier nur die dielektrische Verschiebung genauer, der Zusammenhang zwischen magnetischer Induktion und Feldstärke folgt analog.

Transformieren wir die dielektrische Verschiebung zurück in die Zeitdomäne, ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \epsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \epsilon(\omega) \int dt' \mathbf{E}(\mathbf{r}, t')e^{-i\omega(t-t')} \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{4\pi}{\sqrt{2\pi}} \int dt' \chi(t-t')\mathbf{E}(\mathbf{r}, t'), \end{aligned} \quad (7.10)$$

mit

$$\epsilon(\omega) = [1 + 4\pi\chi(\omega)], \quad (7.11)$$

und $\chi(\tau)$ ist gerade die inverse Fourier-Transformierte von $\chi(\omega)$. Die dielektrische Verschiebung hängt also in zeitlich nicht-lokaler Weise mit der elektrischen Feldstärke zusammen. Dieses Verhalten, dass Produkte im Frequenzraum auf eine Faltung im Zeitraum abgebildet werden (und umgekehrt) ist generisch für Fourier-Transformationen, und Analoga findet man auch für Laplace-Transformationen.

Physikalisch muss jedoch Kausalität sichergestellt sein, d.h. formal dürfen im Integral nur Werte $t' < t$ beitragen. Für realistische Modelle ist dies per Konstruktion erfüllt, wir setzen z.B. aus (6.168) an

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega}, \quad (7.12)$$

mit Parametern ω_p , ω_0 und Γ . Die inverse FT hiervon wird zu

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\omega_p^2 e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} d\omega = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\omega_p^2 e^{-i\omega t}}{(\omega - \omega_-)(\omega - \omega_+)} d\omega,$$

$$\omega_{\pm} = -i\frac{\Gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}}. \quad (7.13)$$

Die Pole liegen also wegen $\Gamma > 0$ in der unteren komplexen Halbebene. Für $t > 0$ müssen wir wegen $-i\omega = -i(\omega_x + i\omega_y) = -i\omega_x + \omega_y$ die komplexe Kontur in der unteren Halbebene schließen, hier ergibt das Integral nach dem Residuensatz

$$\chi(t > 0) = \omega_p^2 \frac{\sin \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}} t}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}}} e^{-\Gamma t/2}. \quad (7.14)$$

Für $t < 0$ schließen wir das Integral in der oberen Halbebene. Hier liegen keine Pole innerhalb der Kontur, und der Residuensatz liefert

$$\chi(t < 0) = 0. \quad (7.15)$$

Zusammen erhält man also

$$\chi(t) = \omega_p^2 \frac{\sin \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}} t}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}}} e^{-\Gamma t/2} \Theta(t). \quad (7.16)$$

Diese Θ -Funktion kann man ausnutzen, um die zeitliche Integration entsprechend einzuschränken

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{4\pi}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t dt' \chi(t-t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{4\pi}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \chi(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t-\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (7.17)$$

woran man sieht, dass die Kausalität respektiert wird, denn zum Integral tragen nur Werte des elektrischen Feldes für $t' < t$ bei.

Wegen der reellen Felder muss auch die Kernelfunktion $\chi(\tau)$ reell sein. Für die Suszeptibilität muss dann gelten

$$\chi^*(+\omega) = \chi(-\omega^*). \quad (7.18)$$

Unter Ausnutzung der Kausalität folgt für die Fourier-Transformierte des Kerns

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \chi(\tau) e^{+i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \chi(\tau) e^{+i\omega\tau} d\tau. \quad (7.19)$$

Wenn $\chi(\tau)$ endlich ist, konvergiert dieses Integral immer in der oberen Halbebene $\omega = \omega_x + i\omega_y$ mit $\omega_y > 0$. Wenn wir fordern, dass $\chi(\tau)$ hinreichend schnell abfällt (Gedächtnisfunktion), konvergiert das Integral auch auf der reellen Achse $\omega_y = 0$ ($\omega = \omega_x \in \mathbb{R}$). Daraus folgt, dass für eine kausale Kernelfunktion ihre Fouriertransformierte $\chi(\omega)$ eine analytische Funktion in der gesamten oberen Halbebene $\omega \geq 0$ sein muss.

Gleichung (6.168) beschreibt die Antwort eines einzelnen Dipols auf ein elektrisches Feld. Um dies zu mitteln und analog zur Elektrostatik eine Dipoldichte zu bekommen, multiplizieren wir mit der Dichte der Atome n_0

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi n_0 e^2 / m_e}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega}. \quad (7.20)$$

Insbesondere erhält man unter der Annahme, dass es in jedem Atom Z gebundene Elektronen gibt, von denen jeweils f_j gleich gebunden sind mit der Frequenz ω_j und der Dämpfung Γ_j , das **Lorentzmodell**

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi n_0 e^2}{m_e} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\Gamma_j \omega}. \quad (7.21)$$

Dieses Modell wird für eine Reihe verschiedenster Bindungstypen benutzt, und offensichtlich respektiert es auch die Kausalität der Verknüpfungsgleichungen.

7.2 Wellenlösungen in Medien

Um die Bedeutung der Größen $\epsilon(\omega)$ und $\mu(\omega)$ besser zu verstehen, betrachten wir die Fourier-transformierten Wellengleichungen in Medien (7.6) für eine feste reelle Frequenz ω mit den Verknüpfungsgleichungen (7.9), jedoch in Abwesenheit einer extern vorgegebenen Ladungsverteilung und Stromdichte

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) - \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) &= 0, & \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{i\omega}{c} \mu(\omega) \epsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) &= 0. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Hierbei sind die Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega)$ komplexwertig, genauso wie die Funktionen $\mu(\omega)$ und $\epsilon(\omega)$, die physikalischen Felder ergeben sich dann für eine feste Frequenz durch Realteilbildung, z.B. $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t}$ oder für eine kontinuierliche Frequenzverteilung durch inverse FT und Realteilbildung, z.B. $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \propto \Re \int \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$ (der Koeffizient folgt eindeutig aus den Anfangs- bzw. Randbedingungen). Durch Bildung der doppelten Rotation können wir wieder Wellengleichungen ableiten

$$\left[\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \mu(\omega) \epsilon(\omega) \right] \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad \left[\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \mu(\omega) \epsilon(\omega) \right] \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = 0. \quad (7.23)$$

Der Unterschied in der Behandlung in Abschnitt 5.6 ist jedoch, dass $\mu(\omega)$ und $\epsilon(\omega)$ jetzt komplexwertige und frequenzabhängige Größen sind. Wir benutzen zur Lösung wieder den Ansatz für ebene Wellen, jetzt nur für den räumlichen Anteil

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}_0(\omega) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{B}_0(\omega) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (7.24)$$

Einerseits müssen \mathbf{k} , \mathbf{E}_0 und \mathbf{B}_0 wieder senkrecht aufeinander stehen, was man durch Einsetzen sieht:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 - \frac{\omega}{c} \mathbf{B}_0 = 0, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 + \frac{\omega}{c} \mu(\omega) \epsilon(\omega) \mathbf{E}_0 = 0. \quad (7.25)$$

Zusätzlich folgt auch, dass der komplexwertige Wellenvektor \mathbf{k} die Bedingung

$$\omega^2 = \frac{c^2 \mathbf{k}^2}{\epsilon(\omega) \mu(\omega)} \equiv \frac{c^2 k^2}{n^2(\omega)} \quad (7.26)$$

erfüllen muss. Die so definierte Größe ist der **Brechungsindex**

$$n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega) \mu(\omega)} = n_r(\omega) + i\kappa(\omega), \quad (7.27)$$

der Unterschied zu (5.147) ist nur, dass er jetzt komplexwertig werden kann. Die Vakuumlösung erhält man dann schließlich einfach für $n_r(\omega) = 1$ und $\kappa(\omega) = 0$.

Um zu verstehen, welche physikalische Bedeutung die Real- und Imaginärteile von $n(\omega)$ haben, betrachten wir die Lösung für die ebene Welle genauer. Im Allgemeinen können die Realteile und Imaginärteile von $\mathbf{k} = \mathbf{k}_r(\omega) + i\mathbf{k}_i(\omega)$ in zwei verschiedene Richtungen zeigen. Der Realteil $\mathbf{k}_r(\omega)$ führt also im Ansatz $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ zu einer Schwingung, wohingegen der Imaginärteil $\mathbf{k}_i(\omega)$ zu einer Dämpfung (oder ggf. Verstärkung) führt. Betrachten wir die sich in positiver x -Richtung ausbreitende Welle mit

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \beta + i\frac{\alpha}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7.28)$$

so folgt aus

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{i\beta x} e^{-\alpha x/2}, \quad (7.29)$$

dass die Intensität der Welle (gebildet aus dem Betragsquadrat) in Ausbreitungsrichtung im Medium wie $e^{-\alpha x}$ abfällt. Die Energie der Welle wird vom Medium absorbiert und auf interne Freiheitsgrade übertragen, α heißt daher auch **Absorbtionskoeffizient**. Die Koeffizienten müssen aber die Gleichung (7.26)

$$\epsilon(\omega)\mu(\omega)\frac{\omega^2}{c^2} = (\beta + i\alpha/2)^2 \quad (7.30)$$

erfüllen. Wertet man dies für $\mu(\omega) \approx 1$ (empirischer Sachverhalt) weiter aus, folgen

$$\Re\epsilon(\omega)\frac{\omega^2}{c^2} \approx \beta^2 - \frac{\alpha^2}{4}, \quad \Im\epsilon(\omega)\frac{\omega^2}{c^2} \approx \beta\alpha. \quad (7.31)$$

Für $\alpha \ll \beta$ können wir dies näherungsweise nach dem Absorbtionskoeffizient α auflösen

$$\alpha \approx \frac{\Im\epsilon(\omega)}{\Re\epsilon(\omega)}\beta, \quad \beta \approx \frac{\omega}{c}\sqrt{\Re\epsilon(\omega)}. \quad (7.32)$$

Die Real- und Imaginärteile von $\epsilon(\omega)$ liefern also Informationen über das Absorptionsverhalten von Medien.

7.3 Die dielektrische Funktion

7.3.1 Kramers-Kronig-Relationen

Wir betrachten hier die dielektrische Funktion anstelle der Suszeptibilität $\chi(\omega) = 1/(4\pi)[\epsilon(\omega) - 1]$, da letztere nicht so üblich ist. Ansonsten ist jedoch eine völlig analoge Diskussion auch für die Suszeptibilität möglich.

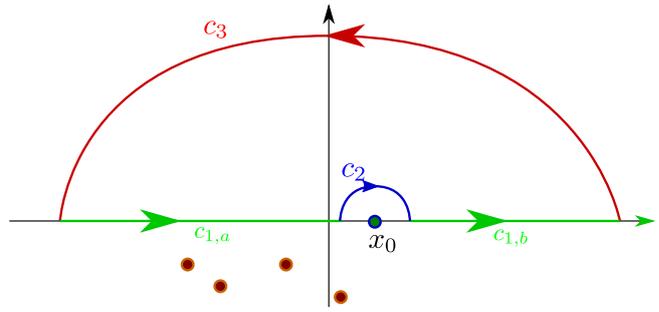
Wir gehen aus von einer dielektrischen Funktion, welche die Kausalität respektiert

$$\epsilon^*(+\omega) = \epsilon(-\omega^*), \quad \epsilon(\omega) \text{ sei holomorph } \forall \Im\omega \geq 0. \quad (7.33)$$

Dann gilt für das Integral der Form

$$\oint_c \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' + \int_{c_2} \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' + \int_{c_3} \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' = 0, \quad (7.34)$$

Abbildung 7.1: Die Pole von $\epsilon(\omega)$ liegen nur in der unteren komplexen Halbebene, so dass das Integral entlang der geschlossenen Kontur verschwindet.



denn in der oberen Halbebene ist $\epsilon(\omega)$ ja holomorph. Dies hat die Form von Gleichung (6.51). Der Unterschied zu Abb. 6.5 ist nur, dass in der oberen Halbebene keinerlei Pole vorhanden sind, vgl. Abb. 7.1. Daher erhalten wir mit (6.51)

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' = \pi i [\epsilon(\omega) - 1]. \quad (7.35)$$

Auflösung liefert

$$\epsilon(\omega) - 1 = \frac{-i}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (7.36)$$

Also sind die Real- und Imaginärteile der dielektrischen Funktion mittels der **Kramers-Kronig-Relationen**

$$\begin{aligned} \Re\epsilon(\omega) &= 1 + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int \frac{\Im\epsilon(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \\ \Im\epsilon(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int \frac{\Re\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' \end{aligned} \quad (7.37)$$

verknüpft. Zusätzlich muss aber wegen $\epsilon^*(+\omega) = \epsilon(-\omega^*)$ für reelle ω auch gelten

$$\Re\epsilon(-\omega) = +\Re\epsilon(+\omega), \quad \Im\epsilon(-\omega) = -\Im\epsilon(+\omega), \quad (7.38)$$

d.h. der Realteil ist eine gerade Funktion von ω und der Imaginärteil eine ungerade. Wegen

$$\int f(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} [f(\omega) + f(-\omega)] d\omega \quad (7.39)$$

folgen die **Dispersionsgesetze**

$$\begin{aligned} \Re\epsilon(\omega) &= 1 + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\omega' \Im\epsilon(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega', \\ \Im\epsilon(\omega) &= -\frac{2\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\Re\epsilon(\omega') - 1}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Sie können dazu dienen, die Konsistenz (Kausalität) einer gegebenen dielektrischen Funktion zu überprüfen oder aber aus z.B. einem gegebenen Imaginärteil (diesen erhält man aus der Messung des Absorptionsverhaltens) den Realteil zu konstruieren. Im folgenden werden wir die Bedeutung der Real- und Imaginärteile der dielektrischen Funktion diskutieren.

7.3.2 Metalle

In Metallen sind nur die inneren Elektronen fest gebunden, es gibt jedoch mindestens ein Elektron pro Atomrumpf welches sich weitestgehend frei bewegen kann. Frei bewegliche Elektronen

müssten eigentlich mit einer räumlich-zeitlich abhängigen dielektrischen Funktion $\epsilon(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')$ besser behandelt werden, die Verknüpfungsgleichungen würde dann in der Zeitdomäne ein Integral sowohl über \mathbf{r}' als auch über t' beinhalten. Wir gehen hier aber den einfacheren Weg und vernachlässigen dies. Wir modellieren dies im Lorentz-Modell, indem wir für das erste – frei bewegliche – Elektron setzen

$$\omega_1 = 0, \quad \Gamma_1 = \Gamma. \quad (7.41)$$

Für die anderen Elektronen gelte $\omega_i > 0$. Das Lorentz-Modell wird dann zum **Drude-Modell**

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0(\omega) - \frac{4\pi n_0 e^2}{m_e} \frac{1}{\omega(\omega + i\Gamma)} = \epsilon_0(\omega) + i \frac{4\pi\sigma(\omega)}{\omega}. \quad (7.42)$$

Hier enthält $\epsilon_0(\omega)$ die Eins und die Beiträge der fest gebundenen Elektronen ($j > 1$). Die so definierte **Leitfähigkeit** wird zu

$$\sigma(\omega) = \frac{n_0 e^2}{m_e \Gamma} \frac{1}{1 - i\omega/\Gamma} \approx \frac{n_0 e^2}{m_e \Gamma} \quad (7.43)$$

und geht für kleine Frequenzen gegen eine reelle Konstante, proportional zur Dichte und invers proportional zur Elektronenmasse und zur Dämpfung. Einsetzen in die letzte der FT-Maxwellgleichungen (7.6) führt auf

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega)}{\mu(\omega)} + \frac{i\omega}{c} \left(\epsilon_0(\omega) + i \frac{4\pi\sigma(\omega)}{\omega} \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, \omega). \quad (7.44)$$

Hier ist \mathbf{j}_{ext} als externe Stromdichte zu interpretieren. Bringen wir den Beitrag der ungebundenen Elektronen auf die andere Seite, wird daraus

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega)}{\mu(\omega)} + \frac{i\omega}{c} \epsilon_0(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{4\pi}{c} [\mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, \omega) + \sigma(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)]. \quad (7.45)$$

Damit folgt, dass die freien, nicht fest an ein Atom gebundenen, Elektronen einen Beitrag zur Stromdichte generieren

$$\mathbf{j}_{\text{ind}}(\mathbf{r}, \omega) = \sigma(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad (7.46)$$

und insbesondere rechtfertigt dies die Bezeichnung Leitfähigkeit für die Größe σ .

Betrachten wir Frequenzen, welche von den ω_i der gebundenen Elektronen weit entfernt sind, können wir deren Beitrag vernachlässigen $\epsilon_0(\omega) \approx 1$, also

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0(\omega) - \frac{4\pi n_0 e^2}{m_e} \frac{1}{\omega(\omega + i\Gamma)} \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\Gamma)} \quad (7.47)$$

mit der **Plasmafrequenz** ω_p . Durch Erweitern des separierten Anteils von $\epsilon(\omega)$ mit $\omega - i\Gamma$ finden wir für diese Frequenzen für den Real- und Imaginärteil der dielektrischen Funktion

$$\Re\epsilon(\omega) \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \Gamma^2}, \quad \Im\epsilon(\omega) \approx \frac{\omega_p^2 \Gamma}{\omega(\omega^2 + \Gamma^2)}, \quad (7.48)$$

und die Leitfähigkeit wird gegeben durch den Imaginärteil der dielektrischen Funktion bei kleinen Frequenzen

$$\sigma(0) = \frac{\omega_p^2}{4\pi\Gamma} = \frac{n_0 e^2}{m_e \Gamma}. \quad (7.49)$$

Abhängig vom Verhältnis von ω , ω_p und Γ kommt es zu verschiedenen Phänomenen.

- Für $\omega \ll \Gamma$ nähert man

$$\epsilon(\omega) \approx 1 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \approx i \frac{4\pi\sigma}{\omega}. \quad (7.50)$$

Der Brechungsindex wird zu

$$n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)} \approx \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{4\pi\sigma}{\omega}}, \quad (7.51)$$

in einer ebenen Welle mit $\mathbf{k} = nk_0 \mathbf{e}_z$ mit $\omega = k_0 c$ erhält man

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{ik_0 n(\omega)z} = e^{iz/d} e^{-z/d}, \quad d = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}. \quad (7.52)$$

Die Welle wird im Inneren eines Medium für große ω (aber immer noch $\omega \ll \Gamma$) sofort weggedämpft und kann daher nur an der Oberfläche bis zur Eindringtiefe d (daher Skin-Effekt) existieren. Dieser Effekt tritt z.B. in Kupfer auf: Die Leitfähigkeit versilberter Kupferdrähte entspricht in diesem Bereich der von reinen Silberdrähten. Durch Versilberung von Kupferdrähten kann in diesen Frequenzbereichen deren Leitfähigkeit kostengünstig auf den von Silber erhöhen.

- Für sehr große Frequenzen $\omega \gg \Gamma$ wird die dielektrische Funktion zu

$$\epsilon(\omega) \approx \epsilon_0(\omega) - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \approx \epsilon_0 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (7.53)$$

Hier nähern wir $\epsilon_0(\omega)$ durch eine Konstante an, da man annimmt, dass auch $\omega \gg \omega_{i \geq 2}$ gilt, so dass man sich weit weg von den Resonanzen des Modells befindet. Für $\Gamma \ll \omega < \omega_p/\sqrt{\epsilon_0}$ ist dies negativ, der Brechungsindex wird imaginär, und die Welle kann sich im Medium überhaupt nicht ausbreiten. Dies wird als Reflexion interpretiert. In der Tat sind Metalle im sichtbaren Bereich reflektierend (metallischer Glanz). Für noch größere Frequenzen $\omega > \omega_p/\sqrt{\epsilon_0}$ wird die dielektrische Funktion positiv, der Brechungsindex ist auch positiv, und damit wird das Medium transparent. Viele Metalle werden im Ultravioletten transparent.

7.3.3 Isolator

Für einen Isolator gilt

$$\mu(\omega) \approx 1, \quad 0 < \epsilon(0) < \infty. \quad (7.54)$$

Die Endlichkeit der dielektrischen Funktion bei $\omega = 0$ bedeutet, dass die Leitfähigkeit des Mediums verschwindet, daher die Bezeichnung Isolator. Im Lorentz-Modell (7.21) können wir dies erzwingen durch $\omega_j \neq 0$ (alle Elektronen sind fest gebunden)

$$\epsilon(\omega) = 1 + \omega_p^2 \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\Gamma_j \omega}. \quad (7.55)$$

Wenn die Frequenzen ω_j weit auseinander liegen, trägt für $\omega \approx \omega_j$ jeweils nur der j -te Term in der Summe bei. Erweitern mit $\omega_j^2 - \omega^2 + i\Gamma_j \omega$ liefert dann

$$\Re\epsilon(\omega) \approx 1 + \frac{\omega_p^2 f_j (\omega_j^2 - \omega^2)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_j^2}, \quad \Im\epsilon(\omega) \approx \frac{\omega_p^2 f_j \omega \Gamma_j}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_j^2}. \quad (7.56)$$

Daraus können dann der Realteil des Brechungsindex und der Absorptionskoeffizient bestimmt werden. Speziell Wasser hat einen Absorptionskoeffizienten, welcher nur für ein schmales Fenster im sichtbaren Licht klein ist. Außerhalb dieses Bereiches steigt die Absorption im Wasser um mehrere Größenordnungen an, sowohl im infraroten Bereich als auch im ultravioletten Bereich. Die Evolution hat wahrscheinlich die Augen von Tieren so optimiert, dass Sie im Wasser gut sehen können.

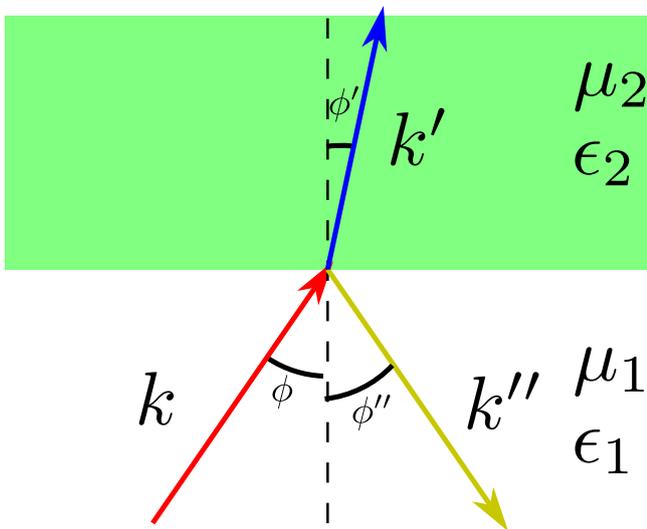


Abbildung 7.2: Eine einfallende Welle \mathbf{k} kann in der geometrischen Optik an einer Grenzfläche entweder gebrochen \mathbf{k}' oder reflektiert \mathbf{k}'' werden, in der geometrischen Optik gilt immer $\phi'' = \phi$.

7.4 Brechung und Reflexion

Die geometrische Optik beschrieb die Ausbreitung von Licht ganz ohne die Maxwellgleichungen, nur basierend auf wenigen grundlegenden Annahmen. Die **Gesetze der geometrischen Optik** lauten:

1. Das Licht breitet sich in homogenen Medien in geradlinigen Strahlen aus.
2. Diese Wege sind umkehrbar.
3. An Grenzflächen kann es zur Reflexion oder Brechung kommen, hierfür gelten eigene Reflexions- und Brechungsgesetze.
4. Es gilt das Superpositionsprinzip, die Intensitäten von Lichtstrahlen addieren sich.

Aus Sichtweise der Maxwell-Gleichungen bedeutet das erste Gesetz, dass die grundlegenden Lösungen der Maxwell-Gleichungen in homogenen ebene Wellen sind, bei welchen die Richtung des Wellenvektors \mathbf{k} die Ausbreitungsrichtung angibt, dies hatten wir schon gezeigt. Konstante \mathbf{k} bedeuten eine geradlinige Ausbreitung.

Das zweite Gesetz entspricht dann darauf aufbauend einfach der Ersetzung $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$, welche wieder eine Lösung der Wellengleichung liefert.

Das Brechungs- und Beugungsgesetz müssen wir noch verstehen bzw. aus den Maxwell-Gleichungen ableiten.

Wir können nur die Lösungen der Maxwellgleichungen superponieren, d.h. es addieren sich nur die Amplituden, z.B. hat man für das Betragsquadrat des gesamten elektrischen Feldes

$$|\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2|^2 = |\mathbf{E}_1|^2 + |\mathbf{E}_2|^2 + \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^* + \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_2. \quad (7.57)$$

Die ersten beiden Terme liefern die Summe der Intensitäten, der Interferenzterm liefert eine Korrektur, er verschwindet im zeitlichen Mittel für viele natürliche (inkohärente) Lichtquellen.

Wir betrachten für die Reflexion und Brechung eine Grenzfläche zwischen zwei Medien und wieder eine feste Frequenz ω , beschrieben durch die Dielektrizitätskonstanten $\epsilon_i = \epsilon_i(\omega)$ und Permeabilitäten $\mu_i = \mu_i(\omega)$. Zu zeigen wäre das Brechungs- und Reflexionsgesetz der Optik, vgl. Abb. 7.2.

Stetigkeitsbedingungen

Aus den Maxwellgleichungen in Abwesenheit von Oberflächenladungen und Oberflächenströmen folgen durch Anwendung des Gaußschen bzw. Stokesschen Integralsatzes Stetigkeitsbedingungen an die Felder, z.B. folgt aus

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad (7.58)$$

durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = 4\pi\sigma_{\text{ext}}, \quad (7.59)$$

wobei \mathbf{n} der Normalenvektor der Grenzfläche ist, welcher von 1 nach 2 zeigt und $\sigma_{\text{ext}} = Q/A$ die Oberflächenladungsdichte auf der Grenzfläche ist. Analog bekommen wir aus

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{D} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \quad (7.60)$$

mittels Anwendung des Stokes-Integralsatzes

$$\iint_F (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{F} = \oint_{\partial F} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = Le_t \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{1}{c} \iint_F d\mathbf{F} \cdot (4\pi\mathbf{j} + \partial_t\mathbf{D}). \quad (7.61)$$

Hier wird also von der rechten Seite nur der Anteil berechnet, welcher tangential an der Grenzfläche fließt, und \mathbf{e}_t ist der Normalenvektor auf $d\mathbf{F}$, welcher aber tangential zur Grenzfläche liegt, und L ist die Länge der Stokeschen Schlaufe. Der Beitrag der dielektrischen Verschiebung \mathbf{D} verschwindet entlang der Schlaufe, da die dielektrische Verschiebung endlich bleibt und somit für eine unendlich flache Schlaufe nicht beitragen kann. Da es tangential zur Grenzfläche immer zwei Normalenvektoren gibt, kann diese Bedingung für infinitesimal kleine Flächen auch geschrieben werden als

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{4\pi}{c} J_{\text{ext}}, \quad (7.62)$$

wobei $J_{\text{ext}} = |j_t|A/L$ eine Oberflächenstromdichte darstellt (tangential zur Grenzfläche durch die Fläche A mit Kantenlänge L verlaufend).

Speziell betrachten wir den Fall, dass die Ladungsdichte und die Stromdichte auf der Grenzfläche verschwinden

$$\sigma_{\text{ext}} = 0, \quad J_{\text{ext}} = 0. \quad (7.63)$$

Dann verschwinden die rechten Seiten, und aus den anderen – sowieso homogenen – Maxwellgleichungen haben wir noch mit analogen Argumenten die Bedingungen

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0. \quad (7.64)$$

Insgesamt erhalten wir, dass die Größen

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{H} \quad (7.65)$$

stetig an der Grenzfläche sein müssen.

Für die einfallende Welle können wir schreiben (wir lassen die explizite Realteilbildung weg)

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{k_0} \mathbf{k} \times \mathbf{E}, \quad (7.66)$$

mit $\omega = k_0 c$. Diese stellt eine Lösung der Maxwellgleichungen im Medium 1, d.h. für $z < 0$ dar. Die Beziehung zwischen \mathbf{E} und \mathbf{B} ist nötig um die Maxwellgleichungen für $z < 0$ zu erfüllen. Um die Stetigkeitsbedingungen (7.65) zu erfüllen, brauchen wir weitere Wellenlösungen, welche mit der einfallenden Welle superponiert werden müssen. Dies sind der gebrochene Strahl für $z > 0$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_0 e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{B}' = \frac{1}{k_0} \mathbf{k}' \times \mathbf{E}' \quad (7.67)$$

und der reflektierte Strahl für $z < 0$

$$\mathbf{E}'' = \mathbf{E}''_0 e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{B}'' = \frac{1}{k_0} \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}'' . \quad (7.68)$$

Die einfallende und reflektierte Welle breiten sich in Medium 1 aus, die gebrochene in Medium 2. Durch die Linearität der Maxwellgleichungen ist in Medium 1 dann auch die Überlagerung von der einfallenden und der reflektierten Welle eine Lösung. Wir haben schon in den Ansätzen angenommen, dass die Frequenzen aller Wellen gleich sind $\omega = \omega' = \omega''$. Der Grund dafür ist, dass wir sonst die Stetigkeitsbedingungen nicht für alle Orte und Zeiten in der xy -Ebene erfüllen könnten. Weiterhin müssen die jeweiligen Dispersionsrelationen erfüllt werden

$$\frac{\mathbf{k}^2}{n_1^2} = \frac{\mathbf{k}'^2}{n_1^2} = \frac{\mathbf{k}''^2}{n_2^2} = k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} . \quad (7.69)$$

Daraus folgt für die evtl. komplexwertigen Längen der Wellenvektoren ($k_0 = \omega/c$)

$$k = \sqrt{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} = n_1 k_0, \quad k'' = \sqrt{\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{k}''} = n_1 k_0, \quad k' = \sqrt{\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'} = n_2 k_0 . \quad (7.70)$$

Die Größen \mathbf{k}' , \mathbf{k}'' , \mathbf{E}'_0 und \mathbf{E}''_0 sind eindeutig aus \mathbf{k} und \mathbf{E}_0 durch die Stetigkeitsbedingungen an die Felder (7.65) bestimmt. Um das System etwas zu vereinfachen, legen wir unser Koordinatensystem so, dass die einfallende Welle in der xz -Ebene und die Grenzfläche in der xy -Ebene liegt

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix} . \quad (7.71)$$

An der Grenzfläche müssen jedoch für alle x und y (ebene Wellen sind transversal unendlich ausgedehnt) die Stetigkeitsbedingungen erfüllt werden, speziell muss hierfür auf der Grenzfläche die Ortsabhängigkeit gleich sein

$$k_x x = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})_{z=0} = (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})_{z=0} = (\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r})_{z=0}, \quad \forall \{x, y\} . \quad (7.72)$$

Daher folgt, dass sowohl der reflektierte Strahl als auch der gebrochene Strahl Wellenvektoren haben müssen, welche in derselben Ebene liegen (Einfallsebene ist gleich Ausfallsebene)

$$k'_y = k''_y = 0 . \quad (7.73)$$

Daraus folgt wiederum für die – komplexwertigen – x -Komponenten der Wellenvektoren

$$k_x = k'_x = k''_x . \quad (7.74)$$

Über die z -Komponente haben wir noch keine Aussage getroffen und schreiben daher nach Abb. 7.2

$$\mathbf{k} = k \begin{pmatrix} \sin \phi \\ 0 \\ \cos \phi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}' = k' \begin{pmatrix} \sin \phi' \\ 0 \\ \cos \phi' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}'' = k'' \begin{pmatrix} \sin \phi'' \\ 0 \\ -\cos \phi'' \end{pmatrix} . \quad (7.75)$$

Diese Winkel sind für reellwertige Wellenvektoren immer reellwertig und haben in diesem Fall die geometrische Bedeutung wie in Abb. 7.2. Für komplexwertige Wellenvektoren ist dies eher als Definition zu verstehen, die Winkel können komplexwertig werden.

Reflexionsgesetz

Wegen $k_x = k_x''$ und $k = k''$ folgt aus

$$k \sin \phi = k'' \sin \phi'' \quad (7.76)$$

zwingend das **Reflexionsgesetz**

$$\phi = \phi'', \quad \text{Einfallswinkel ist gleich dem Ausfallswinkel.} \quad (7.77)$$

Brechungsgesetz für transparente Medien

Für die Annahme, dass beide Medien transparent seien

$$n_{1/2} \in \mathbb{R}, \quad (7.78)$$

sind auch die entsprechenden Wellenvektoren von einfallender, reflektierter und gebrochener Welle reellwertig. Wegen $k_x = k_x'$ folgt

$$k \sin \phi = k' \sin \phi' \quad (7.79)$$

und wegen $k/n_1 = k'/n_2$ folgt nach Einsetzen das **Brechungsgesetz** oder **Snellius-Gesetz**

$$\frac{\sin \phi'}{\sin \phi} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (7.80)$$

Falls also $n_2 > n_1$ folgt $\phi' < \phi$, der Lichtstrahl wird beim Übergang zu optisch dichteren Medien zum Lot hin gebrochen, umgekehrt folgt beim Übergang für $n_2 < n_1$ die Beziehung $\phi' > \phi$ (Brechung vom Lot weg). Die Frequenzabhängigkeit der Brechungsindizes ermöglicht es, die Frequenzen im Sonnenlicht verschieden zu beugen, wie z.B. an einem Prisma beobachtet werden kann oder auch in der Natur an einem Regenbogen.

Dieses Brechungsgesetz lässt sich auch auf den Fall verallgemeinern, dass das 2. Medium schwach absorbieren kann, d.h. $n_2 = n_{2,r} + i\kappa_2$. Dann gilt das Brechungsgesetz auch, nur stehen dann in den Brechungsindizes nur die Realteile und ϕ' bezeichnet dann den Winkel zwischen \mathbf{k}'_r und der z -Achse. Für den Fall, dass beide Medien absorbieren können oder ein Medium stark absorbieren kann ist die Behandlung deutlich komplizierter.

Polarisationen und Intensitäten

Die bisherigen Diskussionen haben nur Teile der Stetigkeitsbedingungen (7.65) benutzt, um die Gleichungen zu vereinfachen. Insbesondere haben wir nur die Minimalforderung (7.72) benutzt, welche den Vektorcharakter der elektromagnetischen Welle noch gar nicht berücksichtigt. Phänomene wie Beugung und Reflexion sind daher auch bei anderen Wellen zu beobachten. Dementsprechend haben wir zwar \mathbf{k}' und \mathbf{k}'' festgelegt, aber noch nicht die entsprechenden Felder. Diese müssen zwar wieder orthogonal auf den Wellenvektoren stehen, dies erlaubt aber noch einen Drehwinkel. Die Stetigkeitsbedingungen (7.65) erzwingen jedoch eine eindeutige Lösung, welche bei gegebener Polarisation des einfallenden Strahls auch die Polarisationen der reflektierten und gebrochenen Strahlen festlegt. Wir betrachten jetzt den Fall

$$\mu_1 = \mu_2 \approx 1, \quad (7.81)$$

d.h. $\mathbf{B} \approx \mathbf{H}$, und schreiben die Stetigkeitsbedingungen (7.65) explizit, indem wir sämtliche Felder durch die elektrischen Feldstärken ausdrücken. Bei $z = 0$ muss also gelten

$$\begin{aligned} 0 &= [\epsilon_1(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0'') - \epsilon_2\mathbf{E}_0'] \cdot \mathbf{e}_z, \\ 0 &= [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_0'' - \mathbf{k}' \times \mathbf{E}_0'] \cdot \mathbf{e}_z, \\ 0 &= [\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0'' - \mathbf{E}_0'] \times \mathbf{e}_z, \\ 0 &= [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_0'' - \mathbf{k}' \times \mathbf{E}_0'] \times \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (7.82)$$

Wir zerlegen die einfallende Welle in zwei linear polarisierte Wellen

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{0,\parallel} + \mathbf{E}_{0,\perp} \quad (7.83)$$

wobei $\mathbf{E}_{0,\parallel}$ nur in der Einfallsebene (d.h. $x - z$ -Ebene) schwingen soll und $\mathbf{E}_{0,\perp}$ die dazu senkrechte Schwingungsrichtung darstellt, d.h. die $z - y$ -Ebene. Entsprechend zerlegen wir auch die reflektierte und transmittierte (gebrochene) Welle. Aus Symmetrieüberlegungen kann man jetzt schließen, dass die beiden Polarisierungen nicht miteinander mischen können und somit getrennt behandelt werden können.

Wir behandeln jetzt den parallelen Anteil, welcher in Abb. 7.2 in der Bildebene schwingt

$$\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{E}_{0,\parallel} = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{E}'_{0,\parallel} = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{E}''_{0,\parallel} = 0. \quad (7.84)$$

Gleichzeitig muss das elektrische Feld senkrecht auf dem Wellenvektor stehen

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{0,\parallel} = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{E}'_{0,\parallel} = \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{E}''_{0,\parallel} = 0, \quad (7.85)$$

seine Richtung ist also eindeutig bestimmt, und wir können für die parallelen Anteile schreiben

$$\mathbf{E}_{0,\parallel} = E_{0,\parallel} \begin{pmatrix} -\cos \phi \\ 0 \\ +\sin \phi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}'_{0,\parallel} = E'_{0,\parallel} \begin{pmatrix} -\cos \phi' \\ 0 \\ +\sin \phi' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}''_{0,\parallel} = E''_{0,\parallel} \begin{pmatrix} +\cos \phi'' \\ 0 \\ +\sin \phi'' \end{pmatrix}. \quad (7.86)$$

Damit sind diese Felder orthogonal auf den entsprechenden Wellenvektoren (7.75). Einsetzen in die speziellen Stetigkeitsbedingungen (7.82) erlaubt es dann, unter Ausnutzung von $\epsilon_i = n_i^2$, $k'' = k$, $k' = kn'/n$ und $\phi'' = \phi$, sowie den oben parametrisierten Feldern, nach den Feldstärken aufzulösen, was die **Fresnelschen Formeln** für die Polarisation in der Einfallsebene ergibt

$$\begin{aligned} \frac{E'_{0,\parallel}}{E_{0,\parallel}} &= \frac{2n_1 \cos \phi}{n_2 \cos \phi + n_1 \cos \phi'}, \\ \frac{E''_{0,\parallel}}{E_{0,\parallel}} &= \frac{n_2 \cos \phi - n_1 \cos \phi'}{n_2 \cos \phi + n_1 \cos \phi'}. \end{aligned} \quad (7.87)$$

Im allgemeinen können die Felder $E_{0,\parallel}$, $E'_{0,\parallel}$ und $E''_{0,\parallel}$ komplexwertig sein. Eine analoge Behandlung für die andere Polarisationsrichtung – in Abb. 7.2 senkrecht zur Bildebene – liefert mit der Parametrisierung

$$\mathbf{E}_{0,\perp} = E_{0,\perp} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}'_{0,\perp} = E'_{0,\perp} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}''_{0,\perp} = E''_{0,\perp} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.88)$$

dann aus den Stetigkeitsbedingungen Gleichungen, welche die Bestimmung der gebrochenen und reflektierten Anteile der transversalen Polarisation ermöglichen. Komplexwertige Vektoren \mathbf{E}_0 sind im Allgemeinen nötig um die Stetigkeitsbedingungen zu erfüllen. Man erhält für die

Verhältnisse der Amplituden des gebrochenen bzw. reflektierten Strahls und des einfallenden Strahls für die senkrechte Polarisation

$$\begin{aligned}\frac{E'_{0,\perp}}{E_{0,\perp}} &= \frac{2n_1 \cos \phi}{n_1 \cos \phi + n_2 \cos \phi'}, \\ \frac{E''_{0,\perp}}{E_{0,\perp}} &= \frac{n_1 \cos \phi - n_2 \cos \phi'}{n_1 \cos \phi + n_2 \cos \phi'}.\end{aligned}\quad (7.89)$$

Über das Brechungsgesetz (7.80) folgt die Relation $n_2 \cos \phi' = \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \phi}$, was es ermöglicht, den Winkel ϕ' in den Fresnelschen Formeln zu eliminieren.

- Aus dem Verhältnis der entsprechenden Betragsquadrate der Amplituden erhält man ein Verhältnis der Energieströme, welche reflektiert bzw. transmittiert werden zu den einfallenden Energieströmen. Entsprechend erhält man unterschiedliche **Reflexionskoeffizienten**

$$R_{\parallel} = \left| \frac{E''_{0,\parallel}}{E_{0,\parallel}} \right|^2, \quad R_{\perp} = \left| \frac{E''_{0,\perp}}{E_{0,\perp}} \right|^2 \quad (7.90)$$

und verschiedene **Transmissionskoeffizienten**

$$T_{\parallel} = \left| \frac{E'_{0,\parallel}}{E_{0,\parallel}} \right|^2, \quad T_{\perp} = \left| \frac{E'_{0,\perp}}{E_{0,\perp}} \right|^2 \quad (7.91)$$

für den Grenzflächendurchgang. Da direkt an der Grenzfläche selbst keine Energie absorbiert wird (sie ist unendlich dünn), gilt immer

$$R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1 = R_{\perp} + T_{\perp}, \quad (7.92)$$

wie man auch an den Lösungen leicht nachprüfen kann.

- Das unterschiedliche Reflexions- und Brechungsverhalten der beiden Polarisationsrichtungen kann benutzt werden, um polarisiertes Licht aus unpolarisiertem Licht zu erzeugen. Zum Beispiel gibt es spezielle Einfallswinkel ϕ , unter denen die Reflexion z.B. für die parallele Polarisation verschwindet $E''_{0,\parallel} = 0$, die für die transversale Polarisation jedoch nicht $E''_{0,\perp} \neq 0$. Strahlt man unpolarisiertes Licht unter diesem Winkel ein, wird also der parallele Anteil nicht reflektiert sondern nur gebrochen, vom transversalen Anteil wird ein Teil reflektiert und ein anderer Teil gebrochen. Das gesamte reflektierte Licht ist also unter diesem Einfallswinkel transversal zur Einfallsebene polarisiert.
- Wir haben bisher immer isotrope Dielektrizitätskonstanten angenommen und insbesondere dass diese nicht von der Polarisationsrichtung abhängt. Für kristalline Festkörper können sich aber aufgrund der Kristallstruktur schon unterschiedliche Werte für den Brechungsindex zweier verschiedener Polarisierungen ergeben und entsprechend dann auch anderes Brechungsverhalten. In der Praxis ist dieses Verfahren effizienter um polarisiertes Licht zu erhalten.
- Aus dem Brechungsgesetz (7.80) folgt, dass es für zwei transparente Medien einen maximalen Winkel für die Brechung gibt, bestimmt für $n_1 > n_2$ durch

$$\sin \phi = \frac{n_2}{n_1} \sin \phi' \leq \frac{n_2}{n_1}. \quad (7.93)$$

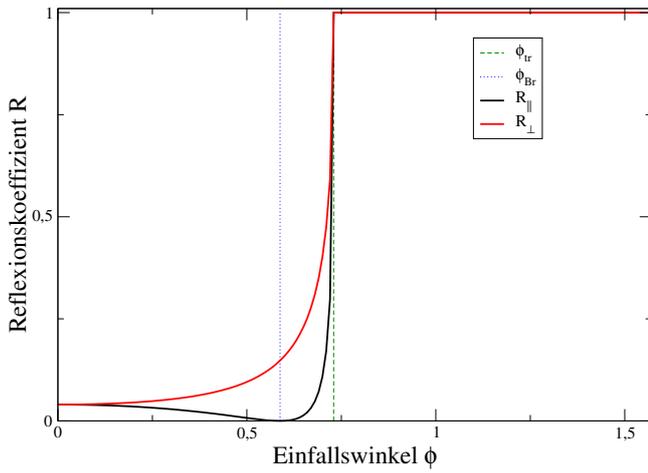


Abbildung 7.3: Reflexionskoeffizienten für die parallele Polarisation in der Einfallsebene $R_{||}$ (schwarz) und für die transversale Polarisation R_{\perp} (rot) für $n_1 = 1.5$ und $n_2 = 1.0$. Am Brewster-Winkel ϕ_{Br} verschwindet die Reflexion der parallelen Polarisation, so dass sämtliches reflektiertes Licht transversal zur Einfallsebene polarisiert ist, oberhalb von ϕ_{tr} erfolgt Totalreflexion beider Polarisationen.

Wenn sich der Einfallswinkel dem Grenzwinkel für die Totalreflexion

$$\phi_{\text{tr}} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \quad (7.94)$$

nähert, geht ϕ' gegen den maximalen Wert von 90 Grad, darüber hinaus wird der Strahl vollständig reflektiert, man spricht von **Totalreflexion**. Eine Anwendung davon sind z.B. Glasfasern, welche Licht, welches in einem flachen Winkel zur Faserachse eingestrahlt wird, immer wieder nach innen reflektieren und damit zu Lichtleitern werden.

Abb. 7.3 zeigt die Reflexionskoeffizienten $R_{||}$ und R_{\perp} für den Übergang vom optisch dichteren zum optisch dünneren Medium $n_1 > n_2$.

7.5 Lichtausbreitung in inhomogenen Medien

In vielen Medien ändert sich der Brechungsindex nicht sprunghaft, sondern kontinuierlich, bedingt z.B. durch eine räumliche veränderliche Dichte wie in der Atmosphäre. Wenn $\epsilon(\mathbf{r}, \omega)$ und $\mu(\mathbf{r}, \omega)$ aber nur auf viel größeren Skalen als der Wellenlänge λ des Lichts variieren, ist es gerechtfertigt, die aus den Maxwell-Gleichungen folgenden zusätzlichen Gleichungen zu vereinfachen, z.B.

$$\nabla \cdot (\epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}) = (\nabla \cdot \epsilon) \cdot \mathbf{E} + \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} \approx \epsilon(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{E}. \quad (7.95)$$

Wenn wir die räumlichen Ableitungen des Brechungsindex vernachlässigen, erhalten wir eine Wellengleichung in inhomogenen Medien. Für verschwindende Quellen (keine freien Ladungen und Ströme) hat diese nach zeitlicher Fourier-Transformation die Form

$$\left[\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \mu(\mathbf{r}, \omega) \right] \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad (7.96)$$

und analog für die magnetische Induktion. Hier haben wir einfach sämtliche räumlichen Ableitungen von ϵ und μ vernachlässigt. Die zu lösende Wellengleichung hat also ortsabhängige Konstanten und ist daher nicht mehr so einfach durch den Ansatz ebener Wellen mit konstanter Dispersionsrelation zu lösen. Der Einfachheit halber betrachtet man statt der einzelnen Komponenten der Felder oft nur eine skalare Funktion

$$\left[\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\mathbf{r}, \omega) \right] \Psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (7.97)$$

mit dem reellwertigen Brechungsindex $n(\mathbf{r}, \omega) = \sqrt{\epsilon(\mathbf{r}, \omega)\mu(\mathbf{r}, \omega)} \in \mathbb{R}$. Nimmt man den Brechungsindex als konstant an, erhält man als Lösung also einfach wieder die bereits bekannten ebenen Wellen. Für ortsabhängige Brechungsindizes benutzt man den Ansatz

$$\Psi(\mathbf{r}, \omega) = \Phi(\mathbf{r})e^{ik_0S(\mathbf{r})}. \quad (7.98)$$

mit reellen Funktionen $\Phi(\mathbf{r})$ und $S(\mathbf{r})$. Die Phase $S(\mathbf{r})$ nennt man **Eikonal** (nach griechisch *eikon* Bild). Für den Fall eines konstanten Brechungsindex und ebenen Wellen als Lösung hätte man also $S(\mathbf{r}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}/k_0$. Man hätte also $\nabla S = \mathbf{k}/k_0$ konstant und auch $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0$ wäre konstant. Wenn sich der Brechungsindex entsprechend nur langsam (im Vergleich zur Wellenlänge) ändert, nimmt man an, dass auch die Funktionen $\nabla S(\mathbf{r})$ und $\Phi(\mathbf{r})$ langsam variieren. Folgerichtig vernachlässigt man in der Diskussion alle räumlichen Ableitungen von $\nabla S(\mathbf{r})$ und $\Phi(\mathbf{r})$. Man erhält für den Gradienten des Ansatzes näherungsweise

$$\begin{aligned} \nabla\Psi(\mathbf{r}) &= (\nabla\Phi(\mathbf{r}))e^{ik_0S(\mathbf{r})} + \Phi(\mathbf{r})e^{ik_0S(\mathbf{r})}ik_0(\nabla S(\mathbf{r})) \\ &\approx ik_0\Psi(\mathbf{r})(\nabla S(\mathbf{r})). \end{aligned} \quad (7.99)$$

Für den Laplace-Operator konstruieren wir die nächste Ableitung

$$\begin{aligned} \Delta\Psi(\mathbf{r}) &= \nabla^2\Psi(\mathbf{r}) \approx ik_0(\nabla\Psi(\mathbf{r})) \cdot (\nabla S(\mathbf{r})) + ik_0\Psi(\mathbf{r})\Delta S(\mathbf{r}) \\ &\approx (ik_0)^2\Psi(\mathbf{r})(\nabla S(\mathbf{r})) \cdot (\nabla S(\mathbf{r})) = -k_0^2\Psi(\mathbf{r})(\nabla S(\mathbf{r}))^2. \end{aligned} \quad (7.100)$$

Der Ansatz löst also näherungsweise die Wellengleichung (7.97), wenn die **Eikonalgleichung**

$$(\nabla S(\mathbf{r}))^2 = n^2(\mathbf{r}) \quad (7.101)$$

erfüllt ist.

Das ermöglicht auch eine einfache Interpretation der Bedeutung des Eikonals, denn Entwicklung des Ansatzes in eine Taylor-Reihe liefert

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}, \omega) &\approx \Phi(\mathbf{r}_0)e^{ik_0[S(\mathbf{r}_0)+(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\nabla S(\mathbf{r}_0)+\dots]} = [\Phi(\mathbf{r}_0)e^{ik_0S(\mathbf{r}_0)}] e^{ik_0\nabla S(\mathbf{r}_0)\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)} \\ &= [\Phi(\mathbf{r}_0)e^{ik_0S(\mathbf{r}_0)}] e^{ik_0n\mathbf{e}_k\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)} \end{aligned} \quad (7.102)$$

Lokal sieht der Ansatz also einfach aus wie eine ebene Welle mit dem normierten Wellenvektor

$$\mathbf{e}_k = \frac{\nabla S|_{\mathbf{r}_0}}{n(\mathbf{r}_0)}. \quad (7.103)$$

Dass dieser ein Einheitsvektor ist, folgt aus der Eikonalgleichung. Der Gradient von S gibt die Richtung der Welle an. Ändert sich der Brechungsindex, ändert sich entsprechend auch die Lösung der Eikonalgleichung und damit die Richtung der Welle. In Medien mit variablen Brechungsindizes breiten sich Lichtstrahlen also nicht mehr geradlinig aus.

Die Eikonalgleichung ist für die Diskussion dieser Phänomene etwas unhandlich, man nimmt auf beiden Seiten von (7.101) den Gradienten. Für die i -Komponente der linken Seite ergibt sich

$$[\nabla(\nabla S)^2]_i = \sum_j \partial_i(\partial_j S)^2 = 2 \sum_j (\partial_j S)\partial_i\partial_j S = 2 \sum_j (n\mathbf{e}_k^j)\partial_j(n\mathbf{e}_k^i) = 2(n \sum_j \mathbf{e}_k^j\partial_j)(n\mathbf{e}_k^i), \quad (7.104)$$

so dass dies insgesamt auf die Gleichung

$$(\mathbf{e}_k \cdot \nabla)(n\mathbf{e}_k) = \nabla n \quad (7.105)$$

führt, welche für gegebenes $n(\mathbf{r})$ nach dem Einheitsvektor \mathbf{e}_k zu lösen ist.

Eine physikalische Anwendung der Eikonalgleichung ist die **astronomische Refraktion**. Durch die variable Dichte der Atmosphäre (barometrische Höhenformel) ist der Brechungsindex abhängig von der Höhe, und der Strahlenverlauf wird durch die Eikonalgleichung beschrieben. Qualitativ wird der Strahl in Richtung des optisch dichteren Mediums (also zur Erde hin) gebrochen, so dass z.B. Himmelskörper leicht angehoben erscheinen (der Beobachter verlängert den Strahlverlauf geradlinig). Dieser Effekt muss in der Astronomie berücksichtigt werden und tritt auch z.B. beim Sonnenuntergang auf: Die Sonne ist noch sichtbar, obwohl Sie bei geradliniger Verbindung schon längst untergegangen wäre. Außerdem weicht ihre Form leicht von der Kugelform ab, da tiefer liegende Teile der Sonne durch optisch dichtere Atmosphärenschichten zu uns gelangen, wo der Effekt stärker ausgeprägt ist, die untergehende Sonne erscheint abgeplattet. Für spezielle Luftschichtungen von unterschiedlich Temperatur kann es auch zu nicht-geradlinigen Verläufen kommen, welche wie Spiegelungen erscheinen (Fata Morgana).

Kapitel 8

Ausgewählte Themen der Elektrodynamik

8.1 Wellenausbreitung in Hohlleitern

Wegen des Skinneffektes ist die Ausbreitung von sehr hochfrequenten Wellen in Medien stark behindert: Durch die Einschränkung auf eine dünne Oberflächenschicht ist der Widerstand für hohe Frequenzen sehr hoch. Stattdessen kann man solche Wellen gut durch **Hohlleiter** übertragen, dies sind leitende Rohre mit festem Querschnitt. Die Rohrwände implizieren eine Randbedingung für das elektrische Feld, welches senkrecht auf einer Leiteroberfläche stehen muss. Unter Annahme dieser Randbedingungen kann man nun die Maxwellgleichungen in solchen Hohlleitern lösen.

8.1.1 Rechteckiger Hohlleiter

Wir nehmen einen in z -Richtung unendlich ausgedehnten Hohlleiter an, welcher die Querschnittskantenlängen a und b in x bzw. y -Richtung habe. Durch die Randbedingungen können ebene Wellen der Form $\mathbf{E}_0 e^{i(k_z z - \omega t)}$ mit konstantem Vektor \mathbf{E}_0 keine Lösung mehr sein, denn die Leiterwände erzwingen, dass das elektrische Feld senkrecht auf ihnen steht, dies wäre für einen konstanten Vektor \mathbf{E}_0 verletzt. Der Ansatz für das elektrische Feld lautet also

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} E_x(x, y) \\ E_y(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}. \quad (8.1)$$

Die Welle kann sich nur in z -Richtung ausbreiten, daher der Exponentialansatz. Die Funktionen $E_x(x, y)$ und $E_y(x, y)$ müssen so gewählt werden, dass das elektrische Feld immer senkrecht auf den Hohlleiterwänden steht, also

$$E_x(x, 0) = E_x(x, b) = E_y(0, y) = E_y(a, y) = 0, \quad (8.2)$$

deswegen muss die z -Komponente $E_z(x, y) = 0$ überall verschwinden. Das elektrische Feld ist also transversal zur Ausbreitungsrichtung der Welle.

Innerhalb des Hohlleiters gelten die Maxwellgleichungen im Vakuum, also separate Wellengleichungen für \mathbf{E} und \mathbf{B}

$$\left[\Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right] \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (8.3)$$

was separat für jede Komponente des Vektors gelten muss, analog für die magnetische Induktion. Die Feldkomponenten müssen also

$$\left[\partial_x^2 + \partial_y^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] E_{x/y}(x, y) = 0 \quad (8.4)$$

erfüllen mit den entsprechenden Randbedingungen. Dies ist ganz analog zur Lösung der Schrödingergleichung in einem unendlich hohen Potentialtopf, nur dass hier zwei Dimensionen behandelt werden. Wir machen also einen **Separationsansatz**

$$E_\alpha(x, y) = f_\alpha(x)g_\alpha(y), \quad (8.5)$$

wobei die Randbedingungen jetzt für die neuen Funktionen

$$g_x(0) = g_x(b) = 0 = f_y(0) = f_y(a) \quad (8.6)$$

erfordern, $f_x(x)$ und $g_y(y)$ müssen keine Randbedingungen erfüllen. Für die x -Komponente erhalten wir

$$f_x''g_x + f_xg_x'' - k^2f_xg_x + \frac{\omega^2}{c^2}f_xg_x = 0 \quad (8.7)$$

und für die y -Komponente entsprechend

$$f_y''g_y + f_yg_y'' - k^2f_yg_y + \frac{\omega^2}{c^2}f_yg_y = 0. \quad (8.8)$$

Teilen durch f_xg_x bzw. f_yg_y liefert dann die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{f_x''}{f_x} + \frac{g_x''}{g_x} &= k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}, \\ \frac{f_y''}{f_y} + \frac{g_y''}{g_y} &= k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Da die rechte Seite nicht von x und y abhängt, müssen jeweils f_x''/f_x , g_x''/g_x , f_y''/f_y und g_y''/g_y konstant sein, was vier ordinäre Differentialgleichungen liefert. Insbesondere die zwei Differentialgleichungen für $g_x(y)$ und $f_y(x)$ mit Randbedingungen werden gelöst durch

$$f_y(x) = \sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right), \quad g_x(y) = \sin\left(\frac{\pi ny}{b}\right), \quad m, n \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad (8.10)$$

vgl. VL Quantenmechanik (Lösung der 1d Schrödingergleichung im unendlich hohen Potentialtopf). Weiterhin muss im Hohlleiter die Maxwellgleichung $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ erfüllt sein (keine freien Ladungen). Mit den eben gefundenen Lösungen führt das auf

$$f_x'(x) \sin\left(\frac{\pi ny}{b}\right) + \sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right) g_y'(y) = 0. \quad (8.11)$$

Dies muss wiederum für alle x und y erfüllt sein, daher setzen wir

$$f_x'(x) = +C \sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right), \quad g_y'(y) = -C \sin\left(\frac{\pi ny}{b}\right), \quad (8.12)$$

mit unbestimmter Konstante C . Aufintegrieren liefert für $m, n > 0$

$$f_x(x) = \alpha_x^{mn} - \frac{aC}{\pi m} \cos\left(\frac{\pi mx}{a}\right), \quad g_y(y) = \alpha_y^{mn} + \frac{bC}{\pi n} \cos\left(\frac{\pi ny}{b}\right). \quad (8.13)$$

bzw. einfach eine Konstante für $m = 0 = n$. Einsetzen in den ursprünglichen Ansatz zeigt jedoch, dass die auftretenden Integrationskonstanten, welche auch mit den Randbedingungen verträglich sind, redundant sind und weggelassen werden können, also $\alpha_x^{mn} = \alpha_y^{mn} = 0$. Somit

können wir für das elektrische Feld schreiben, indem wir die Vorfaktoren alle in Koeffizienten E_x und E_y zusammenfassen

$$\mathbf{E}^{mn}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} -E_x \cos\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi ny}{b}\right) \\ +E_y \sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi ny}{b}\right) \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz-\omega t)}. \quad (8.14)$$

Es muss immer noch $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ gelten, also

$$E_x \frac{m}{a} - E_y \frac{n}{b} = 0, \quad (8.15)$$

was es ermöglicht, z.B. E_y zu eliminieren

$$\mathbf{E}^{mn}(\mathbf{r}, t) = E_x \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi ny}{b}\right) \\ +\frac{bm}{an} \sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi ny}{b}\right) \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz-\omega t)}. \quad (8.16)$$

Die verbleibende Konstante E_x folgt dann aus der Anfangsbedingung. Die Wellengleichung muss auch erfüllt werden, und einsetzen in die Wellengleichung (8.4) liefert die Dispersionsrelation

$$k^2 = k_{z,mn}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2. \quad (8.17)$$

Dies fällt auf die Dispersionsrelation im Vakuum nur für $m = n = 0$ zurück, für genau diesen Feld verschwindet aber die Lösung identisch, erzwungen durch die Randbedingungen. Wir haben bisher nur eine feste Frequenz ω behandelt. Allgemeinere Lösungen können wir konstruieren, indem wir über die einzelnen Moden mit unbestimmten Koeffizienten summieren oder ggf. ein Integral über verschiedene Wellenzahlen ansetzen um ein Wellenpaket zu konstruieren. Die Entwicklungskoeffizienten folgen dann aus der Anfangsbedingung $\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0)$, welche kompatibel mit den Randbedingungen zu stellen ist und die Wellenzahl muss die Dispersionsrelation

$$k_{z,mn}(\omega) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (8.18)$$

erfüllen. Im Langzeitlimit lassen diese Lösungen nur eine endliche Zahl von reellen Frequenzen mit $k^2 > 0$ zu. Denn alle Frequenzen mit

$$k^2 < 0 \quad (8.19)$$

führen zu einer sofortigen Dämpfung und können sich im Hohlleiter nicht ausbreiten. Speziell ergeben sich für eine feste vorgegebene Frequenz ω nur endlich viele Werte von m und n mit

$$\frac{\omega^2}{c^2} > \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad (8.20)$$

welche sich verlustfrei ausbreiten können. Alle höheren Schwingungsmoden werden sofort weggedämpft. Zum anderen werden für vorgegebene Werte von m und n alle Frequenzen welche die Bedingung verletzen sofort weggedämpft.

Die magnetische Induktion erhalten wir jetzt aus einem analogen Ansatz für \mathbf{B}

$$\partial_t \mathbf{B} = -i\omega \mathbf{B} = -c\nabla \times \mathbf{E}. \quad (8.21)$$

Es ergibt sich hier also, dass die magnetische Induktion $\mathbf{B} = -ic/\omega \nabla \times \mathbf{E}$ im Gegensatz zu \mathbf{E} nicht transversal zu \mathbf{k} ist, denn sie hat eine endliche z -Komponente

$$\mathbf{B}^{mn}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} -\frac{bcmk}{an\omega} \sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi ny}{b}\right) \\ -\frac{ck}{\omega} \cos\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi ny}{b}\right) \\ -i\frac{\pi c(m^2 b^2 + n^2 a^2)}{a^2 bn\omega} \cos\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi ny}{b}\right) \end{pmatrix} e^{i(kz-\omega t)}. \quad (8.22)$$

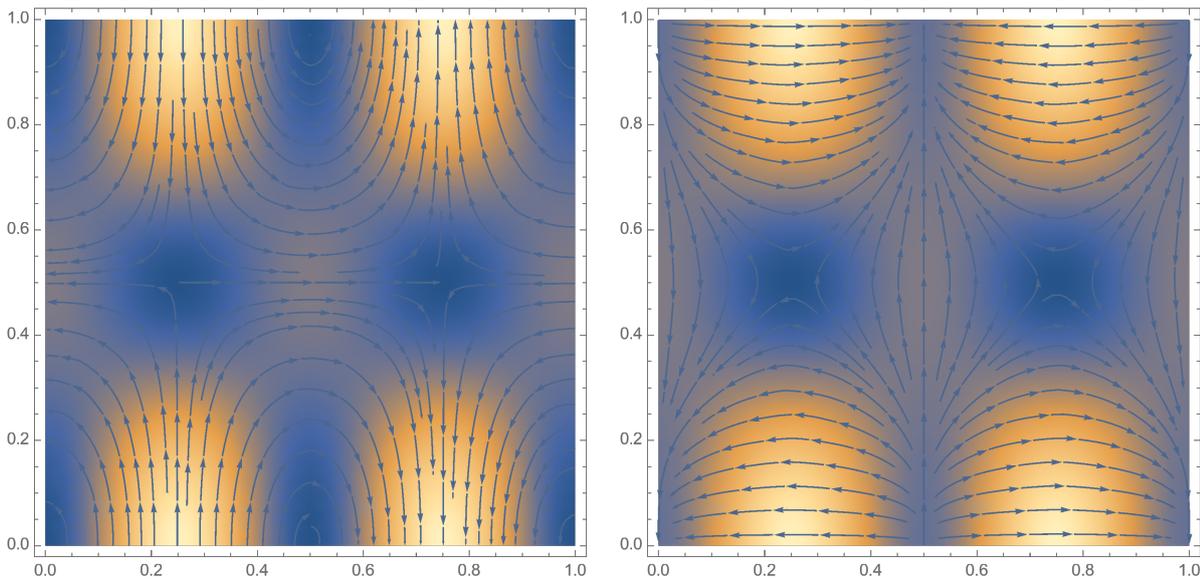


Abbildung 8.1: Visualisierung der xy -Komponenten vom elektrischen Feld (links) und der magnetischen Induktion (rechts) in einem rechteckigen Hohlleiter mit $a = b = 1$ für $m = 2$ und $n = 1$. Die elektrischen und magnetischen Feldlinien stehen senkrecht aufeinander und das elektrische Feld respektiert die Randbedingungen, Farben kodieren die Betragsquadrate der Felder. Nicht gezeigt ist die z -Komponente des Magnetfeldes aus der Bildebene heraus. Mathematica-Kommandos: DensityPlot, StreamPlot, Show.

Man klassifiziert solche Eigenlösungen der Maxwellgleichungen auch als transversal-elektrisch oder **TE-Moden**. Es gilt weiterhin, dass $\mathbf{B}^{mn} \cdot \mathbf{E}^{mn} = 0$, vgl. Abb. 8.1.

Man hätte auch die andere Randbedingung stellen können, dass die Magnetfelder transversal sein sollen an den Rändern (nicht-metallische Hohlleiter). Dann würde man entsprechend einen longitudinalen Anteil im elektrischen Feld erhalten, diese Moden heißen dann **TM-Moden**.

Um die Bedeutung der Dispersionsrelation zu verstehen, berechnen wir den zeitlich gemittelten Poynting-Vektor der berechneten TE-Moden

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{c}{8\pi} \Re \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}^*(\mathbf{r}, t). \quad (8.23)$$

Für Moden, welche $k \in \mathbb{R}$ erfüllen, zeigt der Poynting-Vektor in Richtung der Ausbreitungsrichtung $\mathbf{S} \propto \mathbf{e}_z$. Wenn die Wellenzahl imaginär wird, hat der Poynting-Vektor Komponenten in Richtung x und y , die entsprechenden Moden werden gedämpft.

8.1.2 Hohlleiter mit konstantem Querschnitt

Die Klassifikation in TE und TM Moden lässt sich auch auf andere Hohlleiter übertragen. Analog zum Vakuum lässt sich auch die Frage stellen, ob **TEM-Moden**, also Moden, in welchen sowohl das magnetische als auch das elektrische Feld rein transversal zum Wellenvektor sind, möglich sind. Wir nehmen an, dass der Hohlleiter einen konstanten, aber ansonsten beliebigen Querschnitt habe und dass die Randbedingungen nicht entlang der z -Achse variieren. Der Ansatz zur Lösung nimmt an, dass der Wellenvektor in z -Richtung zeigt

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x, y)e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0(x, y)e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (8.24)$$

Die Funktionen \mathbf{E}_0 und \mathbf{B}_0 müssen so bestimmt werden, dass einerseits im Hohlleiter die Maxwell-Gleichungen erfüllt werden und andererseits aber an den Rändern des Hohlleiters

auch die vorgegebenen Randbedingungen. Wir werden sehen, dass sich das komplizierte Randwertproblem auf ein einfaches abbilden lässt, nämlich die Lösung von einfachen skalaren Randwertproblemen unter Berücksichtigung der Randbedingungen.

Die grundlegende Idee besteht darin, die Felder und ∇ in transversale und longitudinale Komponenten aufzuspalten

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + E_z \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp + B_z \mathbf{e}_z, \quad \nabla = \nabla_\perp + \mathbf{e}_z \partial_z. \quad (8.25)$$

In kartesischen Koordinaten hätten wir z.B.

$$\nabla_\perp = \mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_y \partial_y, \quad (8.26)$$

aber für andere Leiterquerschnitte könnten z.B. Zylinderkoordinaten

$$\nabla_\perp = \mathbf{e}_\rho \partial_\rho + \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\phi \partial_\phi \quad (8.27)$$

oder andere krummlinige Koordinaten geeigneter sein. Das Ziel ist zunächst zu zeigen, dass die transversalen Komponenten schon durch die Lösung der z -Komponente E_z und B_z , welche im Hohlleiter die Wellengleichungen

$$\begin{aligned} \left[\Delta_\perp - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] E_{0z}(x, y) &= 0, \\ \left[\Delta_\perp - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] B_{0z}(x, y) &= 0 \end{aligned} \quad (8.28)$$

erfüllen müssen, und natürlich die Maxwellgleichungen, bestimmt sind. Wir möchten also die transversalen Komponenten durch die z -Komponenten ausdrücken. Das Faraday-Gesetz $-1/c \partial_t \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{E}$ wird dann unter Ausnutzung des Ansatzes zu

$$\begin{aligned} i \frac{\omega}{c} (\mathbf{B}_\perp + B_z \mathbf{e}_z) &= (\nabla_\perp + \mathbf{e}_z \partial_z) \times (\mathbf{E}_\perp + E_z \mathbf{e}_z) \\ &= \nabla_\perp \times \mathbf{E}_\perp + \nabla_\perp \times (E_z \mathbf{e}_z) + i k_z (\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_\perp). \end{aligned} \quad (8.29)$$

Hier haben wir im letzten Term die triviale z -Abhängigkeit des transversalen Anteils ausgenutzt und ein Term verschwindet, weil $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = 0$ gilt. Wir bilden das Kreuzprodukt mit \mathbf{e}_z auf beiden Seiten der Gleichung. Die entstehenden einzelnen Terme können wir mit den Vektoridentitäten

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_z \times (\nabla_\perp \times \mathbf{E}_\perp) &= 0, \\ \mathbf{e}_z \times (\nabla_\perp \times (E_z \mathbf{e}_z)) &= \nabla_\perp E_z, \\ \mathbf{e}_z \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_\perp) &= -\mathbf{E}_\perp, \end{aligned} \quad (8.30)$$

welche man sich leicht erschließen kann durch direkte Auswertung der Kreuzprodukte, bearbeiten. Auf der anderen Seite bleibt nur das Kreuzprodukt des transversalen Anteils übrig

$$\nabla_\perp E_z - i k_z \mathbf{E}_\perp = +i \frac{\omega}{c} \mathbf{e}_z \times \mathbf{B}_\perp. \quad (8.31)$$

Im Vakuum gilt aber auch $\nabla \times \mathbf{B} = +\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E}$. Hier ist nur das Vorzeichen auf der rechten Seite anders und \mathbf{E} und \mathbf{B} sind vertauscht, also ergibt sich mit denselben Umformungen wie eben

$$\nabla_\perp B_z - i k_z \mathbf{B}_\perp = -i \frac{\omega}{c} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_\perp. \quad (8.32)$$

Die letzten beiden Gleichungen können nach den transversalen Komponenten aufgelöst werden, denn durch Bilden des Kreuzproduktes mit $\mathbf{e}_z \times [\dots]$ folgt

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_z \times \nabla_{\perp} E_z - ik_z \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_{\perp} &= -i \frac{\omega}{c} \mathbf{B}_{\perp}, \\ \mathbf{e}_z \times \nabla_{\perp} B_z - ik_z \mathbf{e}_z \times \mathbf{B}_{\perp} &= +i \frac{\omega}{c} \mathbf{E}_{\perp}.\end{aligned}\quad (8.33)$$

Einsetzen der beiden Gleichungen für $\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_{\perp}$ und $\mathbf{e}_z \times \mathbf{B}_{\perp}$ eliminiert die Kreuzprodukte der transversalen Felder, so dass man letztlich beide Gleichungen explizit nach \mathbf{E}_{\perp} und \mathbf{B}_{\perp} auflösen kann. Man erhält

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{\perp} &= \frac{ic^2}{\omega^2 - k_z^2 c^2} \left[+\frac{\omega}{c} \mathbf{e}_z \times \nabla_{\perp} E_z + k_z \nabla_{\perp} B_z \right], \\ \mathbf{E}_{\perp} &= \frac{ic^2}{\omega^2 - k_z^2 c^2} \left[-\frac{\omega}{c} \mathbf{e}_z \times \nabla_{\perp} B_z + k_z \nabla_{\perp} E_z \right].\end{aligned}\quad (8.34)$$

Hat man also die Wellengleichungen für die longitudinalen Feldkomponenten (8.28) mit den Randbedingungen gelöst, sind die transversalen Komponenten aus diesen eindeutig bestimmt. Dies reduziert die Komplexität des Problems beträchtlich: Statt der kompletten Lösung der Maxwellgleichung ist es für dieses translationsinvariante Problem nur nötig, zwei eindimensionale Wellengleichungen mit Randbedingungen zu lösen.

Speziell gilt für TE-Moden, dass das elektrische Feld keine Komponente in z -Richtung haben soll, aus $E_z = 0$ folgt dann

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\perp} &= -\frac{i\omega/c}{\omega^2/c^2 - k_z^2} (\mathbf{e}_z \times \nabla_{\perp} B_z) = -\frac{\omega}{k_z c} \mathbf{e}_z \times \mathbf{B}_{\perp}, \\ \mathbf{B}_{\perp} &= \frac{ik_z}{\omega^2/c^2 - k_z^2} \nabla_{\perp} B_z.\end{aligned}\quad (8.35)$$

Man sieht also, dass in jedem Fall \mathbf{E} und \mathbf{B} senkrecht aufeinander stehen. Für TM-Moden hat das magnetische Feld keine Komponente in z -Richtung, d.h. es gilt $B_z = 0$, was entsprechend auf die Ausdrücke

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\perp} &= \frac{ik_z}{\omega^2/c^2 - k_z^2} \nabla_{\perp} E_z, \\ \mathbf{B}_{\perp} &= \frac{i\omega/c}{\omega^2/c^2 - k_z^2} \mathbf{e}_z \times \nabla_{\perp} E_z = \frac{\omega}{k_z c} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_{\perp}.\end{aligned}\quad (8.36)$$

Auch hier stehen elektrisches und magnetisches Feld also senkrecht aufeinander. Die Moden in Hohlleitern sind also im Allgemeinen nicht beide transversal zum Wellenvektor. Dies führt im Allgemeinen zu Verlusten (vgl. Poyntingvektor), TE und TM Moden werden also für bestimmte Frequenzen gedämpft.

Im Gegensatz dazu kann es TEM-Moden – also $E_z = B_z = 0$ und trotzdem $\mathbf{E}_{\perp} \neq 0$ und $\mathbf{B}_{\perp} \neq 0$ – geben, wenn die normale Dispersionsrelation $\omega = k_z c$ erfüllt ist. Dies ist z.B. der Fall in Koaxialkabeln geben, die entsprechenden TEM-Moden unterliegen dann nicht der Dämpfung.

8.2 Lagrange-Hamilton-Formalismus für Punktteilchen

In der Mechanik können die Bewegungsgleichungen aus der Lagrangefunktion $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ bzw. aus der Hamilton-Funktion $H(q_i, p_i, t)$ abgeleitet werden, welche durch eine Legendre-Transformation miteinander verbunden sind $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$. Dies geht auch in der Elektrodynamik. Obwohl die Maxwell-Gleichungen immer dieselben sind, kann es trotzdem sinnvoll sein, sie durch den

Lagrange- und Hamilton Formalismus auszurücken. Zum einen ergibt sich durch die Anwendung des Noether-Theorems die Möglichkeit, Erhaltungsgrößen aus kontinuierlichen Symmetrien der Lagrange-Funktion zu berechnen (vgl. VL Mechanik). Zum anderen haben wir durch die Kenntnis der Hamilton-Funktion die Möglichkeit, durch Quantisierung einen Hamiltonoperator abzuleiten und somit zu einer Quantentheorie des Lichtes zu kommen (vgl. VL Quantenmechanik II).

8.2.1 Freies Punktteilchen – relativistisch

Die Bewegungsgleichung für ein Punktteilchen unter dem Einfluss der Lorentzkraft ist relativistisch kovariant, zunächst sollte man daher den Lagrange-Formalismus relativistisch verstehen. Aus der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung

$$E^2 = m_0^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2 \quad (8.37)$$

für ein Teilchen der Ruhemasse m_0 mit Impuls \mathbf{p} erhalten wir die Hamilton-Funktion für ein freies Teilchen

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4}. \quad (8.38)$$

Die Hamilton-Gleichungen

$$\dot{q}_i = + \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (8.39)$$

führen dann neben $\dot{p}_i = 0$ auch auf einen Zusammenhang zwischen der verallgemeinerten Geschwindigkeit und den Impuls

$$\dot{q}_i = \frac{p_i c^2}{\sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4}}. \quad (8.40)$$

Jetzt kann man entweder gleich $E = \gamma m_0 c^2$ benutzen oder diese Relation durch Quadrieren und Aufsummieren beider Seiten erhalten. Im Endeffekt kann man diese Gleichung nach dem Impuls umstellen, und man erhält, dass dieser nicht mehr einfach nur proportional zur Geschwindigkeit ist, sondern dass die effektive Masse auch von dieser abhängt

$$\mathbf{p} = \gamma m_0 \dot{\mathbf{q}} = m_{\text{eff}}(\dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (8.41)$$

Die Lagrange-Funktion erhalten wir dann mit der Legendre-Transformation

$$\begin{aligned} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \gamma m_0 \dot{\mathbf{q}}^2 - \sqrt{\gamma^2 m_0^2 c^2 \dot{\mathbf{q}}^2 + m_0^2 c^4} \\ &= \gamma m_0 \dot{\mathbf{q}}^2 - m_0 c^2 \sqrt{\frac{\gamma^2 \dot{\mathbf{q}}^2}{c^2} + 1} = -\frac{m_0 c^2}{\gamma} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{q}}^2}{c^2}}. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Hier haben wir $\gamma = [1 - \dot{\mathbf{q}}^2/c^2]^{-1/2}$ benutzt. Im nichtrelativistischen Grenzfall gehen dann – bis auf den konstanten Ruheenergie-Beitrag – beide Ausdrücke (8.38) und (8.42) über in die bekannte nichtrelativistische kinetische Energie und führen somit auf die entsprechenden Bewegungsgleichungen für ein freies Teilchen.

8.2.2 Lorentzkraft – nichtrelativistisch

Jetzt möchte man gerne die Lagrangefunktion für ein Punktteilchen im elektromagnetischen Feld erhalten. Der Einfachheit halber beginnen wir nichtrelativistisch und fordern, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (8.43)$$

äquivalent zur nichtrelativistischen Lorentzkraft

$$m_0 \ddot{q}_i = e E_i + \frac{e}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i \quad (8.44)$$

für ein Punktteilchen mit Masse m_0 und Ladung e sein soll. Nichtrelativistisch bedeutet hier, dass die Geschwindigkeitsabhängigkeit der effektiven Masse auf der linken Seite vernachlässigt wird.

Die gesuchte Lagrange-Funktion muss die Potentiale linear enthalten und kann bis auf Vorfaktoren aus Symmetrie-Argumenten geraten werden. Sie lautet

$$L = \frac{1}{2} m_0 \dot{\mathbf{q}}^2 - e \Phi(\mathbf{q}(t), t) + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{q}(t), t). \quad (8.45)$$

Hier hängen das skalare Potential Φ und das Vektorpotential \mathbf{A} vom Ort \mathbf{q} der Punktladung ab und evtl. explizit (wenn das Potential sich zeitlich ändert) von der Zeit. Wenn sich das Punktteilchen bewegt, spürt es das Feld an einem anderen Ort, daher hängen die Potentiale auch implizit über $\mathbf{q}(t)$ von der Zeit ab. Der erste Term entspricht einfach der kinetischen Energie für ein freies Teilchen. Der zweite Term liefert offensichtlich bei einer Ableitung nach q_i gerade den Gradienten des Potentials und somit letztlich die Coulomb-Kraft. Der dritte Term ist linear im Vektorpotential und in der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{q}}$, man kann also so einen Term einfach ansetzen und dann fordern dass sich aus den Euler-Lagrange-Gleichungen die Lorentzkraft ergibt. Konkret liefern die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left[m_0 \dot{q}_i + \frac{e}{c} A_i \right] - \left[-e \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_i} \right] \\ &= m_0 \ddot{q}_i + \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{e}{c} \sum_j \frac{\partial A_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + e \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} - \frac{e}{c} \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial A_j}{\partial q_i} \\ &= m_0 \ddot{q}_i - e \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) - \frac{e}{c} \sum_j \dot{q}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_j} \right). \end{aligned} \quad (8.46)$$

Der mittlere Term (in Klammern) liefert gerade das elektrische Feld am Orte der Punktladung. Für den letzten Term betrachten wir (die Ableitung wirkt jeweils auf \mathbf{A})

$$\left[\dot{\mathbf{q}} \times (\nabla \times \hat{\mathbf{A}}) \right]_i = \left[\nabla (\dot{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{A}}) - (\dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{A}} \right]_i = \sum_j \dot{q}_j (\partial_i A_j - \partial_j A_i), \quad (8.47)$$

was bedeutet, dass die oben angesetzte Lagrangefunktion die Lorentzkraft impliziert.

Für die Berechnung der Hamiltonfunktion benötigen wir den kanonisch konjugierten Impuls $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

$$\mathbf{p} = m_0 \dot{\mathbf{q}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} = \mathbf{p}_{\text{kin}} + \frac{e}{c} \mathbf{A}. \quad (8.48)$$

Es fällt auf, dass dieser nicht dem kinetischen Impuls entspricht, sondern dass das Vektorpotential mit einbezogen werden muss. Die Ersetzung $\mathbf{p}_{\text{kin}} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}$ wird auch als **minimale**

Kopplung bezeichnet. Mit dem kanonischen Impuls können wir die Legendre-Transformation bemühen, um die Hamilton-funktion zu erhalten

$$\begin{aligned}
 H &= \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L \\
 &= \mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}}{m_0} - \frac{1}{2}m_0 \left(\frac{\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}}{m_0} \right)^2 + e\Phi - \frac{e}{c} \left(\frac{\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}}{m_0} \right) \cdot \mathbf{A} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2}{m_0} + e\Phi = \frac{\mathbf{p}_{\text{kin}}^2}{2m_0} + e\Phi.
 \end{aligned} \tag{8.49}$$

Das hätte man nichtrelativistisch auch so aus der Summe der kinetischen und potentiellen Energie hinschreiben können, jedoch steht in den Hamilton-Gleichungen nicht der kinetische Impuls, sondern der kanonische Impuls! Daher hätte man zwar die richtige Hamilton-Funktion, aber durch die falsche Interpretation des Impulses würde man aus den falschen Hamilton Gleichungen einfach nur den Anteil des skalaren Potentials bekommen, d.h. die resultierenden Bewegungsgleichungen wären falsch.

8.2.3 Lorentzkraft – relativistisch

Ausgehend von der Hamiltonfunktion verallgemeinern wir jetzt auf den relativistischen Fall, indem wir $\mathbf{p}_{\text{kin}} = \mathbf{p} - e/c\mathbf{A}$ einsetzen, die relativistische Hamilton-Funktion wird also zu

$$H = \sqrt{\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 c^2 + m_0^2 c^4} + e\Phi. \tag{8.50}$$

Um das zu verifizieren, berechnen wir die Geschwindigkeit nach den Hamilton-Gleichungen

$$\dot{\mathbf{q}} = c^2 \frac{\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}}{\sqrt{\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 c^2 + m_0^2 c^4}}. \tag{8.51}$$

Auflösen dieser Gleichung nach $\mathbf{p} - e/c\mathbf{A}$ liefert nach Quadrieren den bekannten Zusammenhang zwischen relativistischem kinetischem Impuls und Geschwindigkeit

$$\mathbf{p}_{\text{kin}} = \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} = \gamma(\dot{\mathbf{q}})m_0\dot{\mathbf{q}}, \tag{8.52}$$

und für die Energie bedeutet dies, wenn wir in der Hamiltonfunktion einfach \mathbf{p} durch $\dot{\mathbf{q}}$ eliminieren, dass $E = \gamma m_0 c^2 + q\Phi$ gilt, sich somit die relativistische Gesamtenergie und die potentielle Energie addieren.

Wir zeigen noch, dass aus den Hamilton-Gleichungen die relativistische Lorentz-Kraft herauskommt. Die Hamilton-Gleichung $\frac{d}{dt}p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ liefert für den kanonischen Impuls

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}p_i &= \frac{d}{dt}p_{i,\text{kin}} + \frac{e}{c} \frac{d}{dt}A_i = \frac{\sum_j (p_j - \frac{e}{c}A_j) \frac{\partial A_j}{\partial q_i} \frac{e}{c} c^2}{\sqrt{\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 c^2 + m_0^2 c^4}} - e \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \\
 &= \frac{\sum_j p_{j,\text{kin}} \frac{\partial A_j}{\partial q_i} \frac{e}{c} c^2}{\gamma m_0 c^2} - e \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = \frac{e}{c} \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial A_j}{\partial q_i} - e \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}.
 \end{aligned} \tag{8.53}$$

Die Lorentzkraft ist aber eine Gleichung für den kinetischen Impuls, wir können den Term mit dem Vektorpotential auf die rechte Seite bringen und bekommen

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}p_{i,\text{kin}} &= \frac{d}{dt}(\gamma m_0 \dot{q}_i) = \frac{e}{c} \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial A_j}{\partial q_i} - e \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} - \frac{e}{c} \frac{d}{dt}A_i \\
 &= e \left[-\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right] + \frac{e}{c} \sum_j \dot{q}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_j} \right).
 \end{aligned} \tag{8.54}$$

Die rechte Seite entspricht gerade der z -Komponente der Lorentz-Kraft, wie bereits im vorherigen Abschnitt gezeigt. Wie bereits diskutiert ist die rechte Seite auch relativistisch richtig, und die linke Seite enthält durch den kinetischen Impuls auch die geschwindigkeitsabhängige effektive Masse.

Die Lagrange-Funktion erhält man aus der Legendre-Transformation

$$\begin{aligned}
 L = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - H &= \left(\gamma m_0 \dot{\mathbf{q}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \cdot \dot{\mathbf{q}} - \sqrt{\gamma^2 m_0^2 c^2 \dot{\mathbf{q}}^2 + m_0^2 c^4} - e\Phi \\
 &= \gamma m_0 \dot{\mathbf{q}}^2 - m_0 c^2 \sqrt{\gamma^2 \frac{\dot{\mathbf{q}}^2}{c^2} + 1} - e\Phi + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{q}} \\
 &= \gamma m_0 [\dot{\mathbf{q}}^2 - c^2] - e\Phi + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{q}} \\
 &= -\frac{m_0 c^2}{\gamma} - e\Phi + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{q}}.
 \end{aligned} \tag{8.55}$$

Im Vergleich zur nichtrelativistischen Behandlung (8.45) und (8.49) ändert also die relativistische Behandlung (8.55) und (8.50) jeweils den kinetischen Term, was in der Bewegungsgleichung einfach nur zur Ersetzung $m_0 \ddot{\mathbf{q}} \rightarrow \frac{d}{dt} \gamma m_0 \dot{\mathbf{q}}$ führt. Weiterhin ist für die Kopplung an ein elektrisches Feld der kinetische Term der Hamilton-Funktion durch die Ersetzung $\mathbf{p}_{\text{kin}} = \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}$ zu erhalten. Die relativistisch korrekten Ausdrücke für die Lagrange-Funktion und für die Hamiltonfunktion sind nicht kovariant und werden sich unter Lorentz-Transformationen ändern, z.B. haben wir für die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{\gamma} \left[-m_0 c^2 - \frac{e}{c} v_\mu A^\mu \right] \tag{8.56}$$

mit der Vierer-Geschwindigkeit (5.180) und dem Vierer-Potential (5.190). Das liegt daran, dass in der zugrundeliegenden Theorie (Variation der Wirkung, Extremalprinzip) nicht relativistisch gerechnet wurde, sondern das ganz normale Zeitintegral benutzt wurde. Eine manifest kovariante Formulierung ist möglich, denn die Wirkung

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}, t) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma d\tau L \tag{8.57}$$

ist offensichtlich ein Lorentz-Skalar und somit unabhängig vom gewählten Inertialsystem. Das Prinzip der extremalen Wirkung muss also verallgemeinert werden auf die Eigenzeit $d\tau$, um manifest kovariante Euler-Lagrange-Gleichungen zu erhalten, wir werden hier aber darauf verzichten und stattdessen den Formalismus für Felder betrachten.

8.3 Lagrange-Hamilton-Formalismus für Felder

Anstelle von evtl. endlich vielen Punktteilchen in der Mechanik betrachtet man jetzt unendlich ausgedehnte Felder, welche von Ort und Zeit abhängen. In der Elektrodynamik haben wir elektrische und magnetische Vektorfelder, welche vereinfacht durch Potentiale ausgedrückt werden, also hätte man insgesamt 4 skalare Felder, welche vom gesamten Raum und Zeit abhängen $\phi_k(\mathbf{r}, t)$. Entsprechend tauchen nicht mehr nur die zeitlichen Ableitungen der generalisierten Koordinaten, sondern auch die räumlichen Ableitungen der Felder auf – wie auch in den Maxwell-Gleichungen. Die Lagrange-Funktion wird zu einer Lagrange-Dichte, die Wirkung ist dann über das komplette Raumzeitintegral über die Lagrangedichte definiert. Dies führt auf folgende Ersetzungen

$$\begin{aligned}
 q_i(t) &\rightarrow u_i(\mathbf{r}, t), \\
 \dot{q}_i(t) &\rightarrow \nabla u_i(\mathbf{r}, t), \partial_t u_i(\mathbf{r}, t).
 \end{aligned} \tag{8.58}$$

Entsprechend hängt die Lagrangedichte ab von den Feldern und deren Ableitungen

$$L(q_i, \dot{q}_i) \rightarrow \mathcal{L}(u_i(\mathbf{r}, t), \nabla u_i(\mathbf{r}, t), \partial_t u_i(\mathbf{r}, t)), \quad (8.59)$$

und die Euler-Lagrange-Gleichungen müssen modifiziert werden.

8.3.1 Ableitung der Euler-Lagrange-Gleichungen

Die **Wirkung** ist ein Funktional, denn sie ordnet einer Funktion $u(\mathbf{x})$ (wobei $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, t)$) jetzt Raum- und Zeitbeiträge enthält) eindeutig eine Zahl zu

$$S[u] = \int_{\Omega} d^n x \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial_i u_j) \quad (8.60)$$

mit der Lagrangedichte als Integrand und den stetig differenzierbaren Funktionen $u_i(\mathbf{x})$ und dem Gebiet Ω . Dann definiert man die 1. Variation des Funktionals S an der Stelle \mathbf{u} in Richtung \mathbf{h} über

$$\delta S_{\mathbf{u}}[\mathbf{h}] = \left. \frac{d}{d\epsilon} S[\mathbf{u} + \epsilon \mathbf{h}] \right|_{\epsilon=0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{S[\mathbf{u} + \epsilon \mathbf{h}] - S[\mathbf{u}]}{\epsilon}. \quad (8.61)$$

Nach dem Hamiltonschen Prinzip suchen wir nun die stationären Punkte der Wirkung, d.h. des Funktionals $S[\mathbf{u}]$, für Variationen welche am Rand des Gebietes verschwinden

$$\delta S_{\mathbf{u}}[\mathbf{h}] = 0 \quad \forall \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad : \quad \mathbf{h}(\partial\Omega) = 0, \quad (8.62)$$

(vgl. VL Mechanik).

Um die stationären Punkte zu finden, berechnen wir die Variation der Wirkung an der Stelle \mathbf{u} in Richtung $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int d^n x [\mathcal{L}(\mathbf{x}, u_i + \epsilon h, \nabla u_i + \epsilon \nabla h, \dots) - \mathcal{L}(\mathbf{x}, u_i, \nabla u_i, \dots)] \\ &= \int d^n x \left. \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{L}(\mathbf{x}, u_i + \epsilon h, \nabla u_i + \epsilon \nabla h, \dots) \right|_{\epsilon=0} \\ &= \int d^n x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} h + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k u_i)} \frac{\partial h}{\partial x_k} \right] \\ &= \int d^n x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k u_i)} \right] h. \end{aligned} \quad (8.63)$$

Im letzten Schritt haben wir partiell integriert und die Annahme benutzt, dass \mathbf{h} , also auch $h(\mathbf{x})$, am Rand $\partial\Omega$ verschwinden soll. Da dies für alle Funktionen $h(\mathbf{x})$ gelten soll, muss der Integrand verschwinden und wir erhalten die **Euler-Lagrange-Gleichungen für Felder**

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t u_i)} + \sum_{k=1}^{n-1} \partial_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k u_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} = 0. \quad (8.64)$$

Speziell können wir das in drei Raum- und einer Zeit-Dimension auch kovariant schreiben

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu u_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} = 0, \quad (8.65)$$

die Wirkung ist dann gegeben durch

$$S = \int dt \left[\int d^3r \mathcal{L} \right] = \int d^4x \mathcal{L}. \quad (8.66)$$

Diese muss ein Lorentz-Skalar sein, denn die Naturgesetze dürfen nicht vom Inertialsystem abhängen. Da aber bei Lorentz-Transformationen für die Jacobi-Determinante $|\Lambda_{\nu}^{\mu}| = 1$ gilt, folgt immer $d^4x = d^4x'$ oder – die Wirkung S ist dann ein Skalar, wenn auch die Lagrangedichte \mathcal{L} ein Skalar ist. Eine kovariante Formulierung ist somit für Feldtheorien etwas einfacher als für Punktteilchen, da die Lagrangedichte selbst ein Skalar unter Lorentz-Transformationen sein muss.

Aus der Lagrange-Dichte erhält man analog **generalisierte Feldimpulse**

$$\Pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t u_i)}, \quad (8.67)$$

und mit diesen Feldimpulsen kann man dann über eine Legendre-Transformation die **Hamilton-Dichte** ableiten

$$\mathcal{H} = \sum_i \Pi_i (\partial_t u_i) - \mathcal{L}. \quad (8.68)$$

Dass hier in der Legendre-Transformation und bei den generalisierten Feldimpulsen die zeitliche Ableitung besonders gehandhabt wird, liegt daran, dass die Hamilton-Dichte die Dimension einer Energie pro Raum haben soll.

8.3.2 Beispiel: Kette von Punktteilchen

Wir betrachten N identische Punktteilchen entlang der x -Achse, welche in regelmäßigen Abständen durch identische Federn der Federkonstante k aneinander gekoppelt sind. Die longitudinale Auslenkung der Punktteilchen von ihrer Gleichgewichtsposition bezeichnen wir mit $u_i(t)$, transversale Auslenkungen lassen wir (der Einfachheit halber) nicht zu. Für das i -te Teilchen ($1 \leq i \leq N$) lautet die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{q}_i = k(q_{i+1} - q_i) - k(q_i - q_{i-1}), \quad (8.69)$$

denn die Gesamtkraft auf das i -te Teilchen verschwindet, wenn die Abstände zu den nächsten Nachbarn gleich sind. Für die Ränder nehmen wir an, dass u_0 und u_{N+1} konstant sind, d.h. die Kette ist am Rand fest eingespannt. Diese Bewegungsgleichung folgt aus der Lagrange-Funktion

$$L = T - V = \sum_i a \left[\frac{1}{2} \frac{m}{a} \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} k a \left(\frac{q_{i+1} - q_i}{a} \right)^2 \right], \quad (8.70)$$

wobei nur $1 \leq i \leq N$ generalisierte Koordinaten q_i zu betrachten sind (q_0 und q_{N+1} seien konstant) und der redundante Parameter a den Abstand der Teilchen in der Ruhelage $q_i = 0$ beschreiben soll. Er kürzt sich aus der Lagrange-Funktion wieder heraus. Der Übergang zu einer Lagrangedichte erfolgt jetzt im Limes $a \rightarrow 0$, $m \rightarrow 0$ und $k \rightarrow \infty$, wobei die Größen

$$\frac{m}{a} \rightarrow \mu \quad (8.71)$$

und

$$ka \rightarrow Y \quad (8.72)$$

konstant bleiben müssen, sie korrespondieren dann zu einer Massendichte μ und zum Young-Modul Y der Kette. In diesem Fall identifizieren wir

$$u(x, t) = q_i(t), \quad \partial_t u(x, t) = \dot{q}_i(t), \quad \partial_x u(x, t) = \frac{q_{i+1}(t) - q_i(t)}{a}, \quad (8.73)$$

und wir können die Lagrangefunktion als Integral über eine eindimensionale Lagrangedichte \mathcal{L} schreiben

$$L = \int_0^{Na} \mathcal{L} dx, \\ \mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu (\partial_t u)^2 - \frac{1}{2} Y (\partial_x u)^2, \quad (8.74)$$

wobei die Randbedingungen $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$ mit der Kettenlänge $\ell = Na$ zu berücksichtigen sind. Die Bewegungsgleichung der Kette (8.69) wird dann zu

$$\mu \partial_t^2 u(x, t) = Y \partial_x^2 u(x, t), \quad (8.75)$$

denn es gilt für die 2. Ableitung einer Funktion

$$f''(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(x+a) - 2f(x) + f(x-a)}{a^2}. \quad (8.76)$$

Wir erhalten also eine eindimensionale Wellengleichung mit der Schallgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\mu}}. \quad (8.77)$$

Offensichtlich funktioniert das angegebene Rezept zur Ableitung der Bewegungsgleichung, denn die Euler-Lagrange-Gleichungen für Felder werden zu

$$0 = \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x u)} + \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t u)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \\ = -Y \partial_x^2 u + \mu \partial_t^2 u, \quad (8.78)$$

was genau die Wellengleichung reproduziert. Entsprechend wird der Feldimpuls zu $\Pi = \mu (\partial_t u)$ und die Hamilton-Dichte wird zu $\mathcal{H} = \frac{\Pi^2}{2\mu} + \frac{1}{2} Y (\partial_x u)^2$, aber auch die Hamilton-Gleichungen müssen noch modifiziert werden.

8.3.3 Elektrostatik

In der Elektrostatik können wir alles durch ein skalares Potential $u_i \rightarrow \Phi(\mathbf{r})$ beschreiben, wenn wir das elektrische Feld durch $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ ausdrücken, ist die Gleichung $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ auch automatisch erfüllt. Wir suchen also eine Lagrangedichte $\mathcal{L}(\Phi, \partial_t\Phi, \nabla\Phi)$, welche mittels der Euler-Lagrange-Gleichungen die Poissongleichung $\Delta\Phi = -\nabla\mathbf{E} = -4\pi\rho$ reproduziert. Diese kann leicht geraten werden, denn die Lagrangedichte muss skalar sein, sie darf für die Elektrostatik keine Zeitableitungen enthalten, und sie darf höchstens quadratisch in Φ und linear in ρ sein

$$\mathcal{L}_{\text{es}} = \frac{1}{8\pi} (\nabla\Phi)^2 - \rho\Phi = \frac{1}{8\pi} \sum_{i=1}^3 (\partial_i\Phi)^2 - \rho\Phi. \quad (8.79)$$

Ausgedrückt durch das elektrische Feld, entspricht der 1. Term gerade der Energiedichte des elektrischen Feldes und der 2. Term gerade der negativen Wechselwirkungsenergiedichte einer Ladungsverteilung ρ im externen Feld. Die Euler-Lagrange-Gleichungen werden zu

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \Phi)} + \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \Phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \\ &= \sum_i \partial_i \frac{1}{4\pi} (\partial_i \Phi) + \rho, \end{aligned} \quad (8.80)$$

was gerade die Poisson-Gleichung oder eben $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ reproduziert.

8.3.4 Magnetostatik

Die Maxwellgleichung der Magnetostatik $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ist automatisch erfüllt, wenn wir die magnetische Induktion ausdrücken als Rotation des Vektorpotentials $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Wir haben also drei Felder $u_i \rightarrow A_i(\mathbf{r})$ und möchten die Maxwellgleichung der Magnetostatik ableiten

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (8.81)$$

Die gesuchte Lagrangedichte $\mathcal{L}(A_i, \partial_t A_i, \partial_j A_i)$ muss skalar sein, darf aber keine Zeitableitungen der A_i enthalten. Wir setzen wieder die Differenz der Energiedichte und der Wechselwirkungsenergiedichte einer Stromverteilung im externen Feld an

$$\mathcal{L}_{\text{ms}} = \frac{1}{8\pi} (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} = \frac{1}{8\pi} \sum_{ij} [(\partial_i A_j)^2 - (\partial_i A_j)(\partial_j A_i)] - \frac{1}{c} \sum_i A_i j_i. \quad (8.82)$$

Wir erhalten für jede Komponente k des Vektorfeldes \mathbf{A} eine eigene Euler-Lagrange-Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_\ell \partial_\ell \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\ell A_k)} + \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t A_k)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_k} \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_\ell \partial_\ell \partial_\ell A_k - \frac{1}{8\pi} \sum_\ell \partial_\ell \partial_k A_\ell - \frac{1}{8\pi} \sum_\ell \partial_\ell \partial_k A_\ell + \frac{1}{c} j_k \\ &= \frac{1}{4\pi} \Delta A_k - \frac{1}{4\pi} \partial_k (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \frac{1}{c} j_k. \end{aligned} \quad (8.83)$$

Umstellen zeigt dann, dass die Maxwell-Gleichung der Magnetostatik erfüllt ist.

8.3.5 Elektrodynamik

Beim Übergang zur Elektrodynamik werden wir auch zeitliche Ableitungen der Felder mit einbeziehen müssen, schließlich berechnet sich das elektrische Feld jetzt aus $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{A}$. Wenn wir die Lagrangedichten der Elektrostatik oder Elektrodynamik mit einem beliebigen Faktor multiplizieren, erhalten wir letztlich dieselben Bewegungsgleichungen, man setzt also eine Linearkombination der Lagrangedichten für Elektrostatik und Magnetostatik an. Da die Lagrangedichte für die Elektrostatik von $\nabla\Phi = -\mathbf{E}$ abhängt, müssen wir diesen Term jedoch durch $\nabla\Phi \rightarrow \nabla\Phi + \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{A}$ modifizieren, um wieder das elektrische Feld zu erhalten. Um die korrekten Maxwellgleichungen zu erhalten, ist es letztlich nötig, die Differenz der Lagrangedichten (8.79) und (8.82) zu bilden, die **Lagrangedichte der Elektrodynamik** mit mikroskopischen Quellen lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} \left[\left(\nabla\Phi + \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{A} \right)^2 - (\nabla \times \mathbf{A})^2 \right] - \rho\Phi + \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}. \quad (8.84)$$

Der Term mit den Quellen ist offensichtlich ein Lorentz-Skalar, denn wir haben mit (5.190) und (5.188)

$$-\Phi\rho + \frac{1}{c}\mathbf{j} \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c}j_\mu A^\mu. \quad (8.85)$$

Dies kann auch als Argument für das Bilden der Differenz der beiden Lagrangedichten benutzt werden. Den andere Term enthält Quadrate von Ableitungen des Viererpotentials und muss offensichtlich aus dem Feldstärketensor gebildet sein. Aus der Forderung, dass die Lagrangedichte ein Lorentz-Skalar sein soll, bleiben nur wenige Ansätze übrig. Wir betrachten hier den Lorentz-Skalar gebildet aus dem Feldstärketensor (5.196)

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= -F_{\mu\nu}F^{\nu\mu} = -\text{Tr} \{ (F_{\text{kov}})(F^{\text{knt}}) \} \\ &= -\text{Tr} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & +E_x & +E_y & +E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ -E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ +E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ +E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ +E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix} \right\} = 2\mathbf{B}^2 - 2\mathbf{E}^2. \end{aligned} \quad (8.86)$$

Die Lagrangedichte ist also offensichtlich ein Skalar unter Lorentz-Transformationen

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{c}j_\mu A^\mu \quad (8.87)$$

und damit dieselbe in allen Inertialsystemen. Die Forderung der Lorentz-Invarianz erklärt, warum wir die Lagrangedichten der Elektrostatik und Magnetostatik voneinander subtrahieren mussten. Darüberhinaus ist der Feldstärketensor auch eichinvariant, denn unter Eichtransformationen der Form (5.22), welche wir auch schreiben können als

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda \quad (8.88)$$

mit einer skalaren Funktion $\Lambda(\mathbf{r}, t)$, ändert sich der Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ nicht. Der Term $j_\mu A^\mu$ ändert sich unter so einer Eichtransformation allerdings, es gibt einen zusätzlichen Term der Form

$$j_\mu \partial^\mu \Lambda = \rho \partial_t \Lambda + (\mathbf{j} \cdot \nabla) \Lambda. \quad (8.89)$$

In der Wirkung $S = \int d^4x \mathcal{L}$ zeigt sich dann, dass so ein Term durch partielle Integration – die Quellen verschwinden im Unendlichen immer – umgewandelt wird in

$$\int d^4x j_\mu \partial^\mu \Lambda = - \int d^4x \Lambda [\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j}] = 0, \quad (8.90)$$

was aufgrund der (auch Lorentz-invarianten) Kontinuitätsgleichung verschwindet. Die Wirkung ist also Lorentz-invariant und eichinvariant.

Wir zeigen noch schnell in kovarianter Formulierung, dass wirklich die inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad (8.91)$$

aus den Euler-Lagrange-Gleichungen folgen – die homogenen sind ja durch die Wahl der Potentiale automatisch erfüllt. Es ist hierfür hilfreich, die Lagrangedichte etwas umzuschreiben

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{c} j_\alpha A^\alpha \\ &= -\frac{1}{8\pi} [(\partial_\alpha A_\beta)(\partial^\alpha A^\beta) - (\partial_\alpha A_\beta)(\partial^\beta A^\alpha)] - \frac{1}{c} j^\alpha A_\alpha. \end{aligned} \quad (8.92)$$

Das Viererpotential hat vier Komponenten, wir haben also vier Felder und die Euler-Lagrange-Gleichungen werden zu

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \partial_\mu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{4\pi} \partial^\nu \partial_\mu A^\mu + \frac{1}{c} j^\nu, \end{aligned} \quad (8.93)$$

und Umstellen liefert dann (8.91), was sich für den Fall der Lorenz-Eichung noch weiter vereinfachen ließe. Hier ergibt sich der Faktor Zwei beim Ableiten konkret durch Indexziehen auf die kovarianten Versionen, z.B. $(\partial^\alpha A^\beta) = \eta^{\alpha\sigma} \eta^{\beta\kappa} (\partial_\sigma A_\kappa)$ oder durch explizites Nachrechnen.

8.3.6 Noether-Theorem für Felder

Die Wirkung – und damit die Euler-Lagrange-Gleichungen – bleiben invariant, wenn wir zur Lagrangedichte eine Vierer-Divergenz hinzuaddieren

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \delta \mathcal{L} = \mathcal{L} + \partial_\mu J^\mu. \quad (8.94)$$

Hierbei nimmt man an, dass J^μ im Unendlichen verschwindet, so dass die Anwendung eines verallgemeinerten Gaußschen Satzes das Umschreiben in einen vernachlässigbaren Oberflächenterm ermöglicht. Haben wir im Umkehrschluss eine kontinuierliche (infinitesimal kleine) Änderung der Felder

$$u_i \rightarrow u_i + \delta u_i, \quad (8.95)$$

welche die Wirkung invariant lässt, muss sich die entsprechende Änderung der Lagrangedichte als Viererdivergenz schreiben lassen

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \delta u_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u_i)} \delta(\partial_\mu u_i) \\ &= \sum_i \left[\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u_i)} \right] \delta u_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u_i)} \partial_\mu (\delta u_i) \\ &= \partial_\mu \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u_i)} \delta u_i \stackrel{!}{=} \partial_\mu J^\mu. \end{aligned} \quad (8.96)$$

Man sieht schon an der Entwicklung für kleine Änderungen δu_i , dass die Symmetrie kontinuierlich sein muss, d.h. wie im Fall der Lagrangefunktion ist z.B. eine Spiegelsymmetrie nicht mit einer Erhaltungsgröße assoziiert. In der praktischen Anwendung ist zu beachten, dass die Größe J^μ auch infinitesimal klein wird, dies wird durch Reskalierung aufgelöst. Man definiert dann bei die Größe

$$\tilde{J}^\mu = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u_i)} \delta u_i - J^\mu, \quad (8.97)$$

für welche offensichtlich gilt

$$\partial_\mu \tilde{J}^\mu = 0. \quad (8.98)$$

Dies kann man als eine Kontinuitätsgleichung für den verallgemeinerten Viererstrom \tilde{J}^μ interpretieren. Die dazugehörige Erhaltungsgröße ist das Gegenstück zur Gesamtladung bei der Stromdichte, d.h. die Erhaltungsgröße ist gegeben durch das Volumenintegral über \tilde{J}^0

$$\tilde{Q} = \int d^3r \left[c \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t u_i)} \delta u_i - J^0 \right]. \quad (8.99)$$

Beispielsweise gilt für infinitesimale Translationen in Zeit oder Raum

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu \quad (8.100)$$

für die Felder die Transformation (Taylor-Entwicklung)

$$u_i(x^\mu) \rightarrow u_i(x^\mu) + \partial^\nu u_i(x^\mu) \delta x_\nu = u_i(x^\mu) + \delta u_i. \quad (8.101)$$

Analog gilt

$$\delta \mathcal{L} = (\partial_\mu \mathcal{L}) \delta x^\mu. \quad (8.102)$$

Wir identifizieren also

$$J^\mu = \mathcal{L} \delta x^\mu = \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \delta x_\nu. \quad (8.103)$$

Also liefert uns das Noether-Theorem die Gleichung

$$\partial_\mu \left[\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_i)} (\partial^\nu u_i) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \right] \delta x_\nu = 0, \quad (8.104)$$

was für beliebige Verschiebungen δx_ν gelten muss. Es folgt also für die Größe

$$T^{\mu\nu} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_i)} (\partial^\nu u_i) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (8.105)$$

dass jede Spalte ν eine Erhaltungsgröße liefert $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Speziell in der Elektrodynamik entspricht der Tensor $T^{\mu\nu}$ dem Energie-Impuls-Tensor, allerdings nur bis auf Oberflächenterme. Man erhält also analoge Erhaltungsgrößen. Der vorher bereits abgeleitete Energie-Impuls-Tensor hat aber im Vergleich zur Darstellung hier den Vorteil, dass er auch eichinvariant ist.

Weitere Symmetrien folgen aus der Lorentz-Invarianz der Lagrangedichte. Die Lorentz-Gruppe kann auch definiert werden aus der Forderung, das Skalarprodukt im Minkowski-Raum invariant zu lassen

$$\eta_{\rho\sigma} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma \eta_{\mu\nu}. \quad (8.106)$$

Dies ist für räumliche Drehungen der Fall (drei Parameter für die Drehwinkel um die verschiedenen Achsen) und für die bereits abgeleiteten Lorentztransformationen (drei Parameter für Geschwindigkeiten in die verschiedenen Richtungen). Man hat also insgesamt sechs kontinuierliche Symmetrien und damit auch 6 erhaltene Noether-Ströme. Drei davon sind mit der Drehimpulserhaltung assoziiert, welche jetzt jedoch auch für Felder ausgedrückt werden kann. Die Interpretation der anderen Erhaltungsgrößen ist etwas komplizierter.

8.3.7 Kombiniertes Lagrange-Hamilton-Formalismus

Bisher haben wir in der Elektrodynamik entweder die Quellen ρ und \mathbf{j} als fest vorgegeben betrachtet und dann mittels der Maxwellgleichungen die Felder gelöst. Alternativ können wir auch die Felder fest vorgeben und über die Lorentzkraft die Dynamik einer Punktladung berechnen. Will man die Dynamik beider Akteure selbstkonsistent berechnen, gelingt dies z.B. über die Betrachtung der kombinierten Lagrangefunktion. Da die Quellen sich als Summe von Punktladungen darstellen lassen

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) &= \sum_i e_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{q}_i(t)), \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \sum_i e_i \dot{\mathbf{q}}_i(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{q}_i(t)), \end{aligned} \quad (8.107)$$

wobei $\mathbf{q}_i(t)$ den Ort der i -ten Punktladung mit Ladung e_i darstellt und $\dot{\mathbf{q}}_i$ die entsprechende Geschwindigkeit, liegt es nahe, eine kombinierte Lagrange-Funktion aufzustellen, welche die kinetischen Anteile der Partikel und das Integral über die Lagrangedichte der Felder enthält

$$\begin{aligned}
L &= - \sum_i m_{0,i} c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{q}_i^2}{c^2}} + \int \mathcal{L} d^3r \\
&= - \sum_i m_{0,i} c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{q}_i^2}{c^2}} + \frac{1}{8\pi} \int d^3r [\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2] + \int d^3r \left[-\rho\Phi + \frac{1}{c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \right] \\
&= - \sum_i m_{0,i} c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{q}_i^2}{c^2}} + \frac{1}{8\pi} \int d^3r [\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2] - \sum_i e_i \Phi(\mathbf{q}_i(t), t) + \frac{1}{c} \sum_i e_i \dot{\mathbf{q}}_i \cdot \mathbf{A}(\mathbf{q}_i(t), t),
\end{aligned} \tag{8.108}$$

vgl. (8.84) und (8.55). Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichungen für die Felder liefert dann die Maxwellgleichungen mit den mikroskopischen Quellen ρ und \mathbf{j} , Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichungen für die Ladungen dann die Dynamik der Quellen, dies muss eigentlich selbstkonsistent gelöst werden. Der Vorteil der kombinierten Beschreibung in einer Lagrangedichte liegt jedoch darin, dass die Symmetrien der Wirkung im Allgemeinen nur für das Gesamtsystem von Feldern und Ladungen gelten, z.B. kann Feldenergie bei der Beschleunigung eines Elektrons in kinetischen Energie des Elektrons umgewandelt werden.

8.3.8 Hamilton-Dichte der Elektrodynamik

Wir wollen noch überprüfen, ob die Hamilton-Dichte zur bekannten Energiedichte korrespondiert und gehen daher zum Hamilton-Formalismus über. Mit der generalisierten Feldimpulsdichte

$$\Pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t u_i)} \tag{8.109}$$

benutzt man eine Legendre-Transformation, um die Hamiltondichte als Funktion der Felder u_i , der konjugierten Impulse Π_i und der räumlichen Ableitungen der Felder $\partial_k u_i$ zu definieren

$$\mathcal{H}(\Pi_i, u_i, \partial_k u_i) = \sum_i \Pi_i (\partial_t u_i) - \mathcal{L}(u_i, \partial_t u_i, \partial_k u_i). \tag{8.110}$$

Einerseits folgt aus dieser Gleichung

$$\partial_t u_i = + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi_i}, \tag{8.111}$$

für die zeitliche Ableitung der Impulse ergibt sich aus der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\partial_t \Pi_i = - \sum_k \partial_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k u_i)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i} + \sum_k \partial_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_k u_i)}. \tag{8.112}$$

Es ergibt sich also auch hier ein Unterschied der Bewegungsgleichungen durch die Abhängigkeit der Hamiltondichte von den räumlichen Ableitungen der Felder, die Hamilton-Gleichungen liefern gekoppelte partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung für die Felder.

Speziell ergeben sich aus der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = - \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} j^\mu A_\mu = \frac{1}{8\pi} \left[\left(\nabla\Phi + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} \right)^2 - (\nabla \times \mathbf{A})^2 \right] - \rho\Phi + \frac{1}{c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \tag{8.113}$$

die generalisierten Feldimpulse

$$\begin{aligned}\Pi_0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \Phi)} = 0, \\ \Pi_i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t A_i)} = \frac{1}{4\pi c} \left(\nabla \Phi + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} \right)_i = -\frac{1}{4\pi c} E_i.\end{aligned}\quad (8.114)$$

Wir betrachten jetzt den Quellenfreien Fall $\mathbf{j} = 0$ und $\rho = 0$. Die Legendre-Transformation führt dann auf

$$\mathcal{H} = \Pi_0(\partial_t \Phi) + \mathbf{\Pi} \cdot (\partial_t \mathbf{A}) - \mathcal{L} = -\frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{A}} - \frac{1}{8\pi} [\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2]. \quad (8.115)$$

Mit der Darstellung des elektrischen Feldes

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \quad (8.116)$$

können wir die Zeitableitung des Vektorpotentials eliminieren

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \Phi) \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{8\pi} [\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2]. \quad (8.117)$$

Für den Fall verschwindender Quellen gilt aber auch $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, und wir können weiter umformen

$$(\nabla \Phi) \cdot \mathbf{E} = \nabla(\Phi \mathbf{E}) - \Phi(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \nabla(\Phi \mathbf{E}), \quad (8.118)$$

so dass die Hamilton-Dichte zu

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4\pi} \nabla(\Phi \mathbf{E}) + \frac{1}{8\pi} [\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2] \quad (8.119)$$

wird. Für die Quantisierung ist jedoch die Hamilton-Funktion wichtig, welche wir als Volumenintegral über die Hamilton-Dichte schreiben

$$H = \int d^3r \mathcal{H} = \frac{1}{4\pi} \oint (\Phi \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{F} + \frac{1}{8\pi} \int [\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2] d^3r. \quad (8.120)$$

Damit die Gesamtenergie endlich bleibt, müssen im zweiten Term die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} im Unendlichen so abfallen wie

$$\mathbf{E}, \mathbf{B} \propto r^{-(3/2+\epsilon)} \quad : \quad \epsilon > 0. \quad (8.121)$$

Entsprechend skaliert das Potential im Unendlichen wie

$$\Phi \propto r^{-(1/2+\epsilon)}. \quad (8.122)$$

Im betrachteten Limes verschwindet aber der Oberflächenterm, denn die Oberfläche liegt im Unendlichen, und $\Phi \mathbf{E} \propto r^{-(2+2\epsilon)}$, es ergibt sich also dieselbe Gesamtenergie wenn wir den Oberflächenterm vernachlässigen. Die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes im Vakuum können wir also genausogut mit

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{8\pi} [\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2] = \frac{1}{8\pi} [\mathbf{E}^2 + (\nabla \times \mathbf{A})^2] \quad (8.123)$$

beschreiben, vgl. Gleichung (5.52). Hierbei ist das elektrische Feld der kanonisch konjugierte Impuls zum Vektorpotential.

8.4 Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

8.4.1 Lösung der Wellengleichung in Coulomb-Eichung

In der Quantenmechanik hilft das Korrespondenzprinzip dabei, aus einer Hamiltonfunktion einen Hamiltonoperator zu machen. Wir wollen das für das elektromagnetische Feld im Vakuum machen

$$\rho = 0, \quad \mathbf{j} = \mathbf{0}. \quad (8.124)$$

Es ist am einfachsten, die Quantisierung in der Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ (auch transversale oder instantane Eichung genannt) vorzunehmen, denn in Abwesenheit von Quellen entkoppeln die Gleichungen für das skalare Potential Φ und das Vektorpotential \mathbf{A} , wie schon in Abschnitt 5.3.2 diskutiert. Insbesondere verschwindet das skalare Potential identisch und das Vektorpotential erfüllt eine einfache Wellengleichung

$$\Phi = 0, \quad \square \mathbf{A} = \left[\Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right] \mathbf{A} = 0, \quad (8.125)$$

vgl. Gleichung (5.38). Eine Lösung dieser Wellengleichung ohne zusätzliche Randbedingungen ist wie wir wissen eine ebene Welle mit $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ und mit der Dispersionsrelation $\omega = c|\mathbf{k}|$. Beliebige Superpositionen solcher ebenen Wellen sind natürlich auch wieder eine Lösung. Die Felder berechnen sich dann wie üblich über $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ und $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{A} = -\frac{1}{c}\partial_t\mathbf{A}$. Speziell für eine ebene Welle folgt also wieder, dass $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = +i\frac{\omega}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = +i\mathbf{k} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ transversal zueinander sind.

Die Idee der Quantisierung besteht darin, einen Operator $\hat{\mathbf{A}}$ für das Vektorpotential \mathbf{A} so zu finden, dass die Ehrenfest-Bewegungsgleichung gelöst wird, wenn die klassische Wellengleichung erfüllt wird

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{\mathbf{A}} \rangle = +\frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{\mathbf{A}}] \rangle + \langle \partial_t \hat{\mathbf{A}} \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \square \mathbf{A} = 0, \quad (8.126)$$

wobei der Hamiltonoperator \hat{H} gerade zur klassischen Gesamtenergie korrespondiert, d.h.

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{8\pi} \int d^3r [\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2] = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \left[\frac{1}{c^2} (\partial_t \mathbf{A})^2 + (\nabla \times \mathbf{A})^2 \right], \\ \hat{H} &= \frac{1}{8\pi} \int d^3r \left[\frac{1}{c^2} (\partial_t \hat{\mathbf{A}})^2 + (\nabla \times \hat{\mathbf{A}})^2 \right]. \end{aligned} \quad (8.127)$$

Wir zeigen dies, indem wir die Energie darstellen als Beiträge mehrerer entkoppelter harmonischer Oszillatoren, und benutzen dann die Erkenntnisse aus der Quantenmechanik.

Für die Quantisierung ist es einfacher, wenn man nur endlich viele Freiheitsgrade hat, daher betrachtet man zunächst ein kubisches Volumen $V = L^3$ mit periodischen Randbedingungen

$$\mathbf{A}(x + n_x L, y + n_y L, z + n_z L, t) = \mathbf{A}(x, y, z, t) \quad \forall n_i \in \mathbb{Z}. \quad (8.128)$$

Periodische Funktionen lassen sich in eine Fourier-Reihe entwickeln, wir berücksichtigen hierbei, dass es zwei Polarisierungen gibt und schreiben den allgemeinen Ansatz für die Lösung der Wellengleichung $\square \mathbf{A} = 0$ als Überlagerung

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k}} \left[A_{\lambda}(\mathbf{k}, t) \frac{e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{L^{3/2}} + A_{\lambda}^*(\mathbf{k}, t) \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{L^{3/2}} \right] \mathbf{u}_{\lambda}^{\mathbf{k}}. \quad (8.129)$$

Der Vorfaktor mit der Wurzel ist unerheblich, da ja die Entwicklungskoeffizienten $A_\lambda(\mathbf{k}, t)$ noch unbekannt sind. Die Vektoren \mathbf{u}_λ kennzeichnen die beiden Polarisierungen und tragen den kompletten Vektorcharakter des Vektorpotentials: In der Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ folgt, dass $\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = 0$ gelten muss, es gibt für vorgegebenes \mathbf{k} zwei linear unabhängige Vektoren, welche dies erfüllen

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_\lambda^{\mathbf{k}} = 0, \quad \mathbf{u}_\lambda^{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}_\sigma^{\mathbf{k}} = \delta_{\lambda\sigma}. \quad (8.130)$$

Zusätzlich kann man immer fordern

$$\mathbf{u}_\lambda^{+\mathbf{k}} = \mathbf{u}_\lambda^{-\mathbf{k}}. \quad (8.131)$$

Um die periodischen Randbedingungen zu erfüllen, darf der Wellenvektor nur diskrete Werte annehmen

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \quad : \quad n_i \in \mathbb{Z}. \quad (8.132)$$

Am Ende betrachtet man $L \rightarrow \infty$, damit liegen dann die Werte von \mathbf{k} immer dichter und werden kontinuierlich.

Setzen wir den Ansatz in die Wellengleichung ein, folgt für jede Mode einzeln

$$-\mathbf{k}^2 A_\lambda(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 A_\lambda(\mathbf{k}, t). \quad (8.133)$$

Das ist genau die Gleichung für einen harmonischen Oszillator der Frequenz $|\mathbf{k}|c$. Die einzelnen Moden des Strahlungsfeldes $A_\lambda(\mathbf{k})$ verhalten sich also wie unabhängige harmonische Oszillatoren, welche verschiedene Frequenzen haben und auch verschiedene Polarisierungen beschreiben. Damit können wir den zeitlichen Anteil bestimmen

$$A_\lambda(\mathbf{k}, t) = A_\lambda(\mathbf{k}) e^{-i\omega(\mathbf{k})t} \quad : \quad \omega(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|, \quad (8.134)$$

und die allgemeine Lösung der Wellengleichung wird zu

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega(\mathbf{k})}} \left(A_\lambda(\mathbf{k}) \frac{e^{+i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t)}}{L^{3/2}} + A_\lambda^*(\mathbf{k}) \frac{e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t)}}{L^{3/2}} \right) \mathbf{u}_\lambda^{\mathbf{k}}. \quad (8.135)$$

Wir haben den Vorfaktor hier so gewählt, damit die Berechnung der Feldenergie einfach wird. Speziell ergibt sich für den Beitrag des elektrischen Feldes

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi c^2} \int d^3r \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 &= \frac{1}{8\pi c^2} \frac{2\pi\hbar c^2}{L^3} \int d^3r \sum_{\mathbf{k}\mathbf{q}} \sum_{\lambda\sigma} (\mathbf{u}_\lambda^{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}_\sigma^{\mathbf{q}}) \frac{i^2 \omega(\mathbf{k}) \omega(\mathbf{q})}{\sqrt{\omega(\mathbf{k}) \omega(\mathbf{q})}} \times \\ &\quad \times \left(A_\lambda(\mathbf{k}) e^{+i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t)} - A_\lambda^*(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t)} \right) \times \\ &\quad \times \left(A_\sigma(\mathbf{q}) e^{+i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega(\mathbf{q})t)} - A_\sigma^*(\mathbf{q}) e^{-i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega(\mathbf{q})t)} \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} \hbar \omega(\mathbf{k}) \left[A_\lambda(\mathbf{k}) A_\lambda^*(\mathbf{k}) + A_\lambda^*(\mathbf{k}) A_\lambda(\mathbf{k}) \right. \\ &\quad \left. - A_\lambda(\mathbf{k}) A_\lambda(-\mathbf{k}) e^{-2i\omega(\mathbf{k})t} - A_\lambda^*(\mathbf{k}) A_\lambda^*(-\mathbf{k}) e^{+2i\omega(\mathbf{k})t} \right]. \end{aligned} \quad (8.136)$$

Hierbei haben wir zuerst

$$\frac{1}{L^3} \int d^3r e^{\pm i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}} = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{q}}, \quad \frac{1}{L^3} \int d^3r e^{\pm i(\mathbf{k}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}} = \delta_{-\mathbf{k},\mathbf{q}} \quad (8.137)$$

und dann die Relation $\mathbf{u}_\lambda^{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}_\sigma^{\pm\mathbf{k}} = \delta_{\lambda\sigma}$ ausgenutzt. Der Beitrag des Magnetfeldes berechnet sich analog und liefert bis auf ein relatives Vorzeichen bei den zeitabhängigen Termen dasselbe

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\nabla \times \mathbf{A})^2 &= \frac{1}{8\pi} \frac{2\pi\hbar c^2}{L^3} \int d^3r \sum_{\mathbf{k}\mathbf{q}} \sum_{\lambda\sigma} (i\mathbf{k} \times \mathbf{u}_\lambda^{\mathbf{k}}) \cdot (i\mathbf{q} \times \mathbf{u}_\sigma^{\mathbf{q}}) \frac{1}{\sqrt{\omega(\mathbf{k})\omega(\mathbf{q})}} \times \\ &\quad \times \left(A_\lambda(\mathbf{k}) e^{+i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t)} - A_\lambda^*(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t)} \right) \times \\ &\quad \times \left(A_\sigma(\mathbf{q}) e^{+i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega(\mathbf{q})t)} - A_\sigma^*(\mathbf{q}) e^{-i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega(\mathbf{q})t)} \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} \hbar\omega(\mathbf{k}) \left[A_\lambda(\mathbf{k}) A_\lambda^*(\mathbf{k}) + A_\lambda^*(\mathbf{k}) A_\lambda(\mathbf{k}) \right. \\ &\quad \left. + A_\lambda(\mathbf{k}) A_\lambda(-\mathbf{k}) e^{-2i\omega(\mathbf{k})t} + A_\lambda^*(\mathbf{k}) A_\lambda^*(-\mathbf{k}) e^{+2i\omega(\mathbf{k})t} \right]. \end{aligned} \quad (8.138)$$

Hier haben wir zunächst das Kreuzprodukt vereinfacht, d.h.

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{u}_\lambda^{\mathbf{k}}) \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{u}_\sigma^{\mathbf{q}}) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})(\mathbf{u}_\lambda^{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}_\sigma^{\mathbf{q}}) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_\sigma^{\mathbf{q}})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{u}_\lambda^{\mathbf{k}}) \quad (8.139)$$

ausgenutzt, bevor wir dieselben Vereinfachungen wie zuvor angewandt haben. Das relative Vorzeichen für $\mathbf{q} = -\mathbf{k}$ ergibt sich dann aus dem Skalarprodukt oben, und der 2. Term verschwindet nach $\mathbf{q} \rightarrow \pm\mathbf{k}$ immer, da die Vektoren \mathbf{u}_λ senkrecht auf \mathbf{k} stehen. In der Gesamtenergie heben sich also die zeitabhängigen Terme weg

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} \hbar\omega(\mathbf{k}) [A_\lambda(\mathbf{k}) A_\lambda^*(\mathbf{k}) + A_\lambda^*(\mathbf{k}) A_\lambda(\mathbf{k})]. \quad (8.140)$$

8.4.2 Quantisierung

Aus der Ableitung zuvor folgt, dass sich die Energie des elektromagnetischen Feldes zerlegen lässt in unabhängige harmonische Oszillatoren. Wir suchen eine Quantisierungsvorschrift für das Vektorpotential in Coulomb-Eichung

$$\mathbf{A} \rightarrow \hat{\mathbf{A}} \quad (8.141)$$

unter der Randbedingung, dass die quantenmechanischen Bewegungsgleichungen, z.B. im Heisenberg-Bild (ohne explizite Zeitabhängigkeit)

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{A}} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\mathbf{A}}] \quad (8.142)$$

erfüllt sein sollen. Dafür schauen wir uns nochmals den einzelnen harmonischen Oszillator an und verallgemeinern danach.

Einzelner Oszillator

Für einen eindimensionalen harmonischen Oszillator konnte man die Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{q}^2, \quad (8.143)$$

mittels der **Leiteroperatoren**

$$\begin{aligned} a &= \frac{m\omega\hat{q} + i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar m\omega}}, & a^\dagger &= \frac{m\omega\hat{q} - i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \\ \hat{q} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger), & \hat{p} &= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (a^\dagger - a) \end{aligned} \quad (8.144)$$

umschreiben. Wegen der Kommutatorrelationen

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \quad (8.145)$$

erfüllen die Leiteroperatoren die Vertauschungsrelationen

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (8.146)$$

Einsetzen der Leiteroperatoren ermöglicht eine einfache Schreibweise des Hamilton-Operators

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega [aa^\dagger + a^\dagger a] = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \quad (8.147)$$

vgl. (8.140). Der Fock-Raum wurde dann aufgespannt aus den Eigenzuständen $|n\rangle$ des Teilchenzahloperators, und man hatte die Relationen

$$a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle \quad a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle. \quad (8.148)$$

Dies ermöglicht auch die Schreibweise

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle \quad (8.149)$$

mit dem Vakuumzustand $|0\rangle$, welcher gleichzeitig auch der Grundzustand des Hamiltonoperators ist. Im Heisenberg-Bild wird die Zeitentwicklung von den Operatoren getragen (wieder ohne explizite Zeitabhängigkeit)

$$\hat{O}_H(t) = e^{+iHt} \hat{O} e^{-iHt}. \quad (8.150)$$

Speziell für die Vernichter folgt im Heisenbergbild

$$\frac{d}{dt} a_H = \frac{i}{\hbar} [H_H, a_H] = i\omega [a_H^\dagger a_H, a_H] = -i\omega a_H. \quad (8.151)$$

Die Lösung lautet daher einfach

$$a_H(t) = e^{-i\omega t} a, \quad (8.152)$$

analog findet man $a_H^\dagger(t) = e^{+i\omega t} a^\dagger$.

Elektromagnetisches Feld

Schaut man sich die im vorherigen Abschnitt abgeleitete Gesamtenergie an und die Tatsache, dass die Moden $A_\lambda(\mathbf{k}, t)$ gerade unabhängige harmonische Oszillatorgleichungen für die jeweilige Frequenz $\omega(k)$ lösen, liegt es nahe, dieselbe Quantisierungsvorschrift anzuwenden wie für einen einzelnen Oszillator. Die Entwicklungskoeffizienten $A_\lambda(\mathbf{k})$ werden zu Leiteroperatoren

$$A_\lambda(\mathbf{k}) \rightarrow \hat{A}_\lambda(\mathbf{k}) = a_{\lambda\mathbf{k}}, \quad A_\lambda^*(\mathbf{k}) \rightarrow \hat{A}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) = a_{\lambda\mathbf{k}}^\dagger, \quad (8.153)$$

welche zumindest die Kommutatorrelation $[a_{\lambda\mathbf{k}}, a_{\lambda\mathbf{k}}^\dagger] = 1$ erfüllen. Zusätzlich muss, um die Ehrenfest-Bewegungsgleichung zu erfüllen, gelten, dass nur die Operatoren der gleichen Mode beitragen, d.h. die Operatoren zu verschiedenen Moden müssen kommutieren. Zusammengefasst müssen diese Leiteroperatoren also die bosonischen Kommutatorrelationen erfüllen

$$[a_{\lambda\mathbf{k}}, a_{\sigma\mathbf{q}}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{q}} \delta_{\lambda\sigma}, \quad [a_{\lambda\mathbf{k}}, a_{\sigma\mathbf{q}}] = 0. \quad (8.154)$$

Daraus folgt dann auch, dass die Relationen (8.148) entsprechend gelten. Der Hamilton-Operator wird damit zu

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}\lambda}^{\dagger} a_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right), \quad (8.155)$$

und wir haben im Heisenbergbild

$$a_{\mathbf{k}\lambda,H}(t) = e^{-i\omega(k)t} a_{\mathbf{k}\lambda}. \quad (8.156)$$

Der Operator für das Vektorpotential wird im Heisenbergbild zu

$$\hat{\mathbf{A}}_H = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3\omega(k)}} \left[a_{\mathbf{k}\lambda,H}(t) e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + a_{\mathbf{k}\lambda,H}^{\dagger}(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right] \mathbf{u}_{\lambda}^{\mathbf{k}}, \quad (8.157)$$

wegen Coulomb-Eichung gilt $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\lambda}^{\mathbf{k}} = 0$. Daraus ergeben sich dann auch die Operatoren für die Felder.

Bemerkungen:

- Man zeigt jetzt leicht: Im Heisenbergbild gilt die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{A}}_H = \frac{i}{\hbar} [H, \hat{\mathbf{A}}_H], \quad (8.158)$$

damit sind die Ehrenfest-Bewegungsgleichungen in allen Bildern erfüllt.

- Die Operatoren für $\hat{\mathbf{E}}_H = -\frac{1}{c} \partial_t \hat{\mathbf{A}}_H$ und $\hat{\mathbf{B}}_H = \nabla \times \hat{\mathbf{A}}_H$ sind Observable, d.h. selbstadjungiert

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}_H &= i \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega(k)}{L^3}} \left(a_{\mathbf{k}\lambda,H}(t) e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \text{h.c.} \right) \mathbf{u}_{\lambda}^{\mathbf{k}}, \\ \hat{\mathbf{B}}_H &= i \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3\omega(k)}} \left(a_{\mathbf{k}\lambda,H}(t) e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \text{h.c.} \right) \mathbf{k} \times \mathbf{u}_{\lambda}^{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (8.159)$$

Der Ausdruck h.c. steht hier für "hermitian conjugate". Verschiedene Komponenten von $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ und $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}', t)$ kommutieren jetzt nicht mehr miteinander, d.h. diese Größen sind nicht mehr simultan messbar.

- Man sagt, ein **Photon** der Polarisation λ und mit Wellenvektor \mathbf{k} wird beschrieben durch den Zustand

$$a_{\lambda\mathbf{k}}^{\dagger} |0 \dots 0\rangle = |0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\rangle, \quad (8.160)$$

der Zustand $|0\rangle = |0 \dots 0\rangle$ beschreibt hierbei den Grundzustand des Hamiltonoperators (Vakuum) und der Operator $a_{\lambda\mathbf{k}}^{\dagger}$ heißt entsprechend Erzeuger.

- Werden $n_{\mathbf{k}\lambda}$ Photonen der gleichen Mode erzeugt, ergibt sich nach Normierung der Zustand

$$|n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{\mathbf{k}\lambda}!}} (a_{\lambda\mathbf{k}}^{\dagger})^n |0\rangle. \quad (8.161)$$

Dies ist eigentlich eine Kurzschreibweise für

$$|n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle = |0, \dots, 0, n_{\mathbf{k}\lambda}, 0, \dots, 0\rangle, \quad (8.162)$$

da ja die anderen Moden nicht besetzt sind.

- Werden mehrere Photonen verschiedener Moden erzeugt, beschreibt man dies durch den Vielteilchen-Fockraum. Dieser kann aus dem Einteilchenfockraum aufgebaut werden indem man die Tensorprodukte sämtlicher Basisvektoren bildet, z.B. hat man für nur zwei Moden

$$|n_1, n_2\rangle \equiv |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle, \quad (8.163)$$

und die gesamte Basis kann aufgebaut werden aus Tensorprodukten der Basisvektoren der einzelnen Räume. Für viele Moden schreibt man dann

$$|\mathbf{n}\rangle = |\{n_{\mathbf{k}\lambda}\}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\prod_{\mathbf{k}} \prod_{\lambda} n_{\mathbf{k}\lambda}!}} \left[\prod_{\mathbf{k}} \prod_{\lambda} (a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger)^{n_{\mathbf{k}\lambda}} \right] |0 \dots 0\rangle. \quad (8.164)$$

Diese Zustände sind orthonormiert

$$\langle \mathbf{n} | \mathbf{m} \rangle = \delta_{\mathbf{n}, \mathbf{m}} = \prod_{\mathbf{k}} \prod_{\lambda} \delta_{n_{\mathbf{k}\lambda}, m_{\mathbf{k}\lambda}}. \quad (8.165)$$

- Daraus folgt aber auch, dass die Erwartungswerte der Felder für reine Fock-Zustände verschwinden

$$\langle \mathbf{n} | \hat{\mathbf{E}} | \mathbf{n} \rangle = 0 = \langle \mathbf{n} | \hat{\mathbf{B}} | \mathbf{n} \rangle. \quad (8.166)$$

Die reinen Fock-Zustände sind also nicht klassisch.

- Dahingegen haben wir aber für die Gesamtenergie wie es sein sollte

$$\langle \mathbf{n} | \hat{H} | \mathbf{n} \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} \hbar\omega(k) \left(n_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right). \quad (8.167)$$

Die Grundzustandsenergie geht aber gegen unendlich wenn wir das Diskretisierungsvolumen gegen Unendlich gehen lassen! In der Regel betrachtet man aber nur Energiedifferenzen, welche immer endlich sind. Für beschränkte Geometrien ist hängt die Vakuumenergie vom Volumen ab (Casimir-Effekt).

- Die Energiedichte der Felder

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{8\pi} \langle \mathbf{n} | (\hat{\mathbf{E}}^2 + \hat{\mathbf{B}}^2) | \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{4\pi} \langle \mathbf{n} | \hat{\mathbf{E}}^2 | \mathbf{n} \rangle \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} \frac{2\pi\hbar\omega(k)}{L^3} (n_{\mathbf{k}\lambda} + n_{\mathbf{k}\lambda} + 1) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} \frac{\hbar\omega(k)}{L^3} \left(n_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (8.168)$$

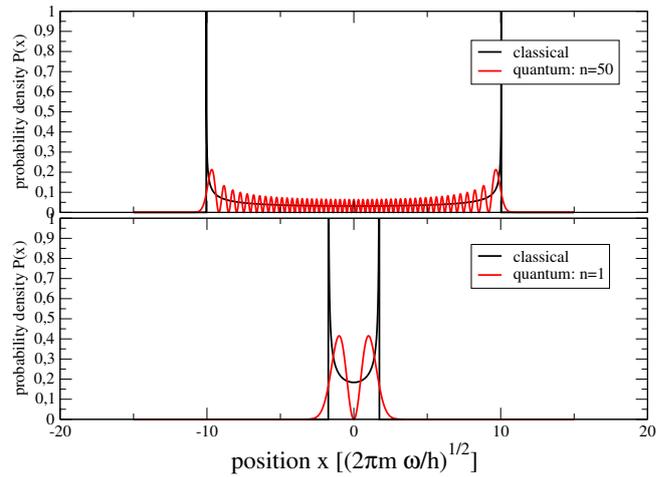
liefert dasselbe wie die Energie pro Quantisierungsvolumen.

- Der Feldimpuls (5.63) ergab sich aus dem Integral über den Poynting-Vektor, seine quantisierte Version lautet entsprechend

$$\hat{\mathbf{P}} = \frac{1}{4\pi c} \int_V \hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{B}} d^3r = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} \hbar k a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda}, \quad (8.169)$$

was man durch Einsetzen und Ausnutzen von $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}^\lambda \times (\mathbf{k} \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^\lambda) = \mathbf{k}$ leicht zeigen kann.

Abbildung 8.2: Quantenmechanische (rot) vs. klassische (schwarz) Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für einen harmonischen Oszillator mit derselben klassischen wie quantenmechanischen Energie, bestimmt durch die Quantenzahlen $n = 1$ (unten) und $n = 50$ (oben). Für große n nähern sich die Wahrscheinlichkeitsdichten einander an, die quantenmechanische Wahrscheinlichkeitsdichte hat jedoch immer noch exakte Nulldurchgänge.



8.4.3 Korrespondenz und Kohärente Zustände

Es stellt sich immer noch die Frage, wie der verschwindende Erwartungswert der Felder in den Fock-Zuständen mit der klassischen Beobachtung endlicher Feldstärken in Übereinstimmung gebracht werden kann. Die einfache Antwort darauf ist, dass die Fock-Zustände nicht klassisch sind, wir betrachten wieder zunächst den einzelnen harmonischen Oszillator und verallgemeinern dann.

Einzeller Oszillator

Aus der Quantenmechanik wissen wir, dass die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators durch die Hermite-Polynome $H_n(x)$ und eine Gauss-Funktion erzeugt werden

$$\Psi_n(x) = \langle x|n\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right). \quad (8.170)$$

Die quantenmechanische Aufenthaltswahrscheinlichkeit ergibt sich aus dem Betragsquadrat dieser Wellenfunktion

$$P_n(x) = |\Psi_n(x)|^2. \quad (8.171)$$

Vergleicht man die klassische Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines harmonischen Oszillators der Amplitude A

$$P_A(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(x - A \cos(\phi)) d\phi = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\delta(\phi - \arccos(x/A))}{\sqrt{A^2 - x^2}} + \frac{\delta(\phi + \arccos(x/A))}{\sqrt{A^2 - x^2}} \right] \\ = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}} & : -A < x < +A \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}, \quad (8.172)$$

so findet man durch Anpassen der Amplitude an die Energie

$$\frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \stackrel{!}{=} \hbar\omega(n + 1/2), \quad (8.173)$$

dass die Wahrscheinlichkeitsdichten sich zwar im Limes hoher Quantenzahlen n immer mehr ähneln, aber auch fundamentale Unterschiede aufweisen, vgl. Abb. 8.2. Insbesondere hat die quantenmechanische Wahrscheinlichkeitsdichte immer exakte Nulldurchgänge, und sie wird für $x > A$ nicht verschwinden. Auch erkennt man die Korrespondenz nur in der zeitlich gemittelten klassischen Aufenthaltswahrscheinlichkeit, durch die Mittelung ist die Oszillation nicht mehr sichtbar.

Die Fock-Eigenzustände haben nur eine triviale Zeitabhängigkeit, d.h. ein System in diesem Eigenzustand zeigt keinerlei Dynamik.

Es gibt jedoch auch Zustände, mit denen die Korrespondenz deutlicher wird, welche z.B. die klassische Oszillation wie ein Wellenpaket nachbilden. Diese heißen **kohärente Zustände** oder **Glauber-Zustände**. Sie sind normiert bestimmt durch eine komplexe Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ und formal definiert als

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2} + \alpha a^\dagger\right) |0\rangle. \quad (8.174)$$

Sie sind normiert, aber nicht orthogonal und werden gebildet aus einer quantenmechanischen Superposition von unendlich vielen Fock-Zuständen. Man zeigt leicht aus

$$a(a^\dagger)^n |0\rangle = (1 + a^\dagger a)(a^\dagger)^{n-1} |0\rangle = n(a^\dagger)^{n-1} |0\rangle, \quad (8.175)$$

dass die kohärenten Zustände Eigenzustände des Vernichters sind

$$a |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle. \quad (8.176)$$

Da $a \neq a^\dagger$, sind die Eigenwerte α im Allgemeinen komplexwertig. Weiterhin kann man leicht zeigen, dass die Unschärfe der kohärenten Zustände

$$(\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2) = \frac{\hbar}{2m\omega}, \quad (\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2) = \frac{m\hbar\omega}{2} \quad (8.177)$$

gerade minimal ist und die Heisenbergsche Unschärferelation saturiert

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}. \quad (8.178)$$

Die Schwankung des Teilchenzahloperators wird mit

$$a^\dagger a a^\dagger a = a^\dagger (1 + a^\dagger a) a = a^\dagger a + a^\dagger a^\dagger a a \quad (8.179)$$

zu

$$\langle (a^\dagger a)^2 \rangle - \langle a^\dagger a \rangle^2 = |\alpha|^4 + |\alpha|^2 - |\alpha|^4 = |\alpha|^2. \quad (8.180)$$

Insbesondere verschwindet das Verhältnis von Varianz zum Mittelwert wie

$$\frac{\sqrt{\langle (a^\dagger a)^2 \rangle - \langle a^\dagger a \rangle^2}}{\langle a^\dagger a \rangle} = \frac{1}{|\alpha|} = \frac{1}{\sqrt{\langle a^\dagger a \rangle}}. \quad (8.181)$$

Je mehr Photonen der Zustand enthält, desto geringer ist seine relative Schwankung.

Der Erwartungswert der Energie in einem solchen kohärenten Zustand ist

$$\langle H \rangle = \hbar\omega \langle \alpha | (a^\dagger a + 1/2) | \alpha \rangle = \hbar\omega (|\alpha|^2 + 1/2). \quad (8.182)$$

Betrachtet man den zeitabhängigen Erwartungswert des Ortsoperators, wenn man den Oszillator bei $t = 0$ in einem kohärenten Zustand mit dem komplexen Parameter

$$\alpha = |\alpha| e^{i\delta} \quad (8.183)$$

präpariert, folgt

$$\begin{aligned}\langle x(t) \rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle \alpha | e^{+iHt} (a + a^\dagger) e^{-iHt} | \alpha \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle \alpha | (ae^{-i\omega t} + a^\dagger e^{+i\omega t}) | \alpha \rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} 2|\alpha| \cos(\omega t - \delta).\end{aligned}\quad (8.184)$$

Der Mittelwert entspricht also exakt der klassischen Lösung, insbesondere entspricht die Amplitude

$$A = 2|\alpha| \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \quad (8.185)$$

gerade dem Betrag von α und die Phase δ liefert die Phase des Oszillators. Man kann noch allgemeiner vorgehen und nach der Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_\alpha(x) = |\langle x | \alpha \rangle|^2$ im kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$ fragen. Zu diesem Zwecke kann man alternativ auch die momentengenerierende Funktion berechnen

$$M_\alpha(\chi) = \langle \alpha | e^{+i\chi\hat{x}} | \alpha \rangle \equiv \int e^{+i\chi x} P_\alpha(x) dx. \quad (8.186)$$

Aus ihr erhält man die Momente durch

$$\langle \hat{x}^n \rangle = (-i\partial_\chi)^n M_\alpha(\chi) |_{\chi=0}. \quad (8.187)$$

Gleichzeitig erhalten wir die Wahrscheinlichkeitsverteilung über die inverse Fourier-Transformation

$$P_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi} \int M_\alpha(\chi) e^{-i\chi x} d\chi. \quad (8.188)$$

Konkret berechnet sich die momentengenerierende Funktion unter Ausnutzung von $e^{i\kappa^* a^\dagger + i\kappa a} = e^{i\kappa^* a^\dagger} e^{i\kappa a} e^{-|\kappa|^2/2}$ zu

$$\begin{aligned}M(\chi) &= \langle \alpha | e^{+iHt} e^{+i\chi\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a+a^\dagger)} e^{-iHt} | \alpha \rangle \\ &= \langle \alpha | \exp \left\{ +i\chi\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a^\dagger e^{+i\omega t} + a e^{-i\omega t}) \right\} | \alpha \rangle \\ &= \langle \alpha | \exp \left\{ +i\chi\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} a^\dagger e^{+i\omega t} \right\} \exp \left\{ +i\chi\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} a e^{-i\omega t} \right\} | \alpha \rangle \exp \left\{ -\chi^2 \frac{\hbar}{2m\omega} \right\} \\ &= \exp \left\{ i\chi\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} 2|\alpha| \cos(\omega t - \delta) - \frac{\chi^2}{2} \frac{\hbar}{2m\omega} \right\}.\end{aligned}\quad (8.189)$$

Das ist eine Gaussfunktion in χ und ihre Fourier-Transformierte liefert wieder eine Gaussfunktion mit inverser Breite

$$P_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(x - 2|\alpha|\sigma \cos(\omega t - \delta))^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}. \quad (8.190)$$

Setzt man hierfür die Masse des Elektrons ein und nimmt für $\hbar\omega$ typische Energien von 1 eV an, ergibt sich als Zahlenwert für die Breite 10^{-10} m. Kohärente Zustände folgen also vollständig der klassischen Trajektorie, haben dabei aber eine quantenmechanische Breite, was wegen der Energie-Impuls-Unschärfe auch nötig ist. Da eine Gaussfunktion durch den Mittelwert und die Breite vollständig charakterisiert ist, genügen Angabe der klassischen Amplitude A und der Phase δ vollständig für die Charakterisierung von $P(x)$ bzw. α .

Elektromagnetisches Feld

Bei der Antwort auf die Frage welcher Zustand zum klassischen nichtverschwindenden Feld korrespondiert kommt man also auf die Idee, kohärente Zustände anzusetzen. Schreibt man die Tensorprodukte in den Vielteilchen-Fockzuständen explizit für K Moden mit den Polarisierungen $\lambda \in \pm$

$$|\vec{n}\rangle = |n_{\mathbf{k}_1,-}\rangle \otimes \dots \otimes |n_{\mathbf{k}_K,+}\rangle, \quad (8.191)$$

sieht man dass sie Produktzustände der verschiedenen Moden sind. Dies muss so sein, da in dieser Basis ja die Oszillatoren nicht wechselwirken und die Eigenzustände einer Summe von ungekoppelten Operatoren Produktzustände der einzelnen Eigenzustände sind. Setzen wir stattdessen einen Produktzustand von Glauber-Zuständen an

$$|\Psi\rangle = |\alpha_{\mathbf{k}_1,-}\rangle \otimes \dots \otimes |\alpha_{\mathbf{k}_K,+}\rangle = \bigotimes_{\mathbf{k}\lambda} |\alpha_{\mathbf{k}\lambda}\rangle, \quad (8.192)$$

so wirkt jeder Erzeuger bzw. Vernichter nur auf seinen entsprechenden Glauber-Zustand entweder nach links (Erzeuger) oder nach rechts (Vernichter). Die Operatoren werden dann durch ihre Eigenwerte ersetzt und es ergibt sich z.B. für das Vektorpotential (8.157) der Erwartungswert

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \langle \hat{\mathbf{A}} \rangle = \langle \Psi | \hat{\mathbf{A}}_H | \Psi \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3\omega(k)}} \left[\alpha_{\mathbf{k}\lambda} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega(k)t)} + \alpha_{\mathbf{k}\lambda}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega(k)t)} \right] \mathbf{u}_{\lambda}^{\mathbf{k}} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3\omega(k)}} |\alpha_{\mathbf{k}\lambda}| 2 \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega(k)t - \delta_{\mathbf{k}\lambda}) \mathbf{u}_{\lambda}^{\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (8.193)$$

wir haben also die Entsprechung

$$A_{\lambda}(\mathbf{k}) = \alpha_{\mathbf{k}\lambda}, \quad (8.194)$$

d.h. die kohärenten Zustände liefern gerade die Fourier-Komponenten des Vektorpotentials. Die elektrischen und magnetischen Felder folgen dann analog, auch ihre Erwartungswerte verschwinden nicht. Kohärente Zustände können also benutzt werden um klassisches Licht gut zu beschreiben. Darüberhinaus zeigen auch gequetschte Zustände diese Korrespondenz, was wir hier aber nicht mehr vertiefen wollen.

8.5 Elektron-Feld-Wechselwirkung

8.5.1 Hamilton-Operator

Im Allgemeinen zerlegt man den Hamiltonoperator von wechselwirkenden Systemen in die nicht-wechselwirkenden – separat auf die Einzelsysteme wirkenden – Hamiltonoperatoren H_i und einen Term H_{12} welche auf beide Systeme wirkt und damit die Wechselwirkung modelliert

$$H = H_1 + H_2 + H_{12}. \quad (8.195)$$

Betrachtet man als System 1 ein durch das Potential $V(\mathbf{r})$ gebundenes Elektron

$$H_1 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{r}}) \quad (8.196)$$

und als System 2 das elektromagnetische Feld

$$H_2 = \sum_k \hbar\omega_k (a_k^\dagger a_k + 1/2), \quad (8.197)$$

wobei die Frequenz ω_k die Energie der Mode k (welche ein Multiindex aus k_x, k_y, k_z und λ ist) beschreibt, so ergibt sich der Gesamt-Hamiltonian durch die minimale Kopplungsvorschrift

$$\hat{\mathbf{p}} \rightarrow \hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \hat{\mathbf{A}}. \quad (8.198)$$

Ausmultiplizieren liefert

$$H_1' = H_1 - \frac{e}{2mc} (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) + \frac{e^2}{2mc^2} \hat{\mathbf{A}}^2, \quad (8.199)$$

und wegen der verwendeten Coulomb-Eichung kann man weiter vereinfachen

$$\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + (-i\hbar\nabla \cdot \mathbf{A}) = \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{p}}. \quad (8.200)$$

Der Wechselwirkungshamiltonian wird damit zu

$$H_I = -\frac{e}{mc} \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \frac{e^2}{2mc^2} \hat{\mathbf{A}}^2. \quad (8.201)$$

Hier wird der erste Term oft auch paramagnetische Kopplung genannt (er tendiert dazu, die elektronischen Spins mit dem Magnetfeld auszurichten) und der zweite Term diamagnetische Kopplung (Tendenz zur antiparallelen Ausrichtung).

Wir vernachlässigen jetzt einerseits die diamagnetische Kopplung

$$\frac{e^2}{2mc^2} \hat{\mathbf{A}}^2 \approx 0 \quad (8.202)$$

und nehmen weiterhin an, dass die Wellenlänge der Strahlung groß gegenüber den typischen Abmessungen des Atoms (Bohrscher Radius) ist, so dass wir in (8.159) die Ortsabhängigkeit im Operator des Vektorpotentials vernachlässigen können

$$\hat{\mathbf{A}} \rightarrow \sum_k \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3\omega(k)}} [a_k + a_k^\dagger] \mathbf{u}_k. \quad (8.203)$$

Der Wechselwirkungshamiltonian wird zu

$$H_I = -\frac{e}{mc} \sum_k \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3\omega(k)}} (a_k + a_k^\dagger) \mathbf{u}_k \cdot \hat{\mathbf{p}}. \quad (8.204)$$

Dies lässt sich durch Einsetzen der Energie-Eigenbasis von H_1 auch schreiben als

$$H_I = \sum_{ab} \sum_k \hbar g_k^{ab} |a\rangle \langle b| \otimes (a_k + a_k^\dagger), \quad \hbar g_k^{ab} = -\frac{e}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3\omega(k)}} \langle a | \mathbf{u}_k \cdot \hat{\mathbf{p}} | b \rangle. \quad (8.205)$$

Die Konstanten g_k^{ab} erfüllen aber gerade $g_k^{aa} = 0$, was man zeigen kann indem man den Impulsoperator darstellt durch den Hamiltonoperator des Elektrons

$$\hat{\mathbf{p}} = i\frac{m}{\hbar} [H_1, \hat{\mathbf{r}}] = i\frac{m}{\hbar} \left[\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{r}}), \hat{\mathbf{r}} \right], \quad (8.206)$$

was man leicht durch Nachrechnen der einzelnen Komponenten bestätigen kann. Also gilt in der Energie-Eigenbasis von H_1 , definiert z.B. durch

$$H_1 = \sum_a E_a |a\rangle \langle a|, \quad (8.207)$$

für die Matrixelemente des Impulsoperators

$$\langle a | \mathbf{u}_k \cdot \hat{\mathbf{p}} | b \rangle = \frac{im}{\hbar} \mathbf{u}_k \cdot \langle a | [H_1, \hat{\mathbf{r}}] | b \rangle = \frac{im}{\hbar} (E_a - E_b) \mathbf{u}_k \cdot \langle a | \hat{\mathbf{r}} | b \rangle. \quad (8.208)$$

Solche Matrixelemente hätte man auch bekommen, wenn man von Anfang an für die Wechselwirkung zwischen Elektron und elektromagnetischem Feld $H_I = -e\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{E}}$ angesetzt hätte, was der Wechselwirkungsenergie eines Dipols mit dem externen Feld entspricht. Dieser Ansatz heißt daher auch Dipolnäherung. Man sieht an dieser Form der Wechselwirkung, dass sich durch das Erzeugen oder Vernichten von Photonen für das Elektron Übergänge zwischen den Energie-Eigenzuständen $|a\rangle$ ergeben, klassisch entspricht dies der Absorption bzw. Emission von Feldenergie.

Speziell wenn man nur zwei gebundene Zustände $|g\rangle$ (Grundzustand) und $|e\rangle$ (angeregter Zustand) berücksichtigen muss, entweder weil die Art der Bindung des Elektrons nur zwei gebundene Zustände zulässt oder weil energetisch höherliegende Zustände kaum besetzt werden und daher vernachlässigbar sind, kann man den Hamiltonoperator auch mit Pauli-Matrizen darstellen, z.B. wird

$$\begin{aligned} \sigma_z &= |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g| = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \sigma_+ &= |e\rangle \langle g| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\sigma_x + i\sigma_y}{2}, \quad \sigma_- = |g\rangle \langle e| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\sigma_x - i\sigma_y}{2} = (\sigma_+)^\dagger, \\ \sigma_x &= \sigma_+ + \sigma_-, \quad \sigma_y = \sigma_+ - \sigma_-. \end{aligned} \quad (8.209)$$

Unter den Annahmen

$$g_k^{ge} = g_k^{eg} = g_k, \quad g_k^{gg} = g_k^{ee} = 0 \quad (8.210)$$

wird letztlich – bis auf irrelevante Konstanten – der gesamte Hamiltonoperator zu einem Spezialfall des **Spin-Boson-Modells**

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} \sigma_z + \sum_k \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k + (\sigma_- + \sigma_+) \otimes \sum_k \hbar g_k (a_k + a_k^\dagger). \quad (8.211)$$

Dieses Modell ist der Ausgangspunkt für viele Beschreibungen offener Quantensysteme. Es ist im Allgemeinen nicht analytisch lösbar. Oft wird die Konstante \hbar in den Frequenzen ω und ω_k und auch den Kopplungskonstanten g_k absorbiert, welche dadurch die Einheit einer Energie erhalten.

8.5.2 Fermis Goldene Regel

Fermis Goldene Regel ermöglicht es, die Wahrscheinlichkeiten für durch eine Störung induzierte Übergänge approximativ zu berechnen. Man betrachtet einen Hamiltonoperator

$$H = H_0 + V \quad (8.212)$$

wobei V klein im Vergleich zu H_0 sein soll. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei das System in einem Eigenzustand von H_0 , so dass $H_0 |\Psi(0)\rangle = E_i |\Psi(0)\rangle$. Zum Zeitpunkt $\Delta t > 0$ kann die Störung

aber Übergänge zu anderen Eigenzuständen bewirken. Die Wahrscheinlichkeit, nach der Zeit Δt das System in einem Eigenzustand $|f\rangle$ zu beobachten ist

$$P_{i \rightarrow f}(\Delta t) = |\langle f | \Psi(\Delta t) \rangle|^2 = |\langle f | U(\Delta t) | i \rangle|^2. \quad (8.213)$$

Da die Störung klein sein soll, werten wir dies im Wechselwirkungsbild aus, welches die Schrödingergleichung transformiert auf

$$\left| \dot{\Psi} \right\rangle = -\frac{i}{\hbar} (H_0 + V) |\Psi\rangle \quad \Longrightarrow \quad \left| \dot{\tilde{\Psi}} \right\rangle = -\frac{i}{\hbar} \tilde{V}(t) |\tilde{\Psi}\rangle. \quad (8.214)$$

Im Wechselwirkungsbild können wir den Zeitentwicklungsoperator für kleine Störungen approximieren durch

$$\tilde{U} = \mathbf{1} - \frac{i}{\hbar} \int_0^{\Delta t} e^{+\frac{i}{\hbar} H_0 t} V e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} dt + \dots, \quad (8.215)$$

so dass sich für die Übergangswahrscheinlichkeit ($f \neq i$) ergibt

$$P_{i \rightarrow f}(\Delta t) \approx \left| \int_0^{\Delta t} e^{+\frac{i}{\hbar} (E_f - E_i)t} dt \frac{1}{\hbar} \langle f | V | i \rangle \right|^2 = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\sin^2\left(\frac{(E_f - E_i)\Delta t}{2\hbar}\right)}{\left(\frac{(E_f - E_i)}{2\hbar}\right)^2} |\langle f | V | i \rangle|^2. \quad (8.216)$$

Wenn die Übergangsenergien von H_0 kontinuierlich werden, kann man diese Übergangswahrscheinlichkeit unter Ausnutzung von

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \operatorname{sinc}^2(\Omega\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \frac{\sin^2(\Omega\tau)}{(\Omega\tau)^2} = \pi \delta(\Omega) \quad (8.217)$$

auch in eine Rate umschreiben

$$R_{i \rightarrow f} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{P_{i \rightarrow f}(\Delta t)}{\Delta t} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_f - E_i) |\langle f | V | i \rangle|^2. \quad (8.218)$$

Dieser Ausdruck ergibt natürlich nur unter einem Integral Sinn, die δ -Funktion zeigt aber auf, dass vorzugsweise die Übergangsraten für Prozesse nicht verschwinden, welche die Energie erhalten, also welche mit $E_i = E_f$. Oft wird dieses Resultat als **Fermis Goldene Regel** bezeichnet, wenn entsprechend über die Anfangs- oder Endzustände summiert wird, durch eine Wichtung der Energieeigenzustände kommt beim Übergang zum Integral dann noch die Zustandsdichte ins Spiel.

8.5.3 Grundlegende Prozesse

Betrachten wir das gebundene Elektron und das freie elektromagnetische Feld als Teil von H_0 und die Elektron-Feld-Wechselwirkung als Störung

$$\begin{aligned} H_0 &= \sum_a E_a |a\rangle \langle a| + \sum_k \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k, \\ V &= + \sum_k \sum_{ab} \hbar g_k^{ab} |a\rangle \langle b| \otimes (a_k + a_k^\dagger), \end{aligned} \quad (8.219)$$

so werden durch die Störung nicht nur Übergänge zwischen Energie-Eigenzuständen des Komplettsystems, sondern damit auch Energie-Transfers zwischen dem gebundenen Elektron und dem elektromagnetischen Feld induziert. Wenn man die Terme im Wechselwirkungshamiltonian V ausmultipliziert, erhält man vier qualitativ verschiedene Prozesse

Operator	Elektron	Feld	Bemerkung
$ a\rangle\langle b \otimes a_k$ mit $E_a < E_b$	Abregung	Absorbtion eines Photons k	unterdrückt
$ a\rangle\langle b \otimes a_k^\dagger$ mit $E_a < E_b$	Abregung	Emission eines Photons k	wenn $\omega_k \approx E_j - E_i$
$ a\rangle\langle b \otimes a_k$ mit $E_a > E_b$	Anregung	Absorbtion eines Photons k	wenn $\omega_k \approx E_i - E_j$
$ a\rangle\langle b \otimes a_k^\dagger$ mit $E_a > E_b$	Anregung	Emission eines Photons k	unterdrückt

Nach Fermis Goldener Regel sind die beiden äußeren Prozesse stark unterdrückt, denn wegen $\omega_k > 0$ erhält der Prozess gleichzeitig ein Photon zu absorbieren und das System abzuregen nicht die Gesamtenergie bezüglich H_0 . Gleiches gilt für die Anregung des Systems und Emission eines Photons. Es sei jedoch gesagt, dass dies nur eine Näherung für kleine V ist, denn durch das Schalten einer Wechselwirkung V wird ja auch die Energiebilanz des Gesamtsystems verändert.

Nur die beiden mittleren Prozesse sind nach Fermis Goldener Regel zugelassen, sie erhalten auch die Summe aus der Anzahl der Anregungen im Atom und der Zahl der Photonen in der Mode k . Dies ist die Grundlage für die **rotating-wave Näherung**, indem man diese Terme gleich von Anfang an vernachlässigt, da sie ja in den Übergangsraten nicht beitragen, z.B. für ein Zweiniveausystem $V_{\text{RWA}} = \sum_k \hbar g_k (\sigma_+ \otimes a_k + \sigma_- \otimes a_k^\dagger)$. Ob wir die nach Fermis Goldener Regel erlaubten Prozesse nun mit V oder V_{RWA} ausrechnen ist unerheblich, das Resultat ist dasselbe.

Wir berechnen zunächst die Rate für die Absorbtion eines Photons der Mode k und die damit einhergehende Anregung des Elektrons vom Energie-Eigenzustand $|1\rangle$ in den Zustand $|2\rangle$ (mit Energien $E_2 > E_1$). Da $|i\rangle$ und $|f\rangle$ Eigenzustände von H_0 sind, hat man

$$\begin{aligned} |i\rangle &= |1\rangle \otimes |n_1^i \dots n_k^i \dots n_K^i\rangle, & |f\rangle &= |2\rangle \otimes |n_1^i \dots (n_k^i - 1) \dots n_K^i\rangle, \\ E_i &= E_1 + n_1^i \hbar \omega_1 + \dots + n_k^i \hbar \omega_k + \dots + n_K^i \hbar \omega_K, \\ E_f &= E_2 + n_1^i \hbar \omega_1 + \dots + (n_k^i - 1) \hbar \omega_k + \dots + n_K^i \hbar \omega_K. \end{aligned} \quad (8.220)$$

Nehmen wir an, dass nur eine Mode in der Nähe des elektronischen Überganges liegt, wird die Übergangsrate zu

$$\begin{aligned} R_{1 \rightarrow 2}^{\text{ab}} &= \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_f - E_i) \left| \sum_k \sum_{ab} \hbar g_k^{ab} \langle 2|a\rangle \langle b|1\rangle \langle n_k^i - 1 | a_k | n_k^i \rangle \right|^2 \\ &= 2\pi \hbar |g_k^{21}|^2 \delta(E_2 - E_1 - \hbar \omega_k) n_k^i. \end{aligned} \quad (8.221)$$

Die umgekehrte Rate für die Emission eines Photons und gleichzeitige Abregung des Elektrons mit den gleichen Zuständen berechnet sich zu

$$\begin{aligned} |i\rangle &= |2\rangle \otimes |n_1^i \dots n_k^i \dots n_K^i\rangle, & |f\rangle &= |1\rangle \otimes |n_1^i \dots (n_k^i + 1) \dots n_K^i\rangle, \\ E_i &= E_2 + n_1^i \hbar \omega_1 + \dots + n_k^i \hbar \omega_k + \dots + n_K^i \hbar \omega_K, \\ E_f &= E_1 + n_1^i \hbar \omega_1 + \dots + (n_k^i + 1) \hbar \omega_k + \dots + n_K^i \hbar \omega_K. \end{aligned} \quad (8.222)$$

Mit Fermis Goldener Regel wird daraus

$$\begin{aligned} R_{2 \rightarrow 1}^{\text{em}} &= \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_f - E_i) \left| \sum_k \sum_{ab} \hbar g_k^{ab} \langle 1|a\rangle \langle b|2\rangle \langle n_k^i + 1 | a_k^\dagger | n_k^i \rangle \right|^2 \\ &= 2\pi \hbar |g_k^{12}|^2 \delta(E_1 - E_2 + \hbar \omega_k) (n_k^i + 1). \end{aligned} \quad (8.223)$$

Diese Raten bedürfen einiger Diskussion.

- Bis auf den Faktor n_k^i oder $n_k^i + 1$ sind die beiden Raten identisch, denn $|g_k^{12}|^2 = |g_k^{21}|^2$.

- Man sieht dass, wenn im Anfangszustand in der entsprechenden erlaubten Mode gar keine Photonen vorhanden sind ($n_k^i = 0$), nur noch der Prozess der Emission übrigbleibt, man spricht in diesem Fall von **spontaner Emission**. Die Kopplung an das elektromagnetische Feld ermöglicht den Zerfall eines angeregten Zustandes, selbst wenn gar keine Photonen da sind. Im Gegensatz dazu wäre in einem geschlossenen Quantensystem jeder Energieeigenzustand stabil.
- Wenn in der Mode k jedoch schon Photonen vorhanden sind, wird die Emission verstärkt, man spricht daher von **stimulierter Emission**. Insbesondere stimulieren Photonen der Mode k die Emission weiterer Photonen derselben Mode k , was z.B. im Laser mit einem Resonator ausgenutzt wird.
- Umgekehrt können nur vorhandene Photonen absorbiert werden, daher ist der Absorbti-onsterm immer proportional zu n_k^i .

8.5.4 Lebensdauer

Um die Lebensdauer τ eines angeregten Zustandes unter der spontanen Emission zu berechnen, kann man die Raten zu allen möglichen Zielzuständen $|f\rangle$ addieren. Wenn man dies nur für den angeregten Zustand $|e\rangle$ in einem System hat, welches nur einen Grundzustand $|g\rangle$ hat, unterscheiden sich die möglichen Zielzustände nur durch die erzeugten Photonen, wir haben also für die Lebensdauer die Größe

$$\frac{1}{\tau} = \sum_k R_{e \rightarrow g}^{\text{em}}, \quad (8.224)$$

wobei $|i\rangle = |e\rangle \otimes |0 \dots 0\rangle$ der Anfangszustand und $|f\rangle = |g\rangle \otimes |0 \dots 1 \dots 0\rangle$ ein möglicher Endzustand wäre – mit einem erzeugten Photon der Mode k . Es ergibt sich nach Fermis Goldener Regel

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} &= \sum_k \frac{2\pi}{\hbar} (\hbar |g_k^{eg}|)^2 \delta(E_e - E_g - \hbar\omega_k) \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} \frac{4\pi^2 e^2}{L^3 \omega(k) m^2} \left| \langle e | \mathbf{u}_{\lambda}^{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{p}} | g \rangle \right|^2 \delta(E_e - E_g - \hbar\omega(k)) \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} \frac{4\pi^2 e^2 (E_e - E_g)^2}{L^3 \omega(k) \hbar^2} \left| \mathbf{u}_{\lambda}^{\mathbf{k}} \cdot \langle e | \hat{\mathbf{r}} | g \rangle \right|^2 \delta(E_e - E_g - \hbar\omega(k)). \end{aligned} \quad (8.225)$$

Wenn wir das Quantisierungsvolumen L^3 gegen Unendlich gehen lassen, liegen auch die erlaubten Moden \mathbf{k} des elektromagnetischen Feldes und damit auch die Energieeigenwerte $\omega(k)$ immer dichter, und die Summe über die erlaubten Endzustände wird zu einem Integral

$$\frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} [\dots] \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k [\dots]. \quad (8.226)$$

Dieses Vorgehen ist auch generisch für die Beschreibung offener Quantensysteme: Das Reservoir wird oft als kontinuierlich angenommen, was durch Funktionen wie z.B. die spektrale Kopplungsdichte beschrieben wird. Für das zu berechnende Matrixelement kann man die Polarisationsvektoren $\mathbf{u}_{\lambda}^{\mathbf{k}}$ so wählen, dass z.B. $\mathbf{u}_2^{\mathbf{k}}$ senkrecht auf $\mathbf{d} \equiv \langle e | \hat{\mathbf{r}} | g \rangle$ stehe, so dass effektiv nur eine Polarisation $\mathbf{u}_1^{\mathbf{k}}$ beiträgt. Dann wird das Matrixelement zu

$$\left| \mathbf{u}_{\lambda}^{\mathbf{k}} \cdot \langle e | \hat{\mathbf{r}} | g \rangle \right|^2 = \delta_{\lambda 1} |\langle e | \hat{\mathbf{r}} | g \rangle|^2 \cos^2 \phi = \delta_{\lambda 1} |\langle e | \hat{\mathbf{r}} | g \rangle|^2 \sin^2 \theta, \quad (8.227)$$

wobei ϕ der Winkel zwischen $\mathbf{u}_1^{\mathbf{k}}$ und \mathbf{d} und θ der Winkel zwischen \mathbf{k} und \mathbf{d} ist. Das Integral lässt sich somit elementar berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tau} &= \frac{4\pi^2 e^2 (E_e - E_g)^2}{\hbar^2} |\langle e | \hat{\mathbf{r}} | g \rangle|^2 \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \delta(E_e - E_g - \hbar\omega(k)) \frac{\sin^2 \theta}{\omega(k)} \\
&= \frac{e^2 (E_e - E_g)^2}{2\pi\hbar^2} |\langle e | \hat{\mathbf{r}} | g \rangle|^2 \int_0^\infty \frac{k^2}{ck} \delta(E_e - E_g - \hbar ck) dk \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= \frac{4}{3} \frac{e^2 (E_e - E_g)^2}{\hbar^2} |\langle e | \hat{\mathbf{r}} | g \rangle|^2 \frac{1}{c} \int_0^\infty \delta(E_e - E_g - E) \frac{E}{\hbar c} \frac{dE}{\hbar c} \\
&= \frac{4}{3} \frac{e^2}{\hbar c^3} \left(\frac{E_e - E_g}{\hbar} \right)^3 |\langle e | \hat{\mathbf{r}} | g \rangle|^2.
\end{aligned} \tag{8.228}$$

Man kann diese Rechnung natürlich für komplexere Systeme mit mehr Energieeigenzuständen machen, man sieht jedoch schon am Resultat, dass ein Zustand $|e\rangle$ umso langlebiger ist, je kleiner das Dipolmatrixelement zu energetisch tiefer liegenden Zuständen ist. Schafft man es in einem Medium, einen solchen langlebigen Zustand $|e\rangle$ von oben zu bevölkern, so wird dieser verstärkt besetzt: Sein Zerfall in energetisch tieferliegende Zustände ist verzögert und Anregungen sind nicht möglich da im Reservoir keine Photonen passender Frequenz vorliegen.

Insbesondere spricht man auch von Besetzungsinversion, wenn der angeregte Zustand stärker besetzt ist als der Grundzustand. Dies ist nötig, damit der Prozess der Emission von Licht der Frequenz $(E_e - E_g)/\hbar$ wahrscheinlicher wird als der Prozess der Absorption. Um das Laserlicht zu verstärken, setzt man daher das Lasermedium in einen Resonator, einmal erzeugte Photonen der gewünschten Mode stimulieren dann die Emission weiterer Photonen derselben Mode – ohne Besetzungsinversion hingegen würden sie schnell wieder absorbiert. Um einen Laser zu realisieren, muss man also das Niveau $|e\rangle$ von oben herab bevölkern, dazu benötigt man im Allgemeinen mindestens drei Niveaus: Durch Pumpen werden die Populationen von $|g\rangle$ und $|2\rangle$ angeglichen, das Niveau $|2\rangle$ zerfällt aber durch schnelle spontane Emission in das Niveau $|e\rangle$, welches nur sehr langsam durch spontane Emission wieder in Niveau $|g\rangle$ zerfallen kann. Es entsteht die gewünschte Besetzungsinversion, was durch Ratengleichungen leicht nachvollzogen werden kann. Das ist das grundlegende Bauprinzip eines Lasers.

Index

- Äther, 104
- Absorbtionskoeffizient, 153
- Additionstheorem der Kugelflächenfunktionen, 45
- Amperesches Kraftgesetz, 64
- Antiferromagnetismus, 78
- antisymmetrischen Feldstärketensor, 112
- assoziierte Legendre-Polynome, 42
- astronomische Refraktion, 165
- Bildladung, 29
- Bohrsche Radius, 140
- Brechungsgesetz, 160
- Brechungsindex, 102, 152
- Cauchy-Hauptwert, 127
- Cauchy-Randbedingungen, 22
- Cauchy-Riemann Differentialgleichungen, 118
- Coulomb-Eichung, 68
- Curie-Temperatur, 78
- d'Alembert-Operator, 85
- Diamagnetismus, 78
- dielektrische Funktion, 150
- dielektrische Verschiebung, 54
- Dielektrizitätskonstante, 56
- Dielektrizitätskonstante des Vakuums, 4
- differentiellen Wirkungsquerschnitt, 145
- Dipolformel, 138
- Dipolmomente, 47
- Dirichlet-Randbedingungen, 22
- Dispersionsgesetze, 154
- Dispersionsrelation, 92
- dreidimensionale Dirac-Delta Distribution, 11
- Drude-Modell, 155
- ebene Welle, 93
- Eichfreiheit, 68
- Eichtransformation, 84
- Eigenzeit, 109
- Eikonal, 164
- Eikonalgleichung, 164
- Einsteinsche Summenkonvention, 108
- elektrische Leitfähigkeit, 63
- elektrische Polarisierbarkeit, 145
- elektrische Suszeptibilität, 56
- elektrischer Widerstand, 61
- elektromotorische Kraft, 81
- elektrostatische Feldenergiedichte im Medium, 57
- elliptisch polarisierte Welle, 96
- Energie-Impuls-Tensor, 112
- Energiedichte des elektrischen Feldes, 15
- Energiedichte des elektromagnetischen Feldes, 88
- Energiedichte des magnetischen Feldes in Materie, 77
- erstes Amperesches Gesetz, 64
- essentielle Singularität, 121
- Euler-Lagrange-Gleichungen für Felder, 177
- Feinstrukturkonstante, 140
- Feldimpuls, 90
- Feldlinien, 9
- Fermis Goldene Regel, 198
- Ferrimagnetismus, 78
- Ferromagnetismus, 78
- Fluss eines Vektorfeldes, 6
- Formfaktor, 147
- Frequenz, 94
- Fresnelschen Formeln, 161
- Fundamentalbeispiel der Funktionentheorie, 120
- Galilei-Transformation, 103
- Gaußsches Gesetz, 13
- generalisierte Feldimpulse, 178
- Gesetz von Biot und Savart, 63
- Gesetz von Biot-Savart, 66
- Gesetze der geometrischen Optik, 157
- Glauber-Zustände, 193
- Greensche Funktion, 24
- Greenschen Theoreme, 21
- Grundgleichungen der Elektrostatik, 13
- Grundgleichungen der Magnetostatik, 68
- Gruppengeschwindigkeit, 99
- gyromagnetisches Verhältnis, 73
- Hamilton-Dichte, 178

- hebbare Singulariät, 121
- Hohlleiter, 167
- holomorphe Funktion, 117
- homogene Wellengleichungen, 85
- indefinites Skalarprodukt, 108
- Induktivität, 142
- Inertialsysteme, 103
- Influenzladung, 23
- inhomogene Wellengleichungen, 85
- Integralsatz von Gauss, 6
- Integralsatz von Stokes, 5
- Isolatoren, 23
- Kapazität, 20
- Kausalität, 130
- Kirchhoffsche Knotenregel, 61
- klassischen Elektronenradius, 16
- kohärente Zustände, 193
- kollektiver Magnetismus, 78
- Kontinuitätsgleichung, 111
- kontravariante Vierervektoren, 108
- kovariante Vierervektoren, 108
- Kramers-Kronig-Relationen, 154
- Kreisfrequenz, 94
- Kugelflächenfunktionen, 42
- Kugelwellen, 101
- Lagrangedichte der Elektrodynamik, 180
- Langwellennäherung, 135
- Laplace-Gleichung, 13
- Laurent-Reihe, 120
- Legendre-Differentialgleichung, 37
- Legendre-Polynome, 35
- Leiter, 23
- Leiteroperatoren, 188
- Leitfähigkeit, 155
- Leitungsstrom, 77
- linear polarisierte Welle, 95
- Liénard-Wiechert-Potentiale, 133
- longitudinale Stromdichte, 86
- Lorentz-Kraft, 65
- Lorentz-Transformation, 106
- Lorentzmodell, 152
- Lorenz-Eichung, 84, 111
- magnetische Feldstärke, 77
- magnetische Permeabilität, 78
- magnetische Suszeptibilität, 78
- magnetischen Fluss, 81
- magnetisches Moment einer lokalisierten Stromverteilung, 72
- Magnetisierung, 75
- Magnetisierungsstrom, 77
- Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik im Medium, 54
- Maxwell-Gleichungen in kovarianter Formulierung, 112
- Maxwellscher Spannungstensor, 91
- metrische Tensor, 108
- minimale Kopplung, 175
- Minkowski-Raum, 106
- Minkowski-Diagramm, 106
- Monopolmoment, 47
- Multipolentwicklung, 46
- Multipolmomente, 46
- Nichtleiter, 23
- Norm einer Funktion, 33
- Normalenableitung, 21
- Ohmsche Gesetz, 61
- orthogonales Funktionensystem, 33
- orthonormales Funktionensystem, 33
- Paramagnetismus, 78
- Periode, 93
- Phasengeschwindigkeit, 93
- Photon, 190
- Plasmafrequenz, 155
- Poisson-Gleichung, 13
- Pol, 121
- Polarisation, 53
- Polarisationsrichtung, 95
- Potential einer Ladungsverteilung, 11
- Poynting-Theorem, 88
- Poynting-Vektor, 88
- Quadrupoltensor, 48
- Rayleighstreuung, 146
- Reflexionsgesetz, 160
- Reflexionskoeffizienten, 162
- Rekursionsformel für die Legendre-Polynome, 36
- relativistische Energie-Impuls-Beziehung, 110
- relativistische Längenkontraktion, 107
- relativistische Zeit-Dilatation, 107
- Residuensatz, 122
- Residuum, 122
- Resonanz, 146
- retardierte Greensche Funktion, 131
- retardierte Potentiale, 131
- Rodriguez-Formel, 36

- rotating-wave Näherung, 199
- Schwingkreis-Frequenz, 142
- Separationsansatz, 39, 168
- Snellius-Gesetz, 160
- Spannung, 11
- spezifischer elektrischer Widerstand, 63
- Spin-Boson-Modell, 197
- spontaner Emission, 200
- statische Dipolmoment, 136
- stimulierter Emission, 200
- Strahlungs-Fernzone, 135
- Strahlungs-Nahzone, 135
- Strahlungscharakteristik eines oszillierenden Dipols, 138
- Strahlungsdruck, 91
- Stromdichte, 60
- Stromfaden, 61
- Stromstärke, 60

- TE-Moden, 170
- TEM-Moden, 170
- Thomsonstreuung, 146
- TM-Moden, 170
- totalen Wirkungsquerschnitt der Lichtstreuung, 146
- Totalreflexion, 163
- Transmissionskoeffizienten, 162
- transversale Stromdichte, 86

- Vektorpotentials, 68
- Verknüpfungsgleichungen im Frequenzraum, 150
- Verlustleistung, 63
- Vierer-Ableitung, 111
- Vierer-Potential, 111
- Vierer-Stromdichte, 111
- Vollständigkeitsrelation, 34
- von-Neumann-Randbedingungen, 22

- Wellenlänge, 93
- Wellenpaket, 99
- Wellenvektor, 93
- Wirkung, 177

- zirkular polarisierte Welle, 95
- zweites Amperesches Gesetz, 67